第 2 卷 第 3 期 大 气 科 学 Vol. 2, No. 3
1978 年 9 月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Sept., 1978

气候标准序列变率

么枕生
(南京大学气象系)

提　　要

首先，综论已有气候序列变率的各种量数，提出气候标准序列变率和推导其与他种序列变率间的关系，以资比较．然后，推导了气候标准序列变率抽样分布的参数(平均数与方差)，并证明了在正态假设下这些参数的简化结果和气候标准序列变率抽样分布函数中的参数是一致的．这些是本文的重点．最后，应用气候标准序列变率的一些统计理论说明其在资料统计方面的实用价值，指出其优越性．气候标准序列变率不仅可以分析气候特征，它可以用于研究气候变迁与旱涝规律，以及用于气候统计予报．

一、气候序列变率的各种量数

一般所谓气候要素的序列变率(气候序列变率)就是气候记录序列的内部变率，是根据气候要素相邻记录间的离差统计的．这种变率不只和记录彼此间的大小有关，和其次序也有关系．这种序列变率可以包括时际变率、日际变率、季际变率与年际变率．气候序列变率现在已经提出许多量数．

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为气候要素观测的记录序列，气候要素的平均序列变率[1]或序列平均差(差分平均差)可用下列符号代表

$$U_\Delta = |\bar{\Delta}| = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} |\Delta_j|}{N-1} = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} |x_{j+1} - x_j|}{N-1} \tag{1}$$

此处N代表观测记录的数目；差分 $\Delta x_j (= x_{j+1} - x_j)$ 可简写为 Δ_j 或 Δ.

我们可以统计气候要素日际变化的标准差做为气候要素日际变率的量数[2]．用差分符号写出时，这就是Δ值的标准差

$$\tilde{S}_\Delta^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (\Delta_j - \bar{\Delta})^2 \tag{2}$$

而

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j \tag{3}$$

另一个气候序列变率的量数就是 1 阶自相关系数．在序列中不只邻近的要素值具有相关，某一日的要素值也可以和昨日以前许多日子的要素值具有相关．换句话说，在序列

* 1978 年 1 月 31 日收到修改稿。

中可以具有 2 阶以上的自相关．设 $\rho_k(k=1,2\cdots)$ 代表 k 阶自相关系数，则在遵守马尔科夫过程的条件下自相关系数可以按下面指数定律计算

$$\rho_k=\rho^k \tag{4}$$

有些作者也用气候要素值(连续日子同一观测时间的观测值或日平均值)的标准差 S 做为气候序列变率的量数．

我们知道，在式(1)中所以取绝对值，就是为了避免差分正负号的抵消影响．作者认为，用

$$S_\Delta=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N-1}(x_{j+1}-x_j)^2}{N-1}} \tag{5}$$

做为气候序列变率的量数，同样也可以避免差分正负号的抵消影响．现在称 S_Δ 为气候标准序列变率或序列标准差．U_Δ 和平均差一样，只是易于计算，具有实用价值，而序列方差(差分方差) S_Δ^2 则和方差一样，不只有实用价值，且可作抽样理论的探讨．我们也可以称 U_Δ 为差分平均差，S_Δ 为差分标准差．$\tilde{S}_\Delta$ 趋近于差分标准差．

在这里我们要指出的，就是平均差 U 与标准差 S 只可说明气候记录数列(不计记录出现的次序)的变化，而这里提出的差分平均差 U_Δ 与差分标准差 S_Δ 却可说明气候记录序列(考虑记录出现的次序)的变率．U 与 S 可以说是古典气候统计学中的重要统计量，而 U_Δ 与 S_Δ 就应是近代气候统计学的重要统计量．

现在利用上海 1955 年 6 月、7 月、7—8 月与 5—9 月每日最高温度计算上海 1955 年各时段内日际序列变率的各种量数列如表 1.

