

初始方程数值模式的一个计算格式 及其预报的个例实验

中国科学院大气物理研究所中期预报组

提 要

本文对 σ 坐标的初始方程数值预报模式提出了一个比较简洁、稳定而灵活的计算格式,便于引进地形和加热等物理作用。

文中给出了这一格式的特点,并概述了半球模式的侧边条件的影响情况。从预报个例实验结果看,格式基本上是稳定的,而短期预报的效果也较好。

一、前 言

大气变化是在旋转地球和太阳辐射影响下的三维流体运动,包括了多种不同尺度的天气变化。当代流体力学、天气动力学和计算技术的进展使得人们能够利用完整的初始方程,包括各种物理作用,建立复杂的大气模式,用以模拟大气的物理系统,并制作天气变化的数值预报。这类模式的应用,能够延伸模式的预报范围和时效,并可预报地面天气系统的变化。

过去,我们曾经使用早期的整层无辐散假定下的初始方程模式^[1-2],研究大型过程的预报,对500mb形势预报比地转模式有了改进。但由于整层无辐散的假定,它过滤了外重力波,并无法直接预报地面系统的变化。另外这类模式假定了静力稳定度是常数,对一些物理过程的引进也是不协调的。

因此近年来,我们开始研究包括复杂物理过程的完全形式的初始方程,用于大尺度天气的短、中期预报。

由于这类方程包括各种尺度运动的非线性制约,又包括高频的外重力波,因此在建立这类模式的问题中,首先是对动力方程组提出一个稳定的计算格式,然后是引进地形、水汽循环和非绝热作用等物理过程。

初始方程计算格式稳定性问题的解决途径之一,是使差分方程保持微分方程所固有的一些物理特性守恒。其中主要是保持动量、动能和总能量守恒。这方面的研究很多^[3-4],但其中的总能量守恒要求对气压梯度项和静力方程的差分计算予以一定的限制,带来一定的不灵活性。我们过去曾以一个四层模式试验了一种守恒格式⁵⁾,改进了上述缺点,但这个格式的守恒性要求地面气压不随时间变化,并且由于垂直差分的缺点,为了满足动量

1) 武汉中心气象台、武汉大学数学系、中国科学院大气物理研究所,有限区域中四层原始模式概述及初步试验结果,1974,油印本。

守恒,使得格式比较复杂.

现在的目的是在考虑这些工作的优缺点上提出一个比较简洁、稳定而灵活的格式.然后以实际的预报个例,试验这一格式的性能.

二、模式大气的方程组

为了上述目的,模式大气先考虑绝热大气和均匀下垫面作用下的斜压流体,但为了便于进一步考虑地形作用,我们采用 $\sigma = (p/p_*)$ 坐标系,其中 $p_* = p_*(x, y, t)$ 是场面气压.这时模式大气的动量方程为

$$\frac{\partial p_* u}{\partial t} = -m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{p_* u}{m} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_* v}{m} \right) - p_* \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + p_* f v - m p_* \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial x} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p_* v}{\partial t} = -m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{p_* u}{m} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_* v}{m} \right) - p_* \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} - p_* f u - m p_* \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial y} \right), \quad (2.2)$$

连续方程为

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = -m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{p_* u}{m} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_* v}{m} \right) - p_* \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}, \quad (2.3)$$

将上式积分,则得倾向方程

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = - \int_0^1 m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{p_* u}{m} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_* v}{m} \right) d\sigma. \quad (2.4)$$

在绝热情况下,热力学方程为

$$\frac{\partial p_* T}{\partial t} = -m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{p_* u}{m} T + \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_* v}{m} T \right) - p_* \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{RT}{c_p \sigma} \omega, \quad (2.5)$$

ω 方程为

$$\omega = \dot{\sigma} p_* + \sigma \left[\frac{\partial p_*}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial p_*}{\partial x} + v \frac{\partial p_*}{\partial y} \right) \right], \quad (2.6)$$

静力平衡方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial \ln \sigma} = -RT, \quad (2.7)$$

其中 m 是地图投影放大系数, f 是地球自转参数, R 是气体常数, 其它与一般相同. 上列方程组 7 式包括 7 个变量: u 、 v 、 $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ 、 ϕ 、 T 、 p_* 和 $\omega = \frac{dp}{dt}$, 成为闭合方程组, 在一定的边界条件和初值条件下可以求解这些变量.

