

起伏条件对冰雹增长的影响

徐家骝

(兰州大学)

一、前言

观测资料表明,云中的一些物理量如气流^[1]、含水量^[2]等都是起伏的。在雷暴和冰雹云中,由于强烈的扰动,这些量的起伏更为显著。中国科学院大气物理所的云物理工作者曾经在云滴浓度(或含水量)^[3]、上升气流^[4]、湍流加速度、电量^[5]等气象因子有起伏的条件下,研究了暖云降水机制问题。本文在文献[3]和[5]的工作基础上,将生长质点的半径作为多元随机变量(初始粒子半径和诸气象因子)的函数来处理,对雹胚为多谱时在两个主要气象因子—含水量和湍流加速度有起伏的环境中生长的冰雹谱作了具体的推导和计算。另外还推导计算了其它几种较简单的模式,并作了比较。通过上述工作,揭示了那种平均物理量比较弱的对流云中能够在较短时间里形成中等以上大小(或中等强度)的冰雹的物理原因。定量地说明了起伏的气象因子的增减和雹胚的大小和分布对冰雹谱的影响。

二 平均环境中生长的冰雹谱

考虑冰雹的生长从半径 r 大于 0.05 厘米的雹胚开始,故主要靠重力碰并增长,增长率的方程为

$$\frac{dr}{dt} = \frac{E}{4\rho_i} qv \quad (1)$$

式中 E 为碰并系数, q 是云滴含水量(简称含水量,下同), ρ_i 是冰雹密度, v 是冰雹末速度,它由半经验公式 $v = \alpha\sqrt{r}$ 决定, $\alpha = 2.04 \times 10^3$ 厘米^{1/2}秒⁻¹。对(1)式积分得

$$r = (Aq + \sqrt{r_0})^2 \quad (2)$$

其中

$$A = \frac{E\alpha}{8\rho_i} t$$

t 是冰雹从 r_0 生长到 r 的时间。因雹胚是成谱的,其半径 r_0 是一个随机变量,根据岷县观测资料^[6],其概率分布可取为

$$\varphi_0(r_0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_0}} e^{-\frac{[r_0 - \bar{r}_0]^2}{2\sigma_{r_0}^2}} & r_0 \geq 0.05 \text{ 厘米} \\ 0 & r_0 < 0.05 \text{ 厘米} \end{cases}$$

r 是随机变量 r_0 的连续函数, 且随 r_0 的增减而单地调减增。根据它们的概率元相等的原理, 容易得到雹胚多谱时在平均环境中生长的冰雹谱分布的密度公式

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_0}} \left(1 - \frac{A}{\sqrt{r}} q\right) e^{-\frac{[(\sqrt{r} - Aq)^2 - \bar{r}_0^2]}{2\sigma_{r_0}^2}} \quad (3)$$

对 (3) 式进行计算时, 取 $q = 2$ 克/米³, $t = 540$ 秒, 雹胚条件按前所述而令其下限 $r_{0m} = 0.05$ 厘米, 上限 $r_{0M} = 0.3$ 厘米, 平均值 $\bar{r}_0 = 0.15$ 厘米, 均方差 $\sigma_{r_0} = 0.05$ 厘米。计算结果见图 1 曲线 A。由图看出, 虽然构成了一定的谱形(雹胚为单谱时则不成谱形), 但其谱宽很狭, 最大半径仅 0.65 厘米, 只比众数半径 0.42 厘米大一半, 后者相当于以雹胚平均半径 $\bar{r}_0 = 0.15$ 厘米生长的冰雹半径。