表1　上海 1955 年各时期最高温度的日际序列变率

	U_Δ	S_Δ	S	r	$S_{\|\Delta\|}$
6　月	2.58	3.10	3.71	0.6577	1.72
7　月	1.70	2.18	2.16	0.5429	1.37
7—8 月	1.28	1.70	1.89	0.5985	1.13
5—9 月	2.05	2.70	4.10	0.7373	1.75

二、气候标准序列变率与其他气候序列变率间的关系

因为 $\mathrm{Var}|\Delta_j|=E[|\Delta_j|^2]-E^2[|\Delta_j|]$，而 $E[|\Delta_j|^2]=E[\Delta_j^2]$，所以平均序列变率与标准序列变率间的关系可写为

$$E[\Delta_j^2]=E^2[|\Delta_j|]+\mathrm{Var}|\Delta_j| \tag{6}$$

或

$$\sigma_\Delta^2=E^2[|\Delta_j|]+\sigma_{|\Delta|}^2 \tag{7}$$

因为 $E[\Delta_j]=0$，而 $\sigma_\Delta^2=E[\Delta_j^2]$，式(6)或(7)说明标准序列变率较平均序列变率大．实际计算时，σ_Δ、$E[|\Delta_j|]$ 与 $\sigma_{|\Delta|}$ 可各代以估计量(样本值) S_Δ、U_Δ 与 $S_{|\Delta|}$，即 $\sigma_\Delta\approx S_\Delta$，$E[|\Delta_j|]\approx U_\Delta$，$\sigma_{|\Delta|}\approx S_{|\Delta|}$．其次

$$\sigma_\Delta^2 = \mathrm{Var}\,\Delta_j = \mathrm{Var}\,[x_{j+1} - x_j] = 2\sigma^2(1-\rho) \tag{8}$$

实际计算时，设 $\sigma \approx S$, $\rho \approx \gamma$，此处 S 为样本标准差，γ 为样本相关系数．如 $\rho = 0$，则 $\sigma_\Delta^2 = 2\sigma^2$．因此，如 $\frac{1}{N-1}\Sigma(x_{j+1}-x_j)^2 = \frac{2}{N}\Sigma(x-\bar{x})^2$，则我们可以断定 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 虽是随机变数[2]，但不一定是独立随机变数．

因为 Δ 是正态分布的，所以 U_Δ 也是正态分布．现在为方便起见，把 Δ_j 简写为 Δ 去代表随机变数．于是，平均序列变率的数学期望值为

$$E[U_\Delta] = E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}|\Delta_j|\right] = E[|\Delta|] = 2\sigma\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}} \tag{9}$$

式(6)或(7)、(8)与(9)就是各种气候序列变率量 σ_Δ、$E[|\Delta|]$、ρ 与 σ 间的关系．根据这些关系可以相互计算气候要素的各种序列变率．

最后，我们还可以证明，如样本大，则 S_Δ^2 与 $\tilde{S}_\Delta^2$ 的数学期望值渐近相等．

$$E[\tilde{S}_\Delta^2] = E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}(\Delta_j - \bar{\Delta})^2\right] = \sigma_\Delta^2 - \sigma_{\bar{\Delta}}^2 \sim \sigma_\Delta^2 \tag{10}$$

因为当 $N \to \infty$ 时，则 $\sigma_{\bar{\Delta}}^2$ 趋于零．因为 $E[\Delta_j] = 0$，所以这个结论直接从定义方程式(2)与(5)也可以求得．

Klein[3] (1951) 研究北半球海平面与高空每日气压的变率时，曾推导出式 (8) 的关系，虽然其形式和式(8)是不一样的．Rosenthal[4] (1959) 也曾推导 $|\Delta|$ 与 σ 的关系，不过其推导方法具有不必要的繁琐．

