

大气湍流的湍谱及有关大气污染问题

刘 振 兴

提 要

湍流运动是自然界和许多技术领域中出现普遍现象。大气中所发生的许多现象都与湍流运动有关。但到目前为止,湍流理论的发展还很不完善。特别是在大气或海洋中存在的大尺度湍流的湍谱理论就更不完善。

本文根据大量实测的湍谱数据(包括在风洞中、大气和宇宙空间中)反应出的湍谱分布规律,提出了一个描述湍流特性的无因次量 R_i ($R_i = D/\nu$, D 为湍流粘性系数, ν 为动力粘性系数),并用此无因次量对谱区作了划分。从高 R_i 数到低 R_i 数共分为三个谱区包括六个谱段。利用无因次量和相似性原理确定了适用于各谱区的能量传输函数的普遍形式,从而求解湍谱方程,得出了湍谱的普遍形式的解,其中包括了过去已有的两个主要结果。我们还求出了大气温度场和与大气污染有关的微粒浓度的湍谱。经与实测数据比较,发现两者符合得较好。

一、引 言

湍流能谱是湍流理论中的一个重要问题,它在许多工程技术和学科领域中得到了广泛的应用。湍谱理论的分析是以 Taylor 开始的。通过富利叶变换,可将物理空间中的速度关联方程变为湍谱空间中的湍谱方程。自本世纪的四十年代初,许多流体力学工作者都一直想求解这个方程^[1-7]。由于方程组是不闭合的,必须引入相似性或辅助假定才能得出确定的解。有关这方面的综合报导可参考文献^[8,9]。由于数学上的困难,致使这方面的理论在近二十年来发展迟缓。

近十多年来周培源教授及其助手们对均匀各向同性湍流理论作了一些有价值的工作^[10-13]。

近年来的观测事实表明:湍谱的分布是相当宽的,最大波数和最小波数相差七个量级(见本文中的实验数据),而且在不同谱段湍谱分布有明显的不同。我们提出了一个描述湍流运动特性的无因次量 R_i ,它定义为 $R_i = D/\nu$,这里 D 为湍流粘性系数, ν 为动力粘性系数。以 R_i 为标准,除最大的能量涡旋外,对其余全部谱区作了划分,并从物理上分析了各不同谱区间能量传输特性。利用相似性原理和无因次量 R_i ,确定了适用于各不同谱区的湍谱方程,并企图得出适合各谱区的能谱函数的普遍解。

二、描述湍流运动的基本物理量及谱区的划分

我们认为在不同谱区,描述湍流的基本特征量(如特征长度、特征速度和特征时间)是不同的。对于小尺度湍流(如本文中所划分的过渡区和亚耗散区),湍流特性决定于柯尔莫果洛夫提出的两个基本物理量:一是在单位时间内单位质量流体的平均能量耗散率 ε (它决定着不同尺度的涡旋串级能量强度;另一个是动力粘性系数 ν (它是耗散过程的基本因素)。由因次分析,可以得出小尺度湍流的特征速度 v 和特征长度 y 以及特征时间 τ

$$v = (\varepsilon \mu)^{1/4} \quad (2.1a)$$

$$y = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (2.1b)$$

$$\tau_y = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (2.1c)$$

对于大尺度湍流(内惯性区和外惯性区),描述湍流运动特性的基本物理量是湍流粘性系数 D_e 和平均能量耗散率 ε 。由此也可组成这一谱区的特征速度 U_e 、特征长度 L_e 和特征时间 τ_e 。

$$U_e = (\varepsilon D_e)^{1/4} \quad (2.2a)$$

$$L_e = \left(\frac{D_e^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (2.2b)$$

$$\tau_e = \left(\frac{D_e}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (2.2c)$$

对于最大尺度的湍流,特征长度是 $L_0 = (D_0/\varepsilon)^{1/4}$, 特征速度是 $U = (\varepsilon D_0)^{1/4}$ (D_0 是最大尺度湍流的湍流粘性系数)。因这一最大尺度的能量涡旋不符合均匀各向同性的假定,本文不作讨论。