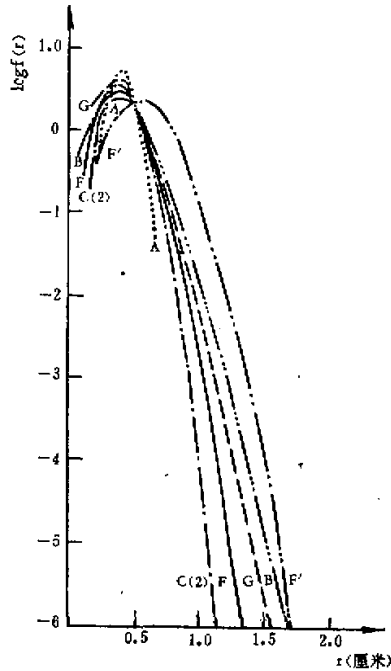


图 1

三、雹胚为多谱时在含水量和湍流加速度有起伏的环境中生长的冰雹谱

由增长率方程(1)知道, $\frac{dr}{dt} \sim q, v$, 在有湍流加速度的作用下, 可得末速度的半

经验公式 $v = \beta \sqrt{w} \sqrt{r}$ (w 是冰雹相对于空气的垂直加速度, $\beta = 65.27$, 并设 $w \geq 0$), 所以 $v \sim \sqrt{w}$, 而 w 的变化主要决定于 w' 的变化, 因而直接影响冰雹增长率的环境因子是含水量 q 和湍流加速度的垂直分量 w' 。正如前言中所述, 在冰雹云中这两个气象因子主要的起伏是不可忽视的。

q 的分布假定不随时间、空间而变, 并取正态形式^[3], 考虑到含水量不可能负值而取如下形式

$$\varphi_1(q) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q} e^{-\frac{(q-\bar{q})^2}{2\sigma_q^2}} & q \geq 0 \\ 0 & q < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$\bar{q}, \sigma_q$ 各为 q 的平均值和均方差。

w 的分布也假定不随时间、空间而变, 也取正态形式^[3], 考虑到 $w \geq 0$ 的条件限制而写成

$$\varphi_2(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{(w-\bar{w})^2}{2\sigma_w^2}} & w \geq 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases} \quad (5)$$

σ_w 是 w 的均方差也即 w' 的均方差 $\sigma_{w'}$ 。

雹胚半径 r_0 分布和末速度 v 仍按前述。从增长率方程(1)进行积分得

$$r = (B\sqrt{w}q + \sqrt{r_0})^2 = \phi(w, q, r_0) \quad (6)$$

其中

$$B = \frac{E\beta}{8\rho_i}.$$

已知 r_0, q 和 w 都是随机变量, 可知 r 也是一个随机变量。对于给定时段 t 来讲, B 是常数 (E 和 ρ_i 都假定不变), 乃得 r 的分布函数为

$$F(r) = P[r_0 \leq \phi(r_0, q, w) \leq r] \quad (7)$$

等式 $r = \phi(r_0, q, w)$ 表示在四维空间 (r_0, q, w, r) 上的一个“曲面”, 而 $r_0 \geq 0, q \geq 0, w \geq 0$ 恒成立, 根据(6)式, $\phi(r_0, q, w)$ 是 r_0, q, w 的单值、连续函数。所以落在 $r_0 \leq \phi(r_0, q, w) \leq r$ 范围内的概率可以用一个沿空间域 V 的三重积分来表示, 即

$$F(r) = \iiint_V \phi(r_0, q, w) dr_0 dq dw \quad (8)$$

$\phi(r_0, q, w)$ 是随机事件 r_0, q 和 w 同时发生的联合概率密度, 一般来讲它们是相关的, 作为近似的考虑, 假定 r_0, q 和 w 是相互独立事件, 则有

$$\phi(r_0, q, w) = \varphi_0(r_0)\varphi_1(q)\varphi_2(w) \quad (9)$$

将上式代入(8)式后得

$$\begin{aligned} F(r) &= \iiint_V \varphi_0(r_0)\varphi_1(q)\varphi_2(w) dr_0 dq dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}\sigma_{r_0}\sigma_q\sigma_w} \iiint_V e^{-\left[\frac{(r_0-\bar{r}_0)^2}{2\sigma_{r_0}^2} + \frac{(q-\bar{q})^2}{2\sigma_q^2} + \frac{(w-\bar{w})^2}{2\sigma_w^2}\right]} \cdot dr_0 dq dw \end{aligned} \quad (10)$$