三、气候标准序列变率抽样分布的参数

我们在这里所指的抽样分布就是气候序列变率的抽样分布．为了推导气候标准序列变率抽样分布的参数，需要序列内部的矩与协方差．

关于矩的符号说明如下：我们在原序列中区分出两个序列，即 $x_1, x_2 \cdots x_{N-1}$ 与 $x_2, x_3 \cdots, x_N$．用 m_p 代表某一变量 (x_j 或 x_{j+1}, $j = 1, 2 \cdots, N-1$) 对于平均数的矩，其阶为 p．用 m'_{pk} 与 m_{pk}($p, k = 0, 1 \cdots$) 分别代表二变量对于原点与对于平均数的积矩，其阶为 $p+k$．相应的总体矩各用 μ_p, μ'_{pk} 与 μ_{pk} 代表．$\bar{x}$ 与 μ 分别代表样本平均数与总体平均数．如果序列不太短，则写如 $m'_{10} = m'_{01} = \bar{x}$．

1. S_Δ^2 的抽样分布参数

S_Δ^2 的平均数为

$$E[S_\Delta^2] = E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}(x_{j+1}-x_j)^2\right] = 2\mu'_{20} - 2\mu^2 - 2\mu_{11} = 2\sigma^2(1-\rho) \tag{11}$$

这里 $\mu'_{20} = \mu'_{02}$．

为了推导 S_Δ^2 的抽样分布参数，我们可以先把 S_Δ^2 变换成矩的函数，然后推求．

$$S_\Delta^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}(x_{j+1}-x_j)^2 = m'^2_{10} + m_{20} - 2(m'_{10}m'_{01} + m_{11}) + m'^2_{01} + m_{02}$$

如记录长，则 m'_{10} 与 m'_{01} 几近相等．于是，我们可设 $(m'_{10} - m'_{01})^2 = 0$，而 $m'^2_{10} + m'^2_{01} =$

$2m'_{10}m'_{01}$.

因此

$$S_{\Delta}^2 = m_{20} + m_{02} - 2m_{11} \tag{12}$$

在 $m_{20} = \mu_{20}$, $m_{02} = \mu_{02}$, $m_{11} = \mu_{11}$ 的附近，式(12)的函数是连续的，且此函数对于变量 m_{20}, m_{02} 与 m_{11} 具有连续的导数. 此外，S_{Δ}^2 是有限的. 因此，我们可以根据求随机变数函数的数学期望与方差的方法[5]证明下列关系：

$$E[S_{\Delta}^2] = \mu_{20} + \mu_{02} - 2\mu_{11} + O\left(\frac{1}{n}\right) = 2\sigma^2(1-\rho) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{13}$$

与

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_{\Delta}^2 = {}& \left(\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{20}}\right)^2 \operatorname{Var} m_{20} + \left(\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{02}}\right)^2 \operatorname{Var} m_{02} + \left(\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{11}}\right) \operatorname{Var} m_{11} + 2\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{20}}\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{02}} \operatorname{Cov}[m_{20}, m_{02}] \\ & + 2\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{20}}\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{11}} \operatorname{Cov}[m_{20}, m_{11}] + 2\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{02}}\frac{\partial S_{\Delta}^2}{\partial m_{11}} \operatorname{Cov}[m_{02}, m_{11}] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

此处 $n = N - 1$. 式中偏导数是在 $m_{20} = \mu_{20}$, $m_{02} = \mu_{02}$, $m_{11} = \mu_{11}$ 点的偏导数.

可知式(13)是和式(11)相符合的.