在大气的顶和底边界条件是

$$\text{在 } \sigma = 0.1 \text{ 处 } \dot{\sigma} = 0 \quad (2.8)$$

为了便于设计一种计算稳定的格式, 我们把上列方程组的热力学方程进行改写, 引进地转风分量

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{m}{f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + RT \frac{\partial \ln p_*}{\partial y} \right), \\ v_g &= \frac{m}{f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + RT \frac{\partial \ln p_*}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

并引进下列符号

$$U \equiv \frac{p_* u}{m}, \quad V \equiv \frac{p_* v}{m}, \quad \dot{\Sigma} \equiv \frac{p_* \dot{\sigma}}{m},$$

$$\mathcal{L}(a) \equiv m \left[\frac{\partial}{\partial x} (Ua) + \frac{\partial}{\partial y} (Va) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\dot{\Sigma} a), \quad (2.10)$$

可得下列简写的方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\mathcal{L}(u) + fV - \frac{p_*}{m} f v_g, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\mathcal{L}(v) - fV + \frac{p_*}{m} f u_g, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \dot{\Sigma}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{m} \left[m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial p_*}{\partial t} \right], \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = - \int_0^1 m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\sigma, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_*}{m} c_p T \right) = -\mathcal{L}(c_p T + \phi) - \frac{1}{m} \frac{\partial \phi \sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial p_*}{\partial t} + (U f v_g - V f u_g), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \ln \sigma} = -RT \quad (2.16)$$

或

$$T = \frac{1}{R} \left(\phi - \frac{\partial \sigma \phi}{\partial \sigma} \right). \quad (2.17)$$

上列方程组(2.11)~(2.17)式是我们模式的基本方程组.

三、差分计算格式

1. 积分空间的分解 垂直分层如图1, 暂取三层, 垂直空间格距 $\Delta\sigma = 1/3$. 变量的分布, 在垂直方向上取跳点格式, 即 U 、 V 、 T 、 ϕ 取在整层

$k = 1, 2, 3$ 的层上, 垂直速度 $\dot{\Sigma}$ 取在半层 $k = 1 \frac{1}{2}$ 和

$2 \frac{1}{2}$ 上; 在水平方向上, 变量分布取非跳点格式, 即 U 、

V 、 T 、 ϕ 和 $\dot{\Sigma}$ 均取在同一格点上.

按垂直边界条件(2.8)有 $\dot{\Sigma}_{\frac{1}{2}} = \dot{\Sigma}_{3\frac{1}{2}} = 0$.

2. 空间差分 差分格式的设计, 要求计算上稳定简洁, 并保持微分方程的整个大气的质量、动量、动能和总能量守恒性, 我们得出下列对应(2.11)~(2.17)的差分方程组如下:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left[-L(u) + fV - \frac{p_*}{m} f v_g \right]^n, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left[-L(v) - fU + \frac{p_*}{m} f u_g \right]^n, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = -\frac{1}{3} m^2 \sum_{k=1}^3 (\bar{U}_x^x + \bar{V}_y^y)_k, \quad (3.3)$$

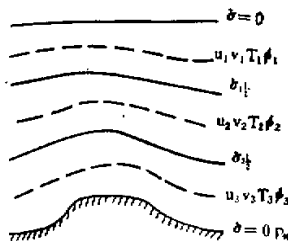


图1. 模式大气的垂直分层

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_{k\frac{1}{2}} = \dot{\Sigma}_{(k+1)\frac{1}{2}} + \Delta\sigma m \left[(\bar{U}_x^* + \bar{V}_y^*)_{k+1} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\bar{U}_x^* + \bar{V}_y^*)_i \right], \\ \dot{\Sigma}_{\frac{1}{2}} = \dot{\Sigma}_{3\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \quad (k=1, 2) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_* c_p T}{m} \right) = \left[-L(c_p T + \phi) - \frac{1}{m} (\bar{\phi}^a \sigma)_c \frac{\partial p_*}{\partial t} + (U f v_x - V f u_x) \right]^n, \quad (3.5)$$

上述式中 n 为时间层。

$$\begin{cases} \phi_k = \phi_{k+1} - \frac{R}{2} \left(\ln \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} \right) (T_k + T_{k+1}), & (k=1, 2) \\ \phi_3 = \phi_* + R T_3 \ln \frac{1}{\sigma_3} \end{cases} \quad (3.6)$$

或

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{R} \left[\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_{1\frac{1}{2}}} (\phi_1 - \phi_{1\frac{1}{2}}) \right] \\ T_k = \frac{1}{R} \left[\phi_k - \frac{1}{\Delta\sigma} (\sigma_{k+\frac{1}{2}} \phi_{k+\frac{1}{2}} - \sigma_{k-\frac{1}{2}} \phi_{k-\frac{1}{2}}) \right], & (k=2, 3) \end{cases} \quad (3.7)$$

其中(3.7)式 $k=1$ 层仍按(3.6)差分。平流项差分算子的定义为

$$L(a) = m[(\bar{U}^* \bar{a}^*)_x + (\bar{V}^* \bar{a}^*)_y] + (\dot{\Sigma} \bar{a}^*)_{\sigma}, \quad (3.8)$$

$$\bar{F}^z = \frac{1}{2} \left[F \left(z + \frac{d}{2} \right) + F \left(z - \frac{d}{2} \right) \right],$$

$$F_z = \frac{1}{d} \left[F \left(z + \frac{d}{2} \right) - F \left(z - \frac{d}{2} \right) \right].$$

其中 d 为水平差分格距。气压梯度项为

$$\begin{cases} f v_x = m[\bar{\phi}_x^* + R T (\ln p_*)_x^*] \\ f u_x = -m[\bar{\phi}_y^* + R T (\ln p_*)_y^*] \end{cases} \quad (3.9)$$