V 域的范围由不等式 $r_0 \leq \phi(r_0, q, w) \leq r$ 或 $0 \leq q \leq \frac{1}{B\sqrt{w}}(\sqrt{r} - \sqrt{r_0})$ 所确定, 其中 w 的范围(积分限)当 $\sigma_w = \sigma_w = \frac{1}{3}g$ 时取 $g - 2\sigma_w \leq w \leq g + 3\sigma_w$, 这样一方面保持 $w \geq 0$ 的假定, 另一方面在此范围内的 w 值已包含了绝大部分的概率($\sim 97.59\%$); 又 $r_{0M} \leq r_0 \leq r_{0M}$ ($r_{0M} = 0.05$ 厘米, $r_{0M} = \bar{r}_0 + 3\sigma_{r_0}$). 于是(10)式可以写成

$$F(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3} \sigma_{r_0} \sigma_q \sigma_w} \int_{g-2\sigma_w}^{g+3\sigma_w} dw \int_{r_{0M}}^{r_{0M}} dr_0 \int_0^{\frac{1}{B\sqrt{w}}(\sqrt{r}-\sqrt{r_0})} dq \cdot e^{-\left\{\frac{(r_0-\bar{r}_0)^2}{2\sigma_{r_0}^2} + \frac{(q-\bar{q})^2}{2\sigma_q^2} + \frac{(w-g)^2}{2\sigma_w^2}\right\}} \cdot dq \quad (11)$$

作变换, 令 $(B\sqrt{w}q + \sqrt{r_0})^2 = z$, 则得

$$F(r) = \frac{1}{2\sqrt{8\pi^3} B \sigma_{r_0} \sigma_q \sigma_w} \int_{g-2\sigma_w}^{g+3\sigma_w} dw \int_{r_{0M}}^{r_{0M}} dr_0 \int_{r_0\sqrt{w}\sqrt{z}}^r \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot e^{-\left\{\frac{(r_0-\bar{r}_0)^2}{2\sigma_{r_0}^2} + \frac{(w-g)^2}{2\sigma_w^2} + \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{w}}(\sqrt{r}-\sqrt{r_0})-B\bar{q}\right]^2}{2\sigma_q^2 B^2}\right\}} \cdot dz \quad (12)$$

对积分限 r 求导数, 便得到 r 的概率密度

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\sqrt{8\pi^3} B \sigma_{r_0} \sigma_q \sigma_w \sqrt{r}} \int_{r_{0M}}^{r_{0M}} dr_0 \int_{g-2\sigma_w}^{g+3\sigma_w} \frac{1}{\sqrt{w}} \cdot e^{-\left\{\frac{(r_0-\bar{r}_0)^2}{2\sigma_{r_0}^2} + \frac{(w-g)^2}{2\sigma_w^2} + \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{w}}(\sqrt{r}-\sqrt{r_0})-B\bar{q}\right]^2}{2\sigma_q^2 B^2}\right\}} \cdot dw \quad (13)$$

对(13)式进行数值计算时仍取 $\bar{r}_0 = 0.15$ 厘米, $\sigma_{r_0} = 0.05$ 厘米, $r_{0M} = 0.05$ 厘米, $r_{0M} = 0.30$ 厘米, $\bar{q} = 2$ 克/米³, 而 $\sigma_q = 0.3 \bar{q}$, $\sigma_w = \sigma_w = \frac{1}{3}g$ 及 $t = 545$ 秒. 计算结果点在半对数坐标的图 2 (曲线 B) 和线性坐标的图 3 上.