此外，在一般概率论中已经证明：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Var} m_{20} &= \frac{1}{n}(\mu_{40} - \mu_{20}^2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \operatorname{Var} m_{02} &= \frac{1}{n}(\mu_{04} - \mu_{02}^2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \operatorname{Var} m_{11} &= \frac{1}{n}(\mu_{22} - \mu_{11}^2) \\ \operatorname{Cov}[m_{20}, m_{02}] &= \frac{1}{n}(\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{02}) \\ \operatorname{Cov}[m_{20}, m_{11}] &= \frac{1}{n}(\mu_{31} - \mu_{20}\mu_{11}) \\ \operatorname{Cov}[m_{02}, m_{11}] &= \frac{1}{n}(\mu_{13} - \mu_{02}\mu_{11})\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

把式(15)代入式(14)，则求得

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_{\Delta}^2 &= \frac{1}{n}(\mu_{40} - \mu_{20}^2) + \frac{1}{n}(\mu_{04} - \mu_{02}^2) + \frac{4}{n}(\mu_{22} - \mu_{11})^2 \\ &\quad + \frac{2}{n}(\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{02}) - \frac{4}{n}(\mu_{31} - \mu_{20}\mu_{11}) - \frac{4}{n}(\mu_{13} - \mu_{02}\mu_{11}) \\ &= \frac{1}{n}\{\mu_{40} + 6\mu_{22} + \mu_{04} + 4\mu_{11}(\mu_{20} + \mu_{02}) - 4(\mu_{31} + \mu_{11}^2 + \mu_{13}) \\ &\quad - (\mu_{20} + \mu_{02})^2\} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

如果总体具有正态分布，那么我们可以知道[6]

$$\begin{gathered}\mu_{22} = (1 + 2\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2, \quad \mu_{11} = \rho\sigma_1\sigma_2, \quad \mu_{20} = \sigma_1^2, \quad \mu_{02} = \sigma_2^2 \\ \mu_{40} = 3\sigma_1^4, \quad \mu_{04} = 3\sigma_2^4, \quad \mu_{31} = 3\rho\sigma_1^3\sigma_2, \quad \mu_{13} = 3\rho\sigma_1\sigma_2^3\end{gathered} \tag{17}$$

此外 σ_1 与 σ_2 分别代表第一序列 $x_1, x_2\cdots, x_{N-1}$ 与第二序列 $x_2, x_3\cdots, x_N$ 的总体标准差.把式(17)代入式(16),则求得

$$\operatorname{Var} S_\Delta^2 \sim \frac{2}{n}\{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2 - 4\rho\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)\} \tag{18}$$

在我们讨论的情况下,$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, 所以

$$\operatorname{Var} S_\Delta^2 \sim \frac{8}{n}(\sigma^4-2\rho\sigma^4+\rho^2\sigma^4)=\frac{8\sigma^4(1-\rho)^2}{n} \tag{19}$$

因此,如气候要素是正态分布的,则式(19)较式(16)简便得多,易于计算.因为 $\sigma_\Delta^2 = 2\sigma^2(1-\rho)$, 所以由式(19)可以求得

$$\operatorname{Var} S_\Delta^2 \sim \frac{2\sigma_\Delta^4}{n} \tag{20}$$

这个结果是和正态分布条件下方差 S^2 的抽样方差近似结果相对应的.

由式(13)与(17)可以知道,在正态分布的条件下,S_Δ^2 的平均数仍具有式(13)的形式.

2. S_Δ 的抽样分布参数

我们根据与式(13)和(14)相仿的关系可以求得

$$E[S_\Delta]=(\mu_{20}+\mu_{02}-2\mu_{11})^{\frac{1}{2}}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt{2(1-\rho)}\sigma+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{21}$$