上列空间差分方程组的特点如下：

(1) 倾向方程取(3.3)的格式, 动量方程(3.1)和(3.2)中非线性格式取 Lilly 格式^[3], 如(3.8), 则保持大气的总质量、动量和动能守恒, 有助于克服非线性不稳定。

(2) (3.1)(3.2) 与 (3.5) 使得动能方程和位能方程中的动能同位能的转化项自动相消, 因此气压梯度项的差分构造可以不受任何限制而能保持总能量守恒。当考虑地形作用时, 对于(2.9)式便于选择截断误差较小的差分格式。

(3) (3.5) 式右端包括 $\frac{\partial p_*}{\partial t}$ 的项, 当对整个大气求和时, 与上述第(2)点合在一起可使总能量自然守恒而不需象其它格式^[4]那样, 对静力方程的差分构造加以限制, 也不需要象有的格式^[5]那样要求 $\frac{\partial p_*}{\partial t} = 0$ 。(详见附录 1)。

(4) 温度方程(3.5)仍保持 $p_* T$ 和 $p_* T^2$ 的守恒性。但在地形陡坡区域, $(\phi + c_p T)$ 的平流计算可能出现大量小差问题。

3. 时间差分 为了保持计算稳定, 抑制高频振动, 采取欧拉后差和中央差交替使用的格式: 在起始的 6 小时内全用欧拉后差, 6 小时以后, 则每 6 小时内, 先采取 1 次欧拉后差, 然后都是中央差。如此每 6 小时反复循环一次。

四、预报区域和侧边界条件

在上述格式的基础上,我们用一个半球模式试验格式的稳定性,发现上述格式在中高纬度区域里基本上是稳定的,一些不稳定现象出现在侧边界的附近,因此选择合适的侧边界条件是重要的问题。

模式的水平范围是极射投影的一个近于方形的矩形,南界切于 11.6°N ,北界切于 18°N ,而东西切于 21°N 的纬圈。在此区域中共有 $i \times j = 31 \times 35$ 个格点,水平格距 $d=540$ 公里。 m, f 在 30° 以南保持 30° 的值。试验的预报个例初始场是 1975 年 4 月 19 日 12 世界时(见图 2)。

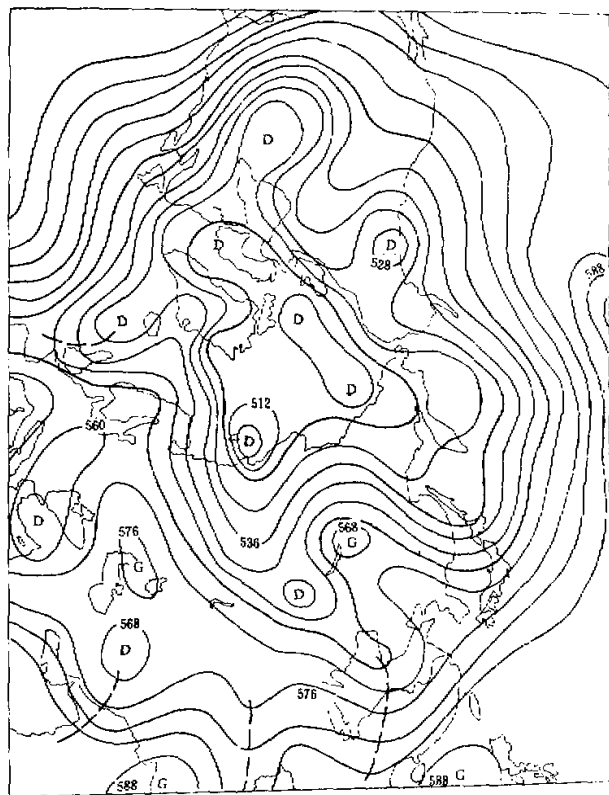


图 2. 1975 年 4 月 19 日 12 世界时 500 毫巴高度图。(初始场)

取 $\Delta t = 15$ 分,并在边界上的变量值保持不变。这时在中、高纬度地区,大型气象场的演变是合理的。但积分计算不久,则在低纬区产生两种不稳定现象:一是在太平洋 30°N 以南沿纬圈方向上出现两格距的计算波,并且很快地发展传播,是很强的不稳定现象;二是在大西洋低纬的副高中心强度缓慢地增长,属于弱的不稳定现象。

第一种计算波看来是通过高频重力波发展起来的,它在 $30^{\circ}\phi$ 以南出现,可能是在一

定的流场情况下,由于实际 d 值的缩小,不满足线性稳定度条件,我们缩小时间步长,取 $\Delta t = 10$ 分,则抑制了这种计算波。

第二种弱的不稳定现象可能和初值风(地转近似)在低纬区不合理有关。

看来格式在中高纬基本上是稳定的,但在低纬度地区,结合初值情况,还包括不稳定问题。我们考虑到机器的内存和速度的限制,首先侧重试验西风带的预报问题,因此仍取 $\Delta t = 15$ 分,暂定了下述的边界条件:

(1) 为了考虑边界附近的系统变化,不取固定的侧边界条件,而取“边界第一圈的倾向为边界第二圈倾向的一半”。

(2) 为了保持低纬区的稳定性,在北纬 32.5° 以南设置一种“海绵”式边界,即预报量

$$F^{n+1} = F^{n-1} + \alpha \left(2\Delta t \frac{\partial F}{\partial t} \right),$$

假定 α 是纬度的线性函数: 在 $32.5^\circ\varphi$, $\alpha = \frac{6}{7}$; 在 $11.6^\circ\varphi$, $\alpha = 0$ 。

另外在低纬 $32.5^\circ\varphi$ 以南的地区,在动量方程的右端加上一个简单的扩散项,扩散系数随纬度的减小呈线性的增大,有助于消除低纬区流场上不规则的“小弯”。经过这样处理,不再加其它平滑算子,半球模式可以稳定地计算到 4 天。这样,本文的 Δt 取得较大,但在上述的措施下,也可避免线性不稳定,在目前的机器条件下,可以节省试验的计算时间。

五、初 值

输入资料有 200、500、850mb 等压面的位势高度场、海面气压场 p_s 。

在预报计算时,需要的初值是等 σ 面上的 ϕ^0 , T^0 , V^0 和 p_s^0 。

1. σ 面上的位势高度,按照拉格朗日插值公式,在垂直方向上以对数坐标求得所需要的 ϕ_k ($k = 1, 2, 3$, 和 $k = 1.5, 2.5$), 详见附录 2。

2. 地面气压场 p_s 的计算,当不考虑地形作用时,则初值 $p_s^0 = p_s^0$ 。

3. 初值风用(3.9)式计算水平风场,而垂直运动则由(3.4)算出。最外一圈南北侧边界上的 v^0 和东西侧边界上的 u^0 , 则由边界第二圈的初值送给。为了使初值风在低纬比较合理,规定当 $\varphi < 30^\circ$ 时取 $f = f_{30^\circ}$, $m = m_{30^\circ}$ 。

4. 温度场是根据插值公式所求得各 σ 面上高度 ϕ , 按静力差分方程(3.7)求出。

六、预 报 个 例

我们利用上述格式,在北半球模式进行了两个个例的预报实验,预报结果输出时,和初值形成时相反,按附录 2 的公式,由 ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3 反插出 850、500、和 200mb 等压面上的 ϕ 值。

由试验得到,中高纬地区的 96 小时预报结果仍表明格式是相当稳定的,但这时地面图上已开始出现多余的,看来属于计算波的短波系统。下面只给出 24、48 小时的预报结果。

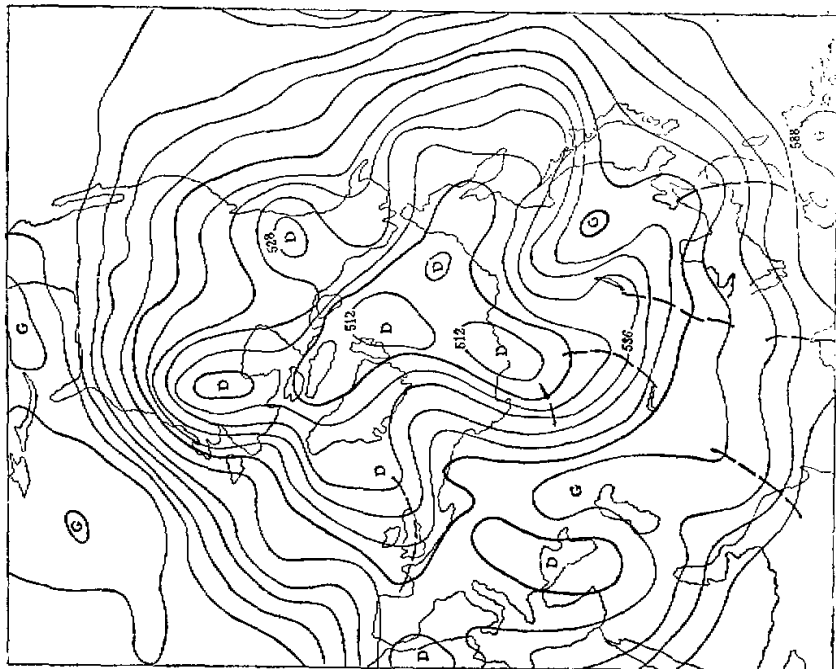


图 4. 24 小时 500 米巴高度预报图, 用图 3 的实况验证.