从图 2 看出, 计算得到的雹谱是单峰的分布, 而众数半径(0.42 厘米)以上的概率分布基本上呈负指数递减, 这些特点都和多数观测事实一致^[6,7,8]. 图上梯形曲线是两个实例: 曲线 1 是峨边两次中等强度的降雹过程的雹谱综合资料, 其平均半径约 0.35 厘米, 与本算例的众数半径相近, 其概率分布基本上呈负指数递减^[6], 这种递减形式和陡度都和计算曲线的众数半径以上的概率分布相近. 梯形曲线 2 是北美阿尔勃特的 8 次中等强度(折合雨量强度为 1.0—9.99 毫米/小时)降雹过程的雹谱综合资料^[8], 其众数半径约 0.4 厘米, 而整个曲线也和计算曲线相当吻合.

利用线性坐标的图 3 还可以对大于某一半径的概率进行估计, 例如 $r \geq 1.0$ 厘米的概率为 1.4‰, 故即使直径 2 厘米以上的冰雹概率也超过了千分之一, 这样数量级的中等以上大小的雹的概率是足以对农业造成危害的.

为了比较起伏量的大小、雹胚大小、起伏因子的增减以及雹胚分布对形成雹谱的影响, 以下再分别几种较简单的模式作一些讨论.

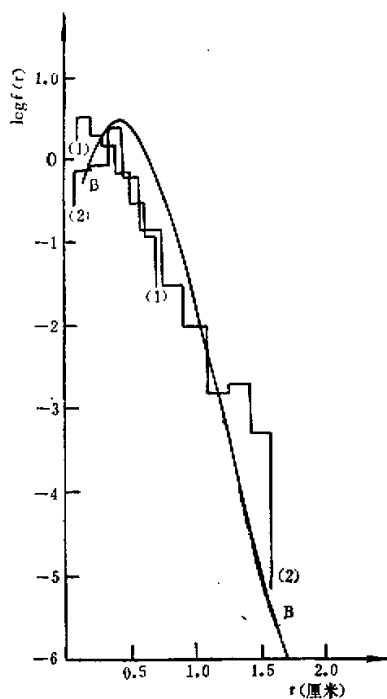


图 2

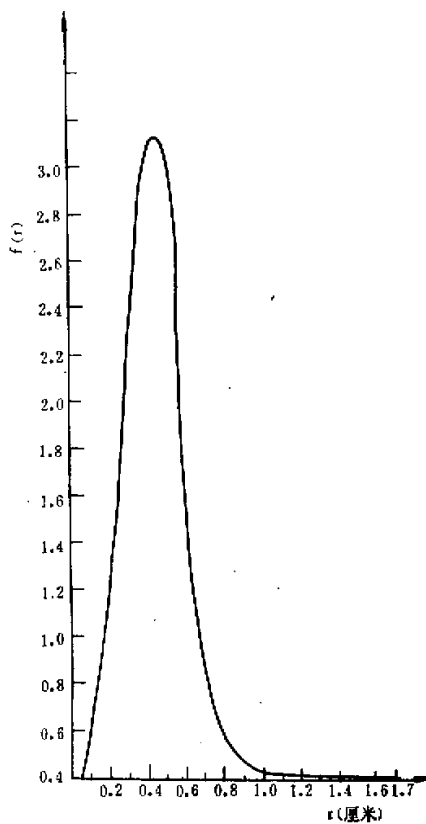


图 3

四、其它较简单的模式

1. 雹胚为单谱时在含水量有起伏的环境中生长的冰雹谱

根据类似于第二节所述的推导原理(只是将随机变量 r_0 改换成 q , 而 q 的分布取(4)的形式), 可得到分布密度公式

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q A} e^{-\frac{(\sqrt{r}-\sqrt{\bar{r}})^2}{2\sigma_q^2 A^2}} \quad (14)$$

而落在 $r_1 \leq r \leq r_2$ 的冰雹半径概率密度为

$$P(r_1 \leq r \leq r_2) = \frac{1}{2} [\Phi(y_2) - \Phi(y_1)] \quad (15)$$

其中

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \quad \xi = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{\bar{r}}}{\sigma_r}$$

对(14)作数值计算时仍取 $\bar{q} = 2$ 克/米³, $\sigma_q = 0.3\bar{q}$ 及 $r_0 = 0.15$ 厘米, $t = 540$ 秒. 计算结果绘成曲线 $C(2)$ (图 4). 为了和曲线 B 的谱宽作比较, 以概率密度 $\varphi(r) = 10^{-6}$ (厘米⁻¹) 处的半径作为“可能最大半径”(r_M), 则得曲线 B 的 $r_M = 1.7$ 厘米, 而曲线 $C(2)$ 的 r_M 只有 1.15 厘米, 即为前者的 2/3 左右.