与

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_\Delta = &\frac{\mu_{40}-\mu_{20}^2}{4n(\mu_{20}+\mu_{02}-2\mu_{11})}+\frac{\mu_{04}-\mu_{02}^2}{4n(\mu_{20}+\mu_{02}-2\mu_{11})}\\ &+\frac{\mu_{22}-\mu_{11}^2}{n(\mu_{20}+\mu_{02}-2\mu_{11})}+\frac{\mu_{22}-\mu_{20}\mu_{02}}{2n(\mu_{20}+\mu_{02}-2\mu_{11})}\\ &-\frac{\mu_{31}-\mu_{20}\mu_{11}}{n(\mu_{20}+\mu_{02}-2\mu_{11})}-\frac{\mu_{13}-\mu_{02}\mu_{11}}{n(\mu_{20}+\mu_{02}-2\mu_{11})}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\ =&\frac{\mu_{40}+6\mu_{22}+\mu_{04}+4\mu_{11}(\mu_{20}+\mu_{02})-4(\mu_{31}+\mu_{11}^2+\mu_{13})-(\mu_{20}+\mu_{02})^2}{4n(\mu_{20}-2\mu_{11}+\mu_{02})}\\ &+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

S_Δ 的平均数还可以由式(22)推导如下

$$\begin{aligned}E[S_\Delta]&=[E[S_\Delta^2]-\operatorname{Var} S_\Delta]^{1/2}=\left[2\sigma^2(1-\rho)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1/2}\\ &=\sqrt{2(1-\rho)}\sigma+O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

这个结果是和式(21)相符合的.

如总体具有正态分布,则由式(22)求得

$$\operatorname{Var} S_\Delta \sim \frac{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}{2n} \tag{24}$$

在我们讨论的情况下,$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, 所以

$$\operatorname{Var} S_\Delta \sim \frac{\sigma^2-\rho\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}(1-\rho) \tag{25}$$

因此，如气候要素是正态分布的，则式(25)较式(22)非常简便，易于计算．式(22)可应用于计算任何型式样本记录的 $\mathrm{Var}\,S_\Delta$．因为 $\sigma_\Delta^2 = 2\sigma^2(1-\rho)$，所以由式(25)可以求得

$$\mathrm{Var}\,S_\Delta \sim \frac{\sigma_\Delta^2}{2n} \tag{26}$$

这个结果是和正态分布条件下标准差 S 的抽样方差近似结果相对应的．同时，我们根据式(20)与(26)称标准序列变率 S_Δ 为差分标准差是有根据的．

由式(21)与(17)可以知道，在正态分布的条件下，S_Δ 的平均数仍具有式(21)的形式．在正态分布的情况下，S_Δ 的平均数根据式(26)为

$$E[S_\Delta] \sim \sqrt{\sigma_\Delta^2 - \frac{\sigma_\Delta^2}{2n}} = \sqrt{1-\frac{1}{2n}}\,\sigma_\Delta \tag{27}$$

如 $n\to\infty$，则式(27)根据式(8)可以写如

$$E[S_\Delta] = \sqrt{2\sigma^2(1-\rho) + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{2(1-\rho)}\sigma + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{28}$$

因此，在正态分布条件下推导的 $E[S_\Delta]$ 仍和式(21)或式(23)相同的．

利用上海 1955 年逐日各种气候要素，根据式(22)计算结果列如表 2．

表 2　上海 1955 年各种气候要素日际标准序列变率的标准误差

	6　月	7　月	7—8月	5—9月
最高温度	0.3689	0.2735	0.1761	0.1453
最低温度	0.1439	0.2818	0.1421	0.1131
相对湿度	1.0221	0.5109	0.2383	0.5460

利用表 1 中的资料，根据式(25)计算上海 1955 年 6 月、7 月、7—8 月与 5—9 月最高温度日际标准序列的标准误差如下：

6 月	7 月	7—8 月	5—9 月
0.3962	0.2617	0.1523	0.1689

可知这个结果已经很接近于表 2 中的计算结果．这也说明上海 7 月逐日最高温度是接近于正态分布的．

四、气候标准序列变率的抽样分布

在我们统计序列方差 S_Δ^2 的样本中，各个原变数 $x_1, x_2\cdots, x_N$ 虽可认为具有同一分布(统计时期具有相似天气形势)，但彼此不是独立的，特别日际序列变化如此．但是，我们可以认为 Δ_j 彼此是独立的(所谓独立增量)，而且是正态分布的，所以计算 S_Δ^2 的样本可以说是随机样本，并且 S_Δ^2 的抽样分布和 S^2 分布一样是 Γ 分布 (Pearson III 型分布)或 χ^2 分布．根据式(5)我们可写出

$$\frac{nS_\Delta^2}{\sigma_\Delta^2} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_j}{\sigma_\Delta}\right)^2 \tag{29}$$