根据以上的分析,我们可以写出涡旋尺度 r , 湍流脉动速度 u 和湍流脉动时间 τ 的表达式

$$r = \left(\frac{D(r)^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (2.3a)$$

$$u = [\varepsilon D(r)]^{1/4} \quad (2.3b)$$

$$\tau = \left[\frac{D(r)}{\varepsilon} \right]^{1/2} \quad (2.3c)$$

这里 $D(r)$ 表示对应于湍流尺度 r 的湍流粘性系数。引入一个重要的描述湍流运动特性的无因次量 R_i , 它定义为

$$R_i(r) = \frac{D(r)}{\nu} = \frac{ru}{\nu} \quad (2.4)$$

这一无因次量可将不同谱区的基本物理量联系起来。由 (2.1b) 和 (2.3a) 可写出

$$R_i(r) = \left(\frac{r}{y} \right)^{4/3} = \frac{D(r)}{\nu} \quad (2.5a)$$

或

$$R_i(k) = \left(\frac{k}{k_y} \right)^{-4/3} = \frac{D(k)}{\nu} \quad (2.5b)$$

这里 k 为波矢, $k = \frac{1}{r}$, $k_y = \frac{1}{y}$

根据实测的湍谱分布,并结合物理上的分析,以 $R_i(k)$ 为标准,对谱区进行了划分。除了最大一级的涡旋外,从小波数到大波数依次划分为三个谱区(包括六个谱段): i) 惯性区(又分为外惯性段、内惯性段和亚惯性段); ii) 过渡区; iii) 耗散区(又分亚耗散段和耗散段)。划分结果见图 3。现对不同波区的湍流运动特性作一概述。

1. 惯性区 这是湍谱中最宽的一段, R_i 从 50 一直到 10^8 。这表明在整个惯性区中湍流粘性系数 D 远大于动力粘性系数 ν , 粘性耗散可以忽略不计, 能量传输过程只取决于 D 和 ε 。

2. 过渡区 此区是介于惯性区和耗散区之间的过渡区域, 粘性耗散已不可忽略, 但湍流运动特性仍取决于 ε 和 D 。

3. 耗散区 分为两个谱段, 这两个谱段的湍流特性有所不同。

(1) 亚耗散区。此谱段 $R_i \approx 1$, $D \approx \nu$ 。粘性耗散已比较显著。湍流特性取决于 ε 和 ν , 因为此谱段较窄, D 与 ν 相接近, 可用 ν 代替 D 。总之, 以上各谱段的湍流特性, 都可通过无因次参数 $R_i = D/\nu$ 来描述。

(2) 耗散区。此谱段内的 R_i 数已远小于 1, 即 $\nu \gg D$, 已呈现出片流运动的特性, 湍流动能在此谱段内全部耗散为热能, 故在此谱段内的湍流运动特性主要取决于动力粘性系数 ν 。

三、湍谱方程及解

对于各向同性湍流, 湍谱方程是一个标量方程^[5]

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) \quad (3.1)$$

式中 $E(k, t)$ 为能谱函数, $T(k, t)$ 为能谱转移函数, 它表示从低波数区向高波数区传输的能量。(3.1) 式右端第二项表示粘性引起的能量耗散。湍谱方程和速度关联方程一样, 是一个不闭合的方程, 在方程中必须引入相似性或辅助假定, 才能获得确定的解。

下面确定 $T(k, t)$ 的形式。引入一个能量传输率函数 $\nu_k(k)$, 并用 $\nu_k(k)$ 来描述不同波数 k 之间的能量传输过程。设想能谱元素连续地从低波数区传向高波数区, 初始在时间为 τ 波数为 k 的谱元素, 在时间为 $\tau + \Delta\tau$ 时传到 k' 。因此, $\nu_k(k)$ 应表示为在湍谱空间中的速率。如用 $S(k, t)$ 表示总的(对所有波数 k 而言)能通量, 则有

$$S(k, t) = \int_k^\infty T(k, t) dk \quad (3.2)$$

故得

$$T(k, t) = - \frac{\partial}{\partial k} [E(k, t) \nu_k(k)] \quad (3.3)$$

将(3.3)式代入(3.1)式,湍谱方程可写成

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial k} [E(k, t) v_k(k)] - 2\nu k^2 E(k, t) \quad (3.4)$$