为了对起伏量和雹胚半径大小的影响作比较, 还分别按 $r_0 = 0.15$ 厘米时的 $\sigma_q = 0.15\bar{q}$ 和 $0.45\bar{q}$ 以及 $\sigma_q = 0.3\bar{q}$ 时的 $r_0 = 0.05$ 厘米和 0.25 厘米的概率密度作了计算, 将其结果绘成曲线 $C(1)$ 和 $C(3)$ (图 4) 以及曲线 D 和 E (图 5). 另外, 还利用公式(15)分别计算了 $r \geq 0.5$ 厘米和 $r \geq 0.75$ 厘米的概率 $P(r \geq 0.5)$ 和 $P(r \geq 0.75)$, 列于表 1.

表 1 $r \geq 0.5$ 厘米和 ≥ 0.75 厘米的概率

算 例 概 率	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	D	E
$P(r \geq 0.5)$	0.063	0.22	0.31	2.3×10^{-3}	0.75
$P(r \geq 0.75)$	$< 10^{-8}$	2.6×10^{-3}	0.031	3.3×10^{-7}	0.087

先看起伏量 σ_q 的影响: 从图 4 看出, 随着 σ_q 的增大, 众数半径以下的谱线的递减程度变缓, 曲线 $C(1)$ 和 $C(3)$ 的 r_M 各为 0.75 和 1.62 厘米, 即从 $\sigma_q = 0.15\bar{q}$ 到 $0.45\bar{q}$, 谱宽

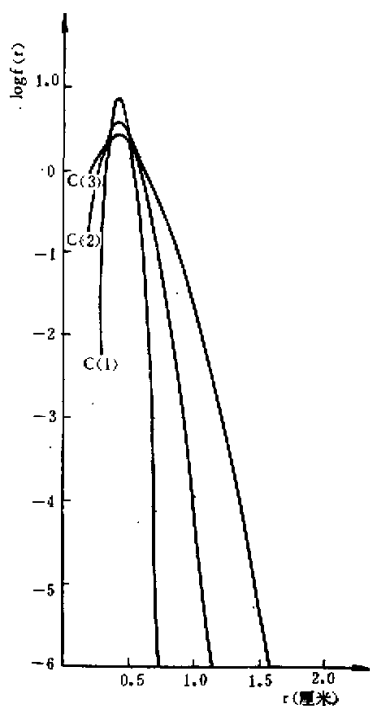


图 4

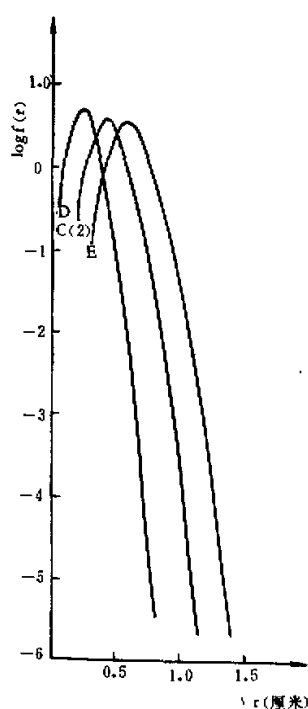


图 5

相应地增大了一倍以上。另外由表 1 看大雹形成概率,从 $\sigma_q = 0.15\bar{q}$ 到 $0.45\bar{q}$, $P(r \geq 0.5)$ 从 6.3% 增大到 31% 即增加 5 倍; $P(r \geq 0.75)$ 则从 $<10^{-8}$ 增大到 3.1%, 即增加了六个量级。所以 σ_q 的影响是十分显著的。

