

雷达信号的相关分析和谱分析*

李其琛

潘乃先

(北京大学地球物理系)

提 要

运动质点的多普勒效应使它们散射的雷达信号呈现为一种随机过程, 对这随机过程的统计特性进行分析就能够推断云和降水的微物理或运动学的状况。本文由这种观点讨论了雷达气象的几种测量原理, 它能够比较清楚地阐明每种方法的实质, 也便于对各种方法的优缺点进行对比。文中还讨论了脉冲波列的谱分析问题, 涉及了如何根据雷达测量结果去推断云和降水的微物理或运动学状况的问题。

一、引 言

设雷达的发射频率是 f_0 , 波长是 λ 。处在距离 R 处的某个质点在天线处构成的散射波电场应为

$$e(t) = e \cos [2\pi f_0 t - \phi(t)] \quad (1)$$

$$\phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda} R(t) \quad (2)$$

式中 e , ϕ 分别是散射波的振幅和位相。由于质点不断运动, 位相 $\phi(t)$ 是随时间变化的。(1)式就是描述运动质点所固有的多普勒效应的普遍表达式^[1]。取 $R(t) = R(0) - vt$ 即可看出熟知的多普勒迁移。

设合成波是由 N 个质点 ($N \gg 1$) 的部分波所组成, 合成波的电场 $E(t)$ 和强度 $I(t)$ 应为(略去常数因子)

$$E(t) = \sum_{k=1}^N e_k \cos [2\pi f_0 t - \phi_k(t)] \quad (3)$$

$$I(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} E^2(t) dt \quad (4)$$

由于运动质点的多普勒效应, 结果使得合成波在实质上是无规位相波的叠加, 它的电场 $E(t)$ 和强度 $I(t)$ 都是随机量。测定这两个随机过程并对它们的统计特性进行分析就能够推断云和降水的微物理或运动学的状况。目前这种方法已在雷达气象学中得到成功的应用。本文从这方面来讨论雷达气象中的几种测量原理, 这样能够比较清楚地阐明

* 本文写于1963年, 1978年10月8日收到修改稿。

各种方法的实质并对它们的优缺点进行比较。文中还讨论了脉冲波列的谱分析问题, 并涉及了如何根据雷达测量结果去推断云和降水的微物理或运动学状况的问题。

二、基本关系式

将(3)式改写为

$$\begin{aligned} E(t) &= X(t) \cos 2\pi f_0 t + Y(t) \sin 2\pi f_0 t \\ &= A(t) \cos [2\pi f_0 t - \Phi(t)] \end{aligned} \quad (5)$$

式中,

$$X(t) = \sum_{k=1}^N e_k \cos \phi_k(t); \quad Y(t) = \sum_{k=1}^N e_k \sin \phi_k(t) \quad (6)$$

将(4)式改写为

$$I(t) = A^2(t) = X^2(t) + Y^2(t) \quad (7)$$

由于散射质点的运动, $\phi_k(t)$ 随时间变化, 所以合成波的振幅 $X(t)$, $Y(t)$, $A(t)$, 位相 $\Phi(t)$ 和强度 $I(t)$ 的变化都是随机过程。

由(6)式看出, 此处谈论的质点群的合成散射问题和二维的布朗质点无规行走问题相似^[2]。 $X(t)$, $Y(t)$ 可看作是从原点出发在平面中作无规行走的布朗质点经过 N 步行走后的位置坐标。而在这里第 k 步的长度总是 e_k , 不随时间变化, 但这一步所走的方向则是 $\phi_k(t)$, 是时间 t 的函数。(见图 1a) 经过 N 步行走后布朗质点离原点的距离是 $A(t)$ 。将质点群的合成散射问题和二维无规行走问题联系起来, 有助于我们了解前一问题的若干规律。至于合成波随时间的变化则可用图 1b 表示。

假设: 1. 组成合成波的各部分波互相独立; 2. 各部分波的位相 ϕ 取 $0-2\pi$ 之间任一数值的概率相等; 3. 部分波的位相在时距 τ 内变化 $\Delta\phi$ 的概率只与质点的大小 (反映在振幅 e 上) 及 τ 的数值有关; 4. 过程是平稳随机过程。