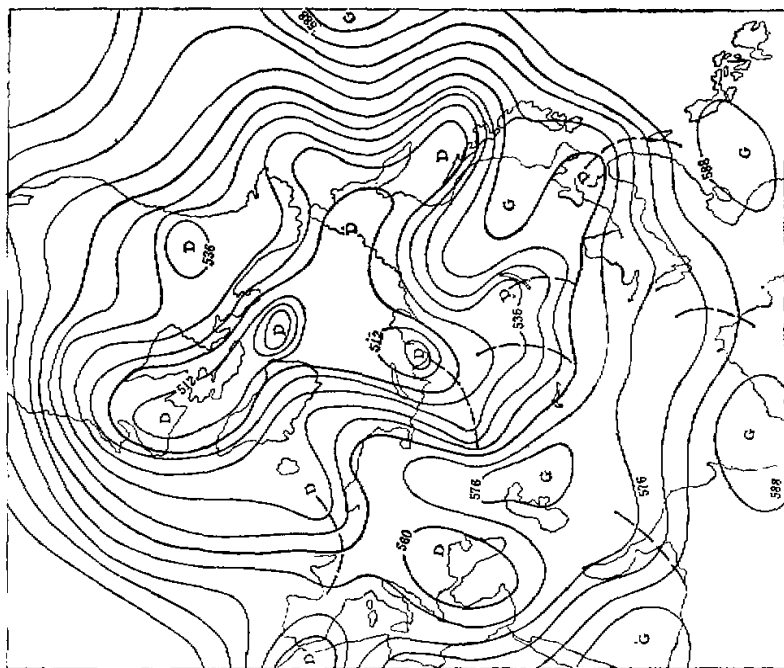


图 3. 1975 年 4 月 20 日 12 世界时 500 毫巴高度图(实况).

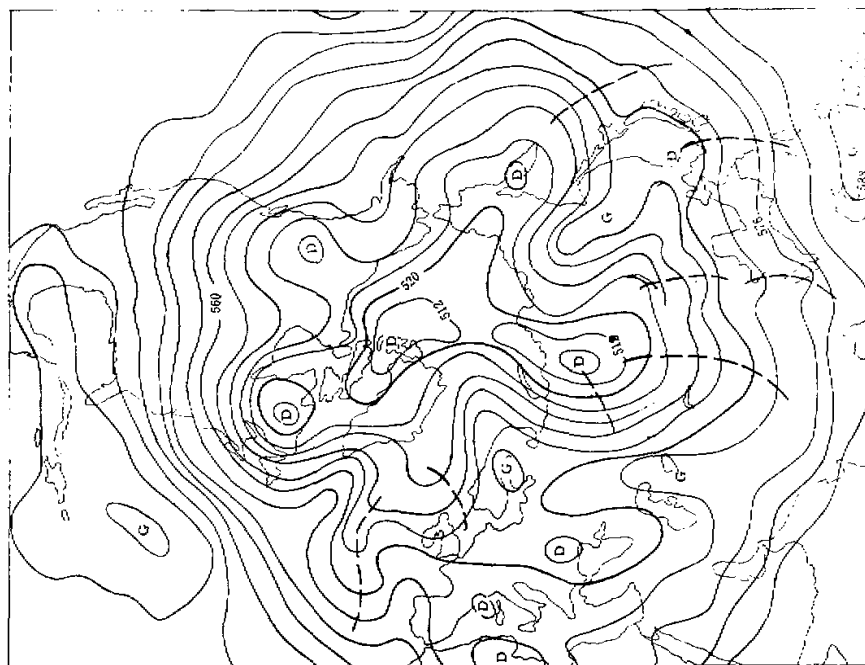


图 6. 48 小时 500 毫巴高度预报图, 用图 5 的实况验证.

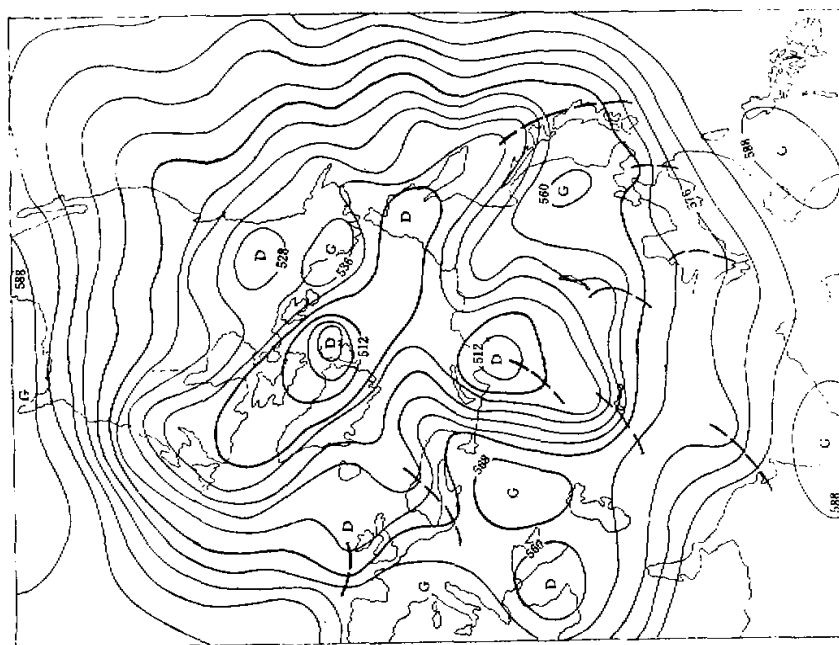


图 5 1975 年 4 月 21 日 12 世界时 500 米巴高度图(实况).