下面我们确定从外惯性区到亚散区普遍适用的 $v_k(k)$ 形式。 $v_k(k)$ 表示在波谱空间中能量传输的速率。按这一定义,在波矢 k 处能量传输的平均速率可以写成

$$v_k(k) = \alpha^{-1} \frac{k}{\tau}$$

这里比例常数 α 为柯尔莫果洛夫常数,可由实验确定。 τ 为对应的湍流脉动时间,由(2.3c) 可将上式写成

$$v_k(k) = \alpha^{-1} \left[\frac{\varepsilon}{D(k)} \right]^{1/2} k^{1/3} \quad (3.5)$$

按前面的论述,在外惯性区取 $D = D_c = \text{常数}$,将 $v_k(k)$ 用 $v_k^{(1)}(k)$ 表示

$$v_k^{(1)}(k) = \alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} k \quad (3.6)$$

如从亚惯性区到亚耗散区的 $v_k(k)$ 用 $v_k^{(2)}(k)$ 表示,由(2.5b) 式和(3.5)式可得

$$v_k^{(2)}(k) = \alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{k}{k_y} \right)^{2/3} k \quad (3.7)$$

从外惯性区到亚耗散区 $v_k(k)$ 的普遍形式应是 $v_k^{(1)}(k)$ 加 $v_k^{(2)}(k)$, 故有

$$v_k(k) = \alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y} \right)^{2/3} \right] k \quad (3.8)$$

将(3.8)式代入(3.4)式,可将湍谱方程写成

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial k} \left\{ \alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y} \right)^{2/3} \right] k E(k, t) \right\} + 2\nu k^2 E(k, t) \quad (3.9)$$

(3.9)式为一阶线性偏分方程,对应的常微分方程组是

$$\frac{dk}{dt} = \alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} (a + b k^{2/3}) k \quad (3.10)$$

$$\frac{dE(k, t)}{dt} = - \left[\alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \left(a + \frac{5}{3} b k^{2/3} \right) + 2\nu k^2 \right] E(k, t) \quad (3.11)$$

式中 $a = \left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3}$, $b = k_y^{-2/3}$

将以上两式积分即可求出 $E(k, t)$ 的解。

因为目前观测的湍谱,都是与时间无关的平衡谱。为了便于将理论结果与观测数据进行比较,我们不求包含时间 t 的显函数形式。由(3.10)和(3.11)两式消去 dt 即得

$$\frac{dE(k)}{dk} = - \frac{\left[\alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \left(a + \frac{5}{3} b k^{2/3} \right) + 2\nu k^2 \right] E(k)}{\alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} (a + b k^{2/3}) k} \quad (3.12)$$

1) 这一表达形式还可从另外的途径求得。

对(3.12)积分可得如下形式的解

$$E(k) = \frac{Nk^{-1}}{\left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3}\right]} \exp \left\{ -3\alpha \left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3} \right]^2 - 2\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} \left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3} \right] + \left(\frac{k_c}{k_y}\right)^2 \ln \left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3} \right] \right\} \quad (3.13)$$

式中 $N = \text{常数}$, $N = \alpha(\varepsilon\nu)^{1/2}$. 可以证明(3.13)与(3.9)的定常解在形式上是完全一样的.

利用湍谱函数的普遍解, 可以分解出各不同谱区的湍谱函数的分布形式. 根据湍谱的实验数据我们取 $\frac{k_c}{k_y} = 10^{-4}$.

对于外惯性区 $\left(\frac{k}{k_y} \ll 10^{-4}\right)$

$$E(k) = \alpha(\varepsilon D_c)^{1/2} k^{-1} \quad (3.14)$$

对于内惯性区 $\left(10^3 < \frac{k}{k_y} < 10^4\right)$

$$E(k) = \frac{\alpha(\varepsilon\nu)^{1/2} k^{-1}}{\left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3}\right]} \quad (3.15)$$

对于亚惯性区 $\left(10^{-4} < \frac{k}{k_y} < 5 \times 10^{-2}\right)$

$$E(k) = \alpha(\varepsilon\nu)^{1/2} k_y^{2/3} k^{-5/3} = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.16)$$

这一结果与柯尔莫果洛夫的结果完全一致.

对于过渡区 $\left(5 \times 10^{-2} < \frac{k}{k_y} < 1\right)$

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{2} \alpha \left(\frac{k}{k_y}\right)^{4/3} + 2 \left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3} \right] \quad (3.17)$$

如在(3.17)式中忽略 $2 \left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3}$ 项, 即得文献^[14]中的结果.