此处 $n = N - 1$，N 代表观测记录的数目，σ_Δ^2 代表差分序列 Δx_1，$\Delta x_2 \cdots$，Δx_n 的总体方差．根据上面知道，$\Delta x_1/\sigma_\Delta$，$\Delta x_2/\sigma_\Delta \cdots\cdots$，$\Delta x_n/\sigma_\Delta$ 代表 n 个独立的随机变数，各个随机变数都是正态的，其参数为 $(0,1)$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_i}{\sigma_\Delta}\right)^2 = \frac{nS_\Delta^2}{\sigma_\Delta^2}$ 具有 χ^2 分布，其自由度数目为 n．

根据变换 χ^2 分布可以求得 S_Δ^2 的抽样分布是 Γ 分布，其两个参数为 $\frac{1}{2}n$ 与 $\frac{2\sigma_\Delta^2}{n}$．更根据这两个参数直接求得 S_Δ^2 的平均数与方差各为

$$E[S_\Delta^2] = \frac{1}{2}n \cdot \frac{2\sigma_\Delta^2}{n} = \sigma_\Delta^2 = 2\sigma^2(1-\rho) \tag{30}$$

与

$$\mathrm{Var}\, S_\Delta^2 = \frac{1}{2}n\left(\frac{2\sigma_\Delta^2}{n}\right)^2 = \frac{2\sigma_\Delta^4}{n} = \frac{8\sigma^4(1-\rho)^2}{n} \tag{31}$$

此处 σ^2 代表原记录序列 x_1，$x_2 \cdots\cdots$，x_N 的总体方差．我们知道，根据中心极限定理可以证明当 $n \to \infty$ 时，则 Γ 分布趋近于正态分布，所以式(30)与(31)分别和式(13)与(19)是完全符合的．

五、气候标准序列变率抽样分布中参数的估计与假设检验

设 $S_{\Delta,1}^2$，$S_{\Delta,2}^2 \cdots\cdots$，$S_{\Delta,k}^2$ 为相应于 k 个序列方差计算值的 k 个随机变数，于是根据使似然函数成为极大的方法，可求得 σ_Δ^2 的极大似然估计量为

$$\hat{\sigma}_\Delta^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_{\Delta,i}^2 = \frac{1}{k}(S_{\Delta,1}^2 + S_{\Delta,2}^2 \cdots\cdots + S_{\Delta,k}^2) \tag{32}$$

根据式(32)去计算极大似然估计量 $\hat{\sigma}_\Delta^2$ 还是比较麻烦，不过在大样本的条件下可用式(5)计算．因为

$$\mathrm{Var}\, \hat{\sigma}_\Delta^2 = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_{\Delta,i}\right] = \frac{2\sigma_\Delta^4}{kn} \tag{33}$$

所以根据式(31)与(33)可知：当 $n \to \infty$，则 $\mathrm{Var}\, S_\Delta^2 \approx \mathrm{Var}\, \hat{\sigma}_\Delta^2 \to 0$ 因此，如样本大，则式(5)的计算值就是 σ_Δ 的极大似然估计值．因为当 $n \to \infty$，$\hat{\sigma}_\Delta^2 \to \sigma_\Delta^2$，所以用 S 与 γ 计算式(13)、(21)或(30)的估计值在大样本的条件下也就是 σ_Δ^2 的极大似然估计值．