图 2 和图 7 是初始场(1975 年 4 月 19 日 12 世界时)的 500mb 高度图和海平面气压图。在美洲东部有一个高空槽,对应地面图上是一个很强的气旋,中心为 990mb,大西洋上空的气流是纬向的,在西欧海岸是一个移动性低槽。乌拉尔地区为阻高控制,亚洲的环流经向度较大,低槽从新地岛经西伯利亚到我国黄河中游,从北向南伸展得很强。地面图上我国东海岸正有一个倒槽。在未来时刻,这个经向度很强的流型怎样变化,黄河的低槽及地面倒槽如何发展,是我国预报员关心的问题。

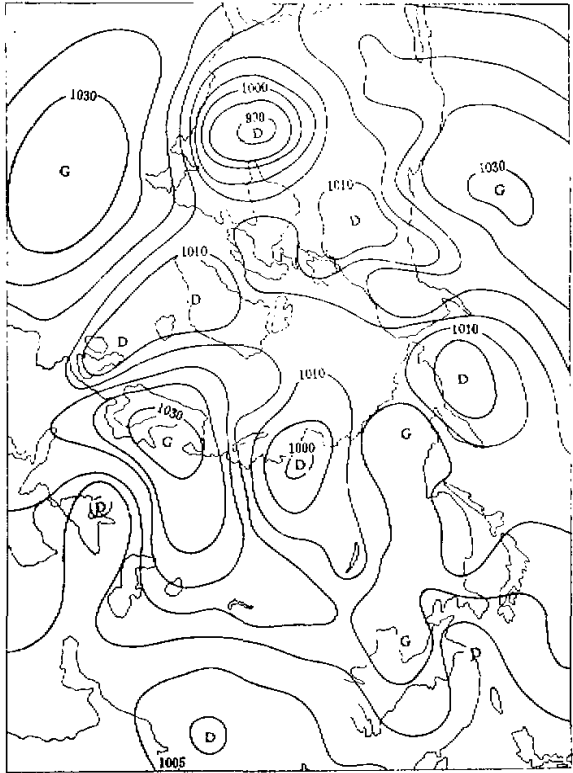


图 7. 1975 年 4 月 19 日 12 世界时地面气压图(初始场)

这里给出 24 小时和 48 小时的预报图(图 4、6、9、11)。北美洲东岸的低槽和气旋剧烈加深的预报是比较成功的,但中心强度比实况偏深些。亚洲经向度很强的低槽转成低涡,环流趋近纬向波动,而黄河槽东移到黄海,地面上有一个江淮气旋生成,这些变化在 24 小时和 36 小时的预报也是比较成功的,只是黄河小槽的移动稍慢,导致 36 小时地面预报图虽然成功地预报出江淮气旋的生成,但位置偏西。这种系统偏慢到 60 小时更为明显。另外在 48 小时预报图上,我国西部的高空槽向南发展过强,这是未考虑地形作用而经常出现的误差。