对于亚耗散区 $\left(R_t \approx 1, \frac{k}{k_y} \approx 1\right)$

湍谱方程(3.9)在定常情况下可以写成

$$\frac{d}{dk} \left[\alpha_\nu^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{1/2} k E(k) \right] = -2\nu k^1 E(k) \quad (3.18)$$

式中 α_ν 为耗散区中的柯尔莫果洛夫常数. 上式的解为

$$E(k) = \alpha_\nu(\varepsilon\nu)^{1/2} k^{-1} \exp \left[-\alpha_\nu \left(\frac{k}{k_y}\right)^2 \right] \quad (3.19)$$

关于耗散区 $\left(R_t \ll 1, \frac{k}{k_y} \ll 1\right)$.

在此区内, 湍流运动特征与前几个谱区完全不同, 湍流运动特性主要决定于动力粘性

系数 2. 因此前面所建立的 $\nu_k(k)$ 的普遍形式不能应用于此区. 根据因次分析, 在耗散区中 $\nu_k(k)$ 应写成

$$\nu_k(k) = \alpha_v^{-1} \nu k^{-3} \quad (3.20)$$

定常的湍谱方程可写为

$$\frac{d}{dk} [E(k) \nu k^3] = 2 \alpha_v \nu k^2 E(k) \quad (3.21)$$

上式的解为

$$E(k) = \alpha_v N k^{-(3+2\alpha_v)} \quad (3.22)$$

式中 N 为常数, 在耗散区中 α_v 的值大致在 $1 - \frac{1}{2}$ 的范围.

$$\text{当 } \alpha_v = 1, \quad E(k) = \left(\frac{\varepsilon^3}{\nu^5}\right)^{1/2} k^{-5} \quad (3.23a)$$

$$\text{当 } \alpha_v = \frac{1}{2}, \quad E(k) = \left(\frac{\varepsilon^3}{\nu^7}\right)^{1/4} k^{-4} \quad (3.23b)$$

四、温度场和大气中悬浮微粒浓度的湍谱

在一些实际问题中, 经常需要知道温度湍谱、密度湍谱和与大气污染成分有关的浓度湍谱等. 这些物理量的湍谱, 都是由大气的湍流运动所控制的. 这类问题是属于湍流热传导和湍流扩散的问题. 例如要解决与大气污染有关的问题, 就应知道污染成分的浓度的湍谱分布问题.

1. 温度场的湍谱

在湍流运动中, 可用下面的方程来描述温度场的变化^[5].

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = K_T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i^2} \quad (4.1)$$

式中 Θ 为实际的温度, U_i 为速度, K_T 为分子热传导系数. K_T 与 ν 是以普朗特数联系着, $P = \frac{\nu}{K_T}$. 普朗特数 P 只与物质的属性有关, 而与流体本身的性质无关. 各种气体的普朗特数总是接近于 1, 故 K_T 与 ν 的数值大致相等. 在讨论温度场的湍流结构时, 湍流内标度长应写成

$$y_T = \left(\frac{K_T^2}{\varepsilon}\right)^{1/4} \quad (4.2)$$

在数值上 $y_T \approx y$.

在湍流运动中, U_i 和 Θ 应表示为

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad \Theta = \bar{\Theta} + \theta$$

这里横线表示平均值, u_i 和 θ 分别表示湍流速度和湍流温度. 对于各向同性湍流, 湍流的热传导方程应写成

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = K_T \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} \quad (4.3)$$

温度的关联方程可写成

$$\frac{\partial \overline{\theta \theta'}}{\partial t} + (\overline{u'_i - u_i}) \frac{\partial}{\partial r_i} (\overline{\theta \theta'}) = 2K_T \frac{\partial^2 (\overline{\theta' \theta'})}{\partial r_i^2} \quad (4.4)$$

将上式两端各乘以 $\frac{2}{\pi} \sin kr dr$, 并从零积分到无穷, 即得温度的湍谱方程

$$\frac{\partial F(k, t)}{\partial t} = \overline{W}(k, t) - 2K_T k^2 F(k, t) \quad (4.5)$$