因为 $nS_\Delta^2/\sigma_\Delta^2$ 具有 χ^2 分布，其自由度数目为 n，所以 σ_Δ^2 的置信区间可用下式规定

$$P\left(S_\Delta^2 \frac{n}{\chi^2_{.975}} < \sigma_\Delta^2 < S_\Delta^2 \frac{n}{\chi^2_{.025}}\right) = 0.95 \tag{34}$$

在表 3 中计算了上海 1955 年 6 月、7 月、7—8 月与 5—9 月逐日最高温度、最低温度与相对湿度的标准序列变率以及数学期望值的 0.95 置信限．表 3 中的结果可以说明统计理论中一个熟知的结论，即许多统计量的抽样分布，当样本增大时都趋近于正态分布或恰为正态分布．

我们已经知道，S_Δ^2 的抽样分布是 Γ 分布，其两个参数为 $\frac{1}{2}n$ 与 $\frac{2\sigma_\Delta^2}{n}$．现在我们认为

表 3　上海 1955 年各种气候要素在各种时段内的日际标准序列变率以及数学期望值的 0.95 置信限

	最高温度				最低温度				相对湿度			
	标准序列变率		标准序列变率 σ_Δ 的 0.95 置信限		标准序列变率		标准序列变率 σ_Δ 的 0.95 置信限		标准序列变率		标准序列变率 σ_Δ 的 0.95 置信限	
	S_Δ	$\hat{\sigma}_\Delta$	正态分布	χ^2 分布	S_Δ	$\hat{\sigma}_\Delta$	正态分布	χ^2 分布	S_Δ	$\hat{\sigma}_\Delta$	正态分布	χ^2 分布
6　月	3.10	3.07	2.38<3.82	2.47<4.18	1.13	1.12	0.85<1.41	0.90<1.52	8.54	8.44	6.54<10.54	6.81<11.51
7　月	2.18	2.06	1.64<2.72	1.74<2.91	1.54	1.55	0.99<2.09	1.23<2.06	5.12	5.10	4.12<6.12	4.09<6.84
7—8月	1.70	1.69	1.35<2.05	1.45<2.07	1.26	1.28	0.98<1.54	1.07<1.53	4.79	4.85	43.2<5.26	4.07<5.82
5—9月	2.70	2.97	2.42<2.98	2.43<3.05	1.56	1.57	1.34<1.78	1.40<1.76	7.03	7.05	5.96<8.10	6.32<7.93

参数 $\frac{1}{2}n$ 已经知道，以 $\frac{nS_\Delta^2}{\sigma_\Delta^2}=\chi^2$ 为检验函数，用单尾检验去检验原假设

$$H_0: \sigma_\Delta^2 = \hat{\sigma}_\Delta^2$$

反对备择假设

$$H_1: \sigma_\Delta^2 > \hat{\sigma}_\Delta^2, \quad \sigma_\Delta^2 < \hat{\sigma}_\Delta^2$$

这里 $\hat{\sigma}_\Delta^2$ 是 σ_Δ^2 的估计量．和这两种单侧备择假设相应的临界区域（大小为 α）各为 $\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}$，与 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{\alpha,n}$．例如，我们可以求得上海 7 月逐日最高温度序列方差 σ_Δ^2 的估计值为 $\hat{\sigma}_\Delta^2 = 2.06^2 = 4.24$（见表 3）；根据上海 1955 年 7 月逐日最高温度所计算的日际标准序列变率 S_Δ 为 2.18（见表 3），所以 $\chi^2 = \frac{30 \times 2.18^2}{2.06^2} = 33.6$．此值小于 $\chi_{.95,30} = 43.8$，而大于 $\chi^2_{.05,30} = 10.8$，所以如选定显著性水平 $\alpha = 0.05$，则原假设必须接受．因此，我们认为，2.06 可以相当精确地设为总体值 σ_Δ 去计算上海 7 月最高温度日际序列方差的概率分布，同时这个计算结果也充分说明：根据 σ^2 与 ρ 的估计量用式(30)计算 σ_Δ^2 的估计值是相当精确的．