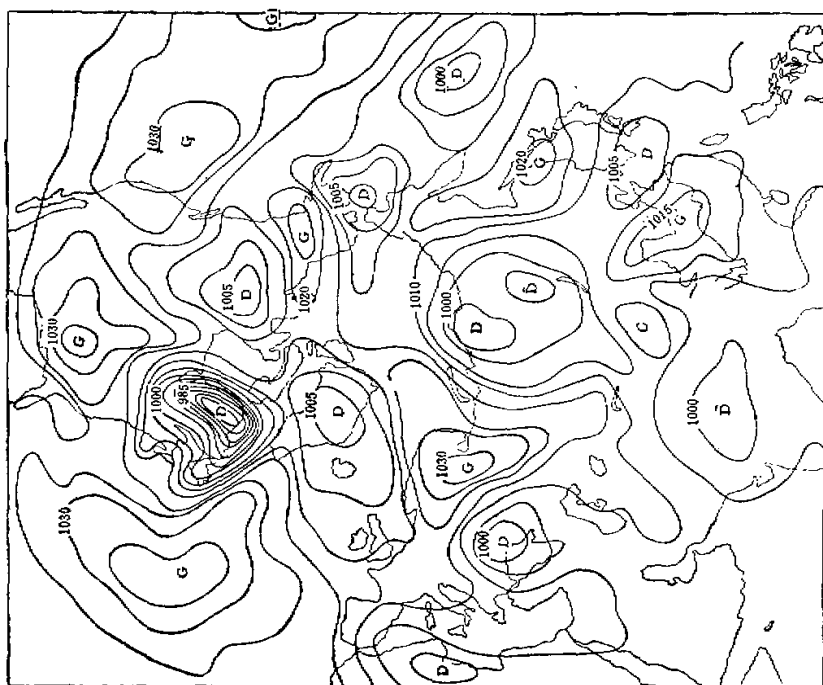


图 9. 36 小时地面气压预报图, 用图 8 的实况验证。

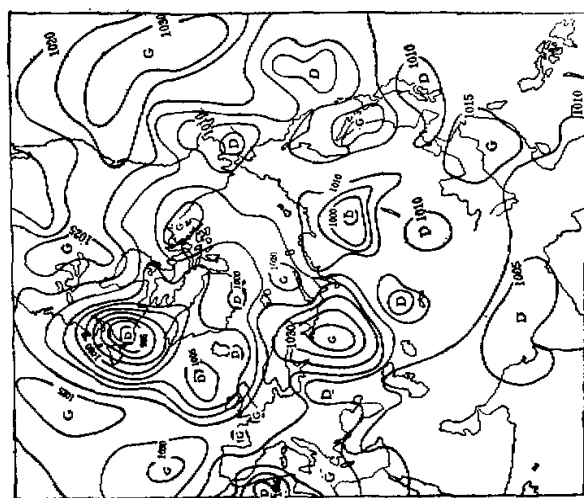


图 8. 1975 年 4 月 21 日 00 世界时地面气压图 (实况)

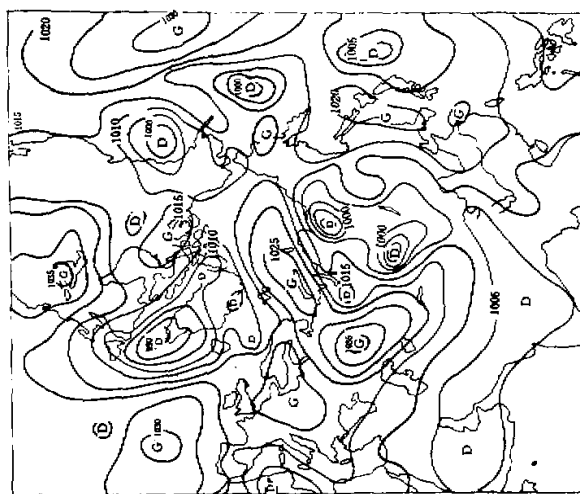


图 10. 1975 年 4 月 22 日 00 世界时地面气压图
(实况).

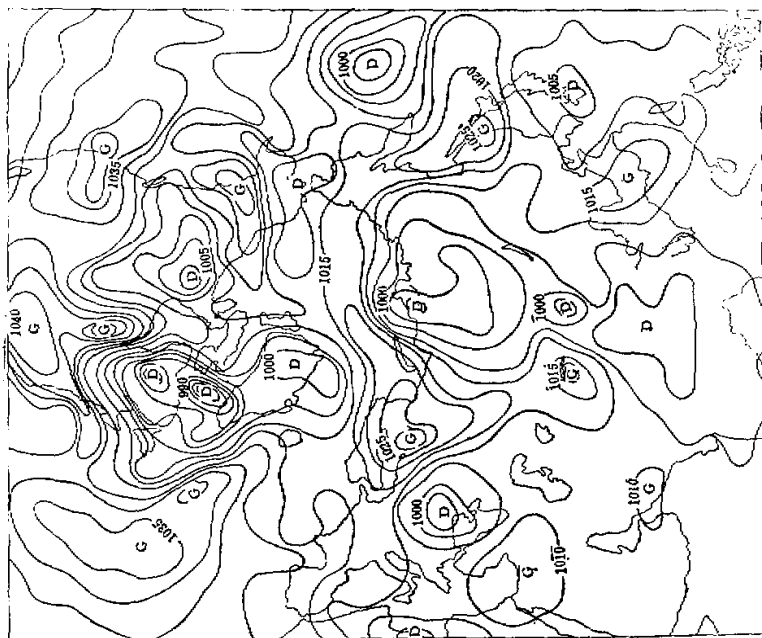


图 11. 6h 小时地面气压预报图, 用图 10 的实况验证.

七、结 语

本文在过去一些研究成果的基础上,提出了初始方程的一个计算格式。这个格式在原理上是比较简洁、稳定而灵活的。经过模式的预报实验,发现主要问题是

(1) 在低纬度区,效果差。由于时间步长取得较长,海绵式侧边界条件区太宽,对中纬度系统也带来影响。

(2) 静力方程的差分格式,最上层和以下各层不一致,是单向差。

这些问题都有待以后的工作中继续改善。但从中、高纬度的预报情况看,这个计算格式基本上是稳定的,预报效果也是较好的。目前正在上述格式的基础上,试验引进地形和非绝热作用,并对初值等问题开展进一步的研究。

参 考 资 料

- [1] 曾庆存,二层模式的完整流体力学热力学方程组在短期预报中的应用,中国科学院地球物理研究所,动力气象论文集(二),1963,133—152页。
- [2] 陈雄山、张学洪等,初始方程三层模式,数值预报和统计预报会议论文集,1974,1—18页。
- [3] D. K. Lilly, On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical dynamic problems. *M. W. R.* 1965, **93**, pp. 11—26.
- [4] G. U. Haltiner, *Numerical Weather Prediction*. New York 1971, p. 243—247.