式中 $F(k, t)$ 为湍流温度的湍谱函数, $\overline{W}(k, t)$ 为热量转移函数

$$\begin{aligned} \overline{W}(k, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\overline{u' - u}) \frac{\partial (\overline{\theta' \theta'})}{\partial r} k r \sin kr dr \\ F(k, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \overline{\theta' \theta'} k r \sin kr dr \end{aligned}$$

现在我们采取与第三部分完全相同的方法计算定态的温度湍谱, 湍谱结果写出如下:

(1) 从外惯性区一直到过渡区, 温度湍谱函数的普遍解是

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{\beta \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mu k^{-1}}{\left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3}\right]} \exp \left\{ -3 \left(\frac{K_T}{\nu}\right) \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3}\right]^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} \left[\left(\frac{k_c}{k_y}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y}\right)^{2/3}\right]\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

在上式中我们在指数项中忽略了 $\left(\frac{k_c}{k_{yT}}\right)^2 \ln \left[\left(\frac{k_c}{k_{yT}}\right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_{yT}}\right)^{2/3}\right]$, 式中 β 为常数, 由实验确定, 式中 μ 可按下式

$$\mu = 2K_T \int_0^\infty F(k) k^2 dk \quad (4.7)$$

由实验确定。

和在第三部分中一样, 利用(4.6)式可以写出各不同分波段的温度湍谱。

(2) 亚粘性传导区

$$F(k) = \beta \mu \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} k^{-1} \exp \left[-\beta \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} K_T k^2 \right] \quad (4.8)$$

(3) 粘性传导区

$$F(k) = N \beta k^{-(3+2\beta)} \quad (4.9)$$

式中 N 为常数, 是 νK_T 和 μ 的组合

2. 湍流运动中微粒浓度的湍谱

在大气中悬浮着各种微小粒子, 例如水汽、烟尘粒子和与大气污染有关的气体等, 它们的运动直接与湍流有关, 可用湍流扩散方程来描述。如 u_i 和 Q 分别表示湍流速度和湍流浓度, 则湍流扩散方程可写成

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} \quad (4.10)$$

式中 $\mathcal{D}$ 表示分子扩散系数, $\mathcal{D}$ 与 ν 是以斯密特数 ($S = \frac{\nu}{\mathcal{D}}$) 联系着. 浓度湍谱的内标度长应写成

$$\gamma_0 = \left(\frac{\mathcal{D}^{1/3}}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (4.11)$$

利用与求解温度湍谱完全相同的方法, 即可得出各不同谱段的浓度湍谱. 如用 $G(k)$ 表示浓度湍谱函数, 并取

$$H = 2\mathcal{D} \int_0^\infty k^2 G(k) dk \quad (4.12)$$

各谱段的浓度湍谱函数为

(1) 从外惯性区到过渡区

$$G(k) = \frac{\gamma \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} H k^{-1}}{\left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y} \right)^{2/3} \right]} \exp \left\{ -3 \left(\frac{\mathcal{D}}{\nu} \right) \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y} \right)^{2/3} \right]^2 - 2 \left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} \left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} + \left(\frac{k}{k_y} \right)^{2/3} \right] \right) \right\} \quad (4.13)$$

(2) 亚粘性区到扩散区

$$G(k) = \gamma \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} H k^{-1} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \mathcal{D} k^2 \right] \quad (4.14)$$

(3) 扩散区

$$G(k) = \gamma M k^{-3+2\gamma} \quad (4.15)$$

式中 γ 为常数, 由实验测定. 常数 M 是 ν 、 D 和 H 的组合.

五、理论与实验和观测资料的比较

上面我们导出的湍谱都是三维的, 但实测的湍谱是一维的. 为了与实验数据进行比较, 必须将三维湍谱换算为一维的湍谱. 在实验工作中一般都采用下面的变换式^[16]

$$\text{无量纲形式, 令} \quad f(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \left(1 - \frac{k_1}{k} \right) \frac{E(k)}{k} dk \quad (5.1)$$

这里 $f(k_1)$ 表示一维的湍谱. 但从理论导出的公式还应加上一个 $1/2$ 的因子. 我们采用

$$\text{无量纲形式, 令} \quad k^* = \frac{k}{k_y}, \quad k_1^* = \frac{k_1}{k_y}, \quad E^*(k^*) = \frac{E(k)}{E(k_y)}$$

$$f^*(k_1^*) = \frac{f(k_1)}{f(k_1^*)}$$

现将各不同谱区的一维无量纲湍谱写出如下:

(1) 从外惯性区一直到过渡区

$$f^*(k_1^*) = \alpha k_1^{*-1} \int_0^1 \frac{(1 - \xi^2)}{\left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^2 + \left(\frac{k_1^*}{\xi} \right)^{2/3} \right]} \exp \left\{ -3\alpha \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} + \left(\frac{k_1^*}{\xi} \right)^{2/3} \right]^2 \right. \right.$$

$$- 2 \left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} \left[\left(\frac{k_c}{k_y} \right)^{2/3} + \left(\frac{k_1^*}{\xi} \right)^{2/3} \right] \} d\xi \quad (5.2)$$

式中 $\xi = \frac{k_1^*}{k^*}$

(2) 亚耗散区

$$f^*(k_1^*) = \alpha_v k_1^{*-1} \int_0^1 (1 - \xi^2) \exp \left[-\alpha_v \left(\frac{k_1^*}{\xi} \right)^2 \right] d\xi \quad (5.3)$$

(3) 耗散区, 如取 $\alpha_v = \frac{1}{2}$

$$f^*(k_1^*) = 8.8 \times 10^{-2} \alpha_v k_1^{*-4} \quad (5.4)$$

对于温度湍谱和浓度湍谱也可写出上面的形式。

下面将上述理论与实测的湍流能谱进行比较。现将用气球测量(用×表示)和在高塔上测量的(用○表示)大气湍流能谱^[17]及在风洞中测量的大量湍流能谱(用二条虚线表示)^[18-20]绘于图1。图中曲线(I)、(II)、(III)分别表示用(5.2)、(5.3)和(5.4)式进行计算。

在计算中取 $\alpha = 2.0$, $\alpha_v = 0.5$, $\frac{k_c}{k_y} = 10^{-4}$ 。由图看出, 理论曲线与实测数据符合得是较好的。图中左上角的几个数据(+)的偏离是因气球急剧运动引起的。

理论结果表明, 在 $k_1^* > k_e^*$ 的高波数段区(相当于内、外惯性区), 湍谱分布明显地偏

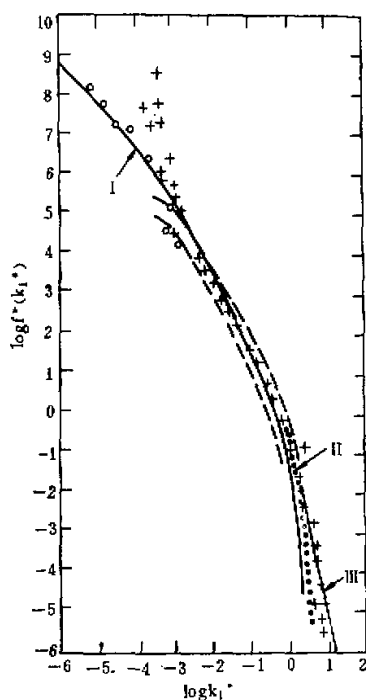


图 1

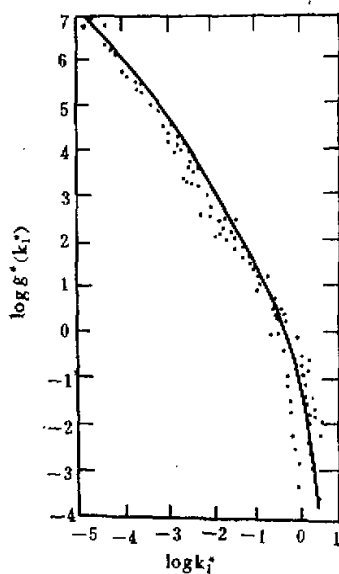


图 2

离 $k^{-5/3}$ 分布。

近年来发现大气湍流对于喷气飞机的倒翻很有影响^[21]。从测量结果可清楚地看出,当湍流尺度接近飞机的尺度时,能谱分布偏离 $k^{-5/3}$,而趋于 k^{-1} 的分布。

利用水手 2 号和水手 4 号卫星测量的太阳风中的大尺度磁场湍流能谱也与我们的理论结果符合^[22-24]。

关于标量场(温度、浓度)的实验资料如图 2 所示^[25-27]。图中曲线是用理论公式(4.6)换成一维湍谱计算的。在计算中取 γ 和 $\beta = 0.59$ ^[20]。由图看出,理论结果与实验资料符合得很好。