六、气候标准序列变率的实用价值

我们知道，气候要素在某一天、一个月或一年的数值并不能说明一般气候特征，而是这些资料的长期平均值才能说明其气候规律，气候要素的时际与日际序列变率也是这样．因为计算这样序列变率的平均值较为麻烦，所以这里提出间接计算气候标准序列变率平均值的公式(13)、(21)或(30)．如样本大，季际与年际序列变率也可用这一公式计算较为方便．

我们知道，气候序列变率的精度越大，其统计值就越接近于总体平均数，也就是数学期望值的置信区间越小．如气候序列变率的统计值和数学期望值相差过远，就说明气候序列变率统计值的精度过小，一旦记录年分加多或时段加长，其统计结果还有出入．因此，计算气候序列变率时，标准误差以及置信区间与假设检验的统计是十分必要的．否则不但不足以说明问题，而且还可能引出错误的结论．气候标准序列变率所以比平均序列变率优越，就是不仅前者的精度比后者高 12% 以上，而且前者可以满足这样的要求．

如 S_Δ^2 的精度已经给定，那末对某种一定变化性的记录就可以根据下列式子确定应采用统计时段的长短：

$$\left|\frac{S_\Delta^2-\sigma_\Delta^2}{\sqrt{\frac{8}{n}}\sigma^2(1-\rho)}\right|\geqslant 1.96 \tag{35}$$

这是因为 S_Δ^2 的抽样分布趋近于正态的. 我们可以问：如用 0.95 或更好的置信限，使样本值 S_Δ^2 代替 σ_Δ^2 的精度达到 ± 0.3，即 $P(|S_\Delta^2-\sigma_\Delta^2|<0.3)\geqslant 0.95$，那末我们在上海计算 7 月最高温度日际标准序列变率时，所利用的资料年数应有多少？我们根据式(35)计算结果指出：在上海必须至少利用 50 年资料去计算这样的标准序列变率才能达到上面规定的精度. 如用平均序列变率的统计值去达到同样精度，就必须要有 57 年的资料. 同时，这也说明有些作者只利用几年资料计算日际变率去分析气候一般规律，其误差是很大，尤其在较高纬度上如此.

气候标准序列不仅是分析气候变化较为完善的指标，而且也是气候予报的有用工具. 气候标准序列变率不只可以说明天气气候规律，更可以根据式(5)用不同的差分计算 S_Δ^2，然后利用方差分析计算周期，直接做好气候予报. 此外，多重回归予报方程的精度在一定的资料条件下除和予报因子的筛选手续有关外，更重要的是和予报量的序列变率大小有关. 我们最好在建立予报方程以前就应根据现有样本大小，注意予报量的变率，以便事先考虑予报效果. 统计予报还有予报效果不稳定问题. 影响予报方程不稳定的重要原因就是予报量的序列变率因有抽样振动是不稳定的. 因此，我们应在建立回归方程以前就对予报量计算标准序列变率的抽样方差，以便计算要有多长记录才能求得一个达到某种标准的稳定予报方程.

参 考 资 料

[1] V. Conrad, and L. W. Pollak, Methods in Climatology, Cambridge, Mass., 1950.
[2] C. Levert, Meteorologische und Statistische Betrachtungen über die interdiurne Veränderlichkeit, Arch. Met. Geoph. Biokl. B., Bd. 10, 1960, H. 3, 412.
[3] W. H. Klein, A hemispheric Study of daliy pressure variability at sea level and aloft, *J. Meteor.* 1951, 8, 332.
[4] S. L. Rosenthal, Note on the interdiurnal variability of meteorological elements, *J. Meteor.*, 1959, 16, 691.
[5] H. Cramer, Methematical Methods of Statistics, Stockholm and Princeton, 1946.
[6] M. G. Kendal and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, London, 1958.