附录1 差分系统总能量守恒证明

利用(3.3)和(3.4),则有

$$\begin{aligned} & \sum_{ijk} \frac{1}{m^2} \left[-aL(a) - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial p_*}{\partial t} \right]_{ijk} \\ &= \sum_{jk} \frac{1}{4d} [(U_i + U_0)a_1a_0 - (U_n + U_{n-1})a_n a_{n-1}]_{jk} + \sum_{ik} \frac{1}{4d} [(V_i + V_0)a_1a_0 \\ & \quad - (V_m + V_{m-1})a_m a_{m-1}]_{ik} + \sum_{ij} \frac{1}{4\Delta\sigma m^2} (\dot{z}_{\frac{1}{2}} a_1a_0 - \dot{z}_{k\frac{1}{2}} a_{k+1}a_k) \end{aligned}$$

其中角码 0, 1, m, n, K, 1/2 均是边界标号。这就表示上式的求和仅与边界上的变量有关。适当选取边值条件时,这个求和为 0。

利用上一关系式,所得总动能变化

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &= \sum_{ijk} \frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g m^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 p_* + \frac{1}{2} v^2 p_* \right) \\ &= \frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g} \left[\sum_{ijk} \frac{1}{m^2} \left(u \frac{\partial}{\partial t} p_* u + v \frac{\partial}{\partial t} p_* v \right) - \sum_{ijk} \frac{1}{2 m^2} \left(u^2 \frac{\partial p_*}{\partial t} + v^2 \frac{\partial p_*}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g} \left[- \sum_{ijk} \frac{1}{m^2} \left(uL(u) + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial p_*}{\partial t} \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{ijk} \frac{1}{m^2} \left(vL(v) + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial p_*}{\partial t} \right) + \sum_{ijk} \frac{1}{m} fU(v - v_s) + \sum_{ijk} \frac{1}{m} fV(u_s - u) \right] \\ &= \frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g} \sum_{ijk} \frac{1}{m} f(Vu_s - Uv_s), \end{aligned}$$

总内能变化

$$\frac{\partial (P + I)}{\partial t} = - \sum_{ijk} \frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g m^2} \frac{\partial}{\partial t} (c_p p_* T) + \sum_{ij} \frac{\Delta x \Delta y}{g m^2} \phi_* \frac{\partial p_*}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g} \sum_{ijk} \frac{1}{m} \left[-L(c_p T + \phi) - \frac{1}{m} \langle \bar{\phi}^o \sigma \rangle_o \frac{\partial p_*}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. + \langle U f v_g - V f u_g \rangle \frac{p_*}{m} \right] + \frac{\Delta x \Delta y}{g} \sum_{ij} \phi_* \frac{\partial p_*}{\partial t} \frac{1}{m^2} \\
&\Rightarrow -\frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g} \sum_{ijk} \left[\frac{1}{m} \langle U f v_g - V f u_g \rangle \right] + \frac{\Delta x \Delta y}{g} \left(\sum_{ij} \frac{1}{m^2} \phi_* \frac{\partial p_*}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{ij} \frac{\phi_*}{m} \frac{\partial p_*}{\partial t} \right) = -\frac{\Delta x \Delta y \Delta \sigma}{g} \sum_{ijk} \left[\frac{1}{m} \langle U f v_g - V f u_g \rangle \right].
\end{aligned}$$

因此,总动能和总内能的变化

$$\frac{\partial}{\partial t} (P + I + K) = 0$$

附录2 插值公式推导

插值公式可以写成

$$\Phi_1 = A_1 \Phi$$

$$\Phi_2 = A_2 \Phi$$

其中

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_{1.5} \\ \phi_{1.5} \\ \phi_{1.5} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_{100} \\ \phi_{200} \\ \phi_{300} \end{pmatrix}$$

而 A_1 和 A_2 分别是插值系数矩阵,可得

$$\Phi_2 = A_2 A_1^{-1} \Phi_1$$

其中 A_1^{-1} 是 A_1 的逆矩阵,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_{k1} &= \frac{1}{\ln 1.7 \ln 4.25} \ln \left(\frac{\sigma_k}{500} P_* \right) \ln \left(\frac{\sigma_k}{200} P_* \right) \\
a_{k2} &= \frac{-1}{\ln 1.7 \ln 2.5} \ln \left(\frac{\sigma_k}{850} P_* \right) \ln \left(\frac{\sigma_k}{200} P_* \right) \\
a_{k3} &= \frac{1}{\ln 4.25 \ln 2.5} \ln \left(\frac{\sigma_k}{850} P_* \right) \ln \left(\frac{\sigma_k}{500} P_* \right)
\end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

$$A_2 A_1^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
b_{k1} &= \frac{1}{\ln \sigma_{k\frac{1}{2}}} \frac{\ln \frac{2k}{3} \ln \frac{2k}{5}}{\ln \frac{1}{3} \ln \frac{1}{5}} \\
b_{k2} &= \frac{1}{\ln \sigma_{k\frac{1}{2}}} \frac{\ln 2k \ln \frac{2k}{5}}{\ln 3 \ln \frac{3}{5}} \\
b_{k3} &= \frac{1}{\ln \sigma_{k\frac{1}{2}}} \frac{\ln 2k \ln \frac{2k}{3}}{\ln 5 \ln \frac{5}{3}}
\end{aligned}$$

$$(k = 1, 2)$$