再看 r_0 大小的影响: 从图 5 看出, 随着 r_0 的增大, 整个谱线向右下方移去, 而 r_M 则从 $r_0 = 0.05$ 厘米时的 0.83 厘米, 增大到 $r_0 = 0.25$ 厘米时的 1.40 厘米, 增大了将近 70%。大雹形成概率 (表 1) $P(r \geq 0.5)$ 相应地从 2.3‰ 增大到 75%, 增加了两个量级; 而 $P(r \geq 0.75)$ 则从 3.3×10^{-7} 增大到 8.7×10^{-2} , 增加了五个量级。所以, 在起伏条件下雹胚大小的影响至少相当于单因子起伏量 (σ_q) 本身的影响。

2. 雹胚多谱时在含水量有起伏的环境中生长的冰雹谱。

类似于第三节的推导, 可得到冰雹半径 r 的分布函数

$$F(r) = \frac{1}{4A\pi\sigma_{r_0}\sigma_q} \int_{r_{0M}}^{r_{0M}} dr_0 \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\left[\frac{(r_0-r_0)^2}{2\sigma_{r_0}^2} + \frac{(\frac{\sqrt{x}}{A}\sqrt{r_0}-\bar{q})^2}{2\sigma_q^2}\right]} \cdot dz \quad (16)$$

和谱分布密度公式

$$\varphi(r) = \frac{1}{4A\pi\sigma_{r_0}\sigma_q\sqrt{r}} \int_{r_{0M}}^{r_{0M}} \left\{ \frac{(r_0-r_0)^2}{2\sigma_{r_0}^2} + \frac{[(\sqrt{r}-\sqrt{r_0})-(\sqrt{r_0}-\sqrt{r_0})]^2}{2\sigma_q^2 A^2} \right\} \cdot dr_0 \quad (17)$$

对 (17) 式进行数值计算时, 除了 r_0 的有关参数与第二、三节相同外, 其它如 t 和 q 等都与本节第 1 段中的曲线 C(2) 算例相同, 计算结果绘成曲线 F (图 1)。

和曲线 C(2) 作比较, r_M 约增大 17%, 而比起平均环境中形成的谱线 A, 则增宽更明显, 前者的 r_M (可能最大半径) 是 1.35 厘米, 后者的最大半径是 0.65 厘米, 约大 1 倍。

如果其它条件与上边相同而雹胚分布用平均半径和最大半径比较大的情况, 如有文献曾经观测到半径超过 0.5 厘米的雹胚^[9]。现令 $r_{0M} = 0.5$ 厘米, $\bar{r}_0 = 0.25$ 厘米, $\sigma_{r_0} = \frac{1}{3}\bar{r}_0$, 用公式 (17) 计算结果绘成曲线 F' (图 1)。F' 的谱宽比 F 的谱宽有相当的增大, 其 r_M 值到 1.7 厘米, 比 $r_0 = 0.25$ 厘米的单谱时在同样起伏条件下的雹谱 E 的 r_M 值 (1.4 厘米) 增大 21%。可见随着 $\bar{r}_0$ 的增大, r_0 分布对冰雹谱宽的影响也增大了。

3. 雹胚为单谱时在湍流加速度和含水量有起伏的环境中生长的冰雹谱。

在这情况下可得到冰雹半径 r 的分布函数

$$F(r) = \frac{1}{4B\pi\sigma_q\sigma_w} \int_{t-2\sigma_w}^{t+2\sigma_w} dw \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{w}\sqrt{x}} e^{-\left\{ \frac{(w-\bar{w})^2}{2\sigma_w^2} + \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{w}}(\sqrt{r}-\sqrt{r_0}) - B\bar{q} \right]^2}{2\sigma_q^2 B^2} \right\}} \cdot dz \quad (18)$$