根据理论与实验数据的比较结果,我们提出了一个除最大一级涡旋外的其余全部谱区的湍谱图案如图 3 所示。

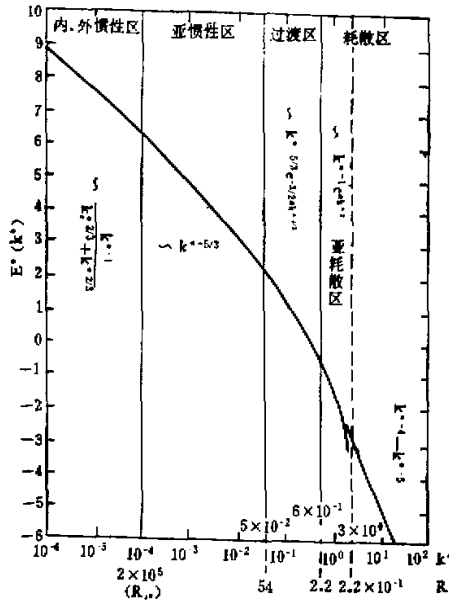


图 3

最后应指出,我们的工作还是初步的,有些问题还有待于今后进一步研究。例如对谱区的划分是否适当?各不同谱区的正确界限如何确定?对所得结果还须与实测资料进一步比较和验证等。

致谢:北京大学周培源教授等对本文初稿作了认真审查,并提出了宝贵的指导意见,特表示衷心地感谢。

参 考 资 料

- [1] A. Н. Колмогоров, ДАН. СССР, 1941, **32**, 611—614; 615—617.
- [2] A. М. Обуков, ДАН. СССР, 1941, **32**, 22.
- [3] W. Heisenberg, Zeit. f. Phys., 1948, **124**, 628.

- [4] L. S. G. Kovasang, *J. Aeron. Sci.*, 1948, 15, 745.
- [5] J. C. R. Bass, *Acad. Sci. Paris*, 1949, 228, 228—229.
- [6] S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1950, A 200, 20.
- [7] R. W. Stewart and A. A. Townsend, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 1950, A 243, 359.
- [8] G. K. Batchelor, *The theory of homogenous turbulent*. Chapter 6, 1956.
- [9] 周培源, 物理学报, 1956, 13, 220.
- [10] 周培源、蔡树棠, 力学学报, 1957, 1, 3—14.
- [11] 周培源、是勋刚、李松年, 北京大学学报(自然科学), 1965, 10, 39.
- [12] 黄永念, 力学学报, 1965, 8, 12.
- [13] 周培源、黄永念, 中国科学, 1975, No. 2, 180.
- [14] Yih-Ho PAO, *The Phys. of Fluids*, 1965, 8, 1063.
- [15] 朗道和栗弗席兹著(彭旭麟等译)连续介质力学, p. 255.
- [16] T. O. Hinze, *Turbulence*, Chap. 3, 1959.
- [17] C. M. Sneli, H. Tennekes and J. Lumley, *The Phys. of Fluids*, 1971, 14, 201.
- [18] H. L. Garnt and A. Moilliet, *J. Fluid Mech.*, 1962, 13, 327.
- [19] H. L. Garnt, R. W. Stewart and A. Moilliet, *J. Fluid Mech.*, 1962, 12, 241.
- [20] M. M. Gibson, *J. Fluid Mech.*, 1963, 15, 161.
- [21] J. C. Houbolt, *AIAA Journal*, 1973, 11, (4), (见力学译丛, 1974, No. 3, 29.)
- [22] Jr. P. J. Coleman, *The Astrophys. Jour.* 1968, 153, 371.
- [23] K. G. M. McCracken, and U. R. Rao, *Space Sci., Rev.*, 1970, 11, 155.
- [24] 刘振兴, 太阳风湍流结构的理论分析(I) 1976年全国日地空间物理会议上的报告(待发表)
- [25] S. Corrsin and M. S. Uberoi, *NACA Report* 998, 1950.
- [26] A. L. Kistler, V. O'Brien and S. Corrsin, *NACA Research Memo.* 54019, 1954.
- [27] C. H. Gibson and W. H., *Schwarz J. Fluid Mech.*, 1968, 16, 365.