和概率密度

$$\varphi(r) = \frac{1}{4B\pi\sigma_q\sigma_w\sqrt{r}} \int_{t-2\sigma_w}^{t+2\sigma_w} \frac{1}{\sqrt{w}} e^{-\left\{ \frac{(w-\bar{w})^2}{2\sigma_w^2} + \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{w}}(\sqrt{r}-\sqrt{r_0}) - B\bar{q} \right]^2}{2\sigma_q^2 B^2} \right\}} \cdot dw \quad (19)$$

对 (19) 式进行数值计算时, 除了 $r_0 = 0.15$ 厘米 (常数), 外, 其它如 t , q , w 的取值均与第三节相同。计算结果绘成曲线 G (图 1), 从图上看, 曲线 G 与 F (未考虑 w 的起伏) 很相似, 但谱线有更大的增宽; 与曲线 C(2) 相比, r_M 值增大了约 34%, 即其影响超过了 r_0 分布对冰雹谱宽影响 (增大 17%) 的一倍。

五、小 结

通过以上几节的讨论,可得到以下几点:

1. 考虑或不考虑气象因子的起伏对冰雹的生长半径有着十分显著的影响: 在平均环境中, 雹胚为单谱时只能长成一种大小的雹, 而在起伏环境中即使雹胚为单谱也能成谱, 其 r_M 值能达到前者的三倍半以上; 而雹胚为多谱时, 在平均环境中虽然也能长成谱, 但其最大半径要比起伏环境下小一倍半以上。

2. 起伏的气象因子的增减对雹谱有着相当的影响: 在多谱时, 同时考虑 w 和 q 的起伏时的 r_M 值比仅仅考虑 q 的起伏时的 r_M 值约增大 $1/4$; 在单谱时, 同时考虑 w 和 q 的起伏的 r_M 比仅考虑 q 的起伏的 r_M 约增大 $1/3$ 左右。故起伏的气象因子从单因子变成双因子后, 谱宽明显变宽, 坡度从而变缓。

3. 考虑或不考虑雹胚半径 r_0 的分布, 对雹谱也有一定程度的影响: 在 q 、 w 都起伏的条件下, 多谱比单谱的 r_M 值约增大 13% ; 在 q 起伏下, r_M 值增大 17% 。

4. 雹胚的半径(单谱)或其平均半径(多谱)对最后形成的雹谱有明显的影响: 随着 r_0 或 $\bar{r}_0$ 的增大使雹谱的谱宽显著增大, 其概率密度随 r 增大而递减的趋势明显地变缓, 从而使大雹的形成概率显著地增加。(可分别拿图 1 的 F 和 F' ; 图 5 的 $C(2)$ 和 D 、 E 作比较)。

5. 通过对雹胚为多谱时考虑了湍流加速度和含水量这两个主要起伏因子时的冰雹增长的算例, 说明: 即使平均条件比较弱(平均含水量 2克/米^3) 的中等起伏情况下, 可以在较短时间(约 9 分钟)里就长成直径 2-3 厘米的中等以上大小的雹, 而这种冰雹尺度是在我国西北地区经常遇到的对农业造成危害的降中等强度的雹的最大直径。

致谢: 兰州大学地理系管玉芬同志为本文缩绘插图, 特致谢意。

参 考 资 料

- [1] Н. И. Вульфсон, Исследование Конвективных движений в свободной Атмосфере, Москва, 1961.
- [2] S. Townley, *J. of Atmos. Sci.* Vol. 33 1976, No. 4.
- [3] 顾震潮、翁丽珊, 气象学报 1963, 32 (4)。
- [4] 顾震潮、徐华英, 气象学报 1963, 33 (1)。
- [5] 周秀骥, 暖云降水微物理机制的研究, 科学出版社, 1964。
- [6] 徐家骝、黄孟容、刘钟灵、段兆吉, 气象学报, 1965, 35 (2)。
- [7] D. Atlas, F. H. Ludlam, *Q. J. of Roy. Met. Soc.* 1961, 87(374)。
- [8] H. Douglas, *Met. Monographs*, 1963, 5(27)。
- [9] S. C. Mossop, B. E. Kidder, *Nubila*, 1961, 4(1)。