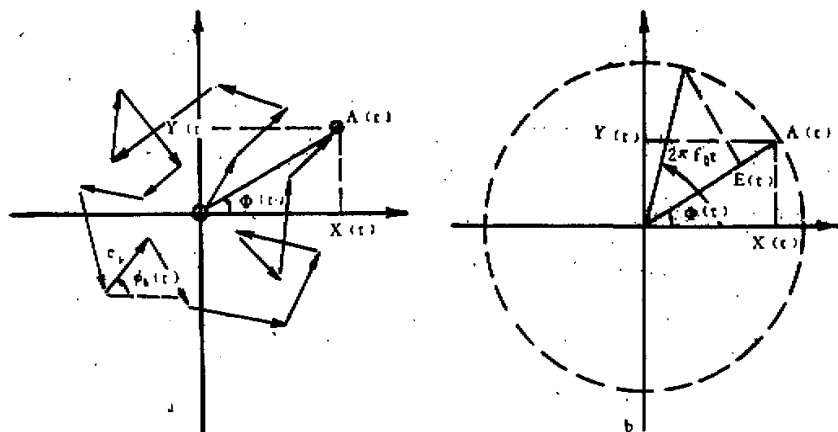


图 1

以 $w(e)$ 表示部分振幅的分布密度, 以 $w_e(\Delta\phi, \tau)$ 表示振幅为 e 的部分波在时距 τ 内位相变化 $\Delta\phi$ 的条件分布密度, 在上述条件下, 通过直接的计算可知 $X(t)$, $Y(t)$, $E(t)$, $I(t)$ 等随机过程具有下列统计特征:

平均值:

$$\overline{X(t)} = \overline{Y(t)} = \overline{E(t)} = 0 \quad (9)$$

$$\overline{X^2(t)} = \overline{Y^2(t)} = \overline{E^2(t)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e_k^2 = \frac{N}{2} \int_0^\infty e^2 w(e) de = \frac{N}{2} \overline{e^2} = \sigma^2$$

$$I(t) = \overline{X^2(t)} + \overline{Y^2(t)} = 2\sigma^2 \quad (11)$$

自相关函数:

$$\begin{aligned} C_x(\tau) &= \frac{\overline{X(t)X(t+\tau)}}{\overline{X^2(t)}} = \frac{-\overline{Y(t)Y(t+\tau)}}{\overline{Y^2(t)}} \\ &= \frac{1}{N e^2} \sum_{k=1}^N e_k^2 \overline{\cos \Delta\phi_k(\tau)} \\ &= \int_0^\infty de \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2}{e^2} w(e) w_e(\Delta\phi, \tau) \cos \Delta\phi d(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (12)$$

互相关函数:

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= \frac{\overline{X(t)Y(t+\tau)}}{[\overline{X^2(t)} \overline{Y^2(t)}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\overline{X(t+\tau)Y(t)}}{[\overline{X^2(t)} \overline{Y^2(t)}]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{N e^2} \sum_{k=1}^N e_k^2 \overline{\sin \Delta\phi_k(\tau)} \\ &= \int_0^\infty de \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2}{e^2} w(e) w_e(\Delta\phi, \tau) \sin \Delta\phi d(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (13)$$

电场的自相关函数:

$$C_E(\tau) = \frac{\overline{E(t)E(t+\tau)}}{\overline{E^2(t)}} = C_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + C_y(\tau) \sin 2\pi f \tau \quad (14)$$

强度的相关函数:

$$C_I(\tau) = \frac{[\overline{I(t)I(t+\tau)}] - [\overline{I(t)}][\overline{I(t+\tau)}]}{[\overline{I(t)} - \overline{I(t)}]^2} = C_x^2(\tau) + C_y^2(\tau) \quad (15)$$

推得(15)时曾考虑到

$$\overline{X^2(t)X^2(t+\tau)} = \overline{Y^2(t)Y^2(t+\tau)} = \sigma^4[1 + 2C_x^2(\tau)]$$

$$\overline{X^2(t)Y^2(t+\tau)} = \overline{X^2(t+\tau)Y^2(t)} = \sigma^4[1 + 2C_y^2(\tau)]$$

这是因为无规行走问题的研究^[2]以及中心极限定理告诉我们, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 有如下形式的联合分布密度:

$$P_z(Z_1, Z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-C(\tau)}} \exp \left\{ \frac{-1}{2\sigma^2 \sqrt{1-C(\tau)}} [Z_1^2 + Z_2^2 - 2C(\tau)Z_1Z_2] \right\}$$

式中

$$C(\tau) = \frac{Z_1(t)Z_2(t+\tau)}{[Z_1^2(t) Z_2^2(t+\tau)]^{\frac{1}{2}}}$$

实验表明上述几个相关函数只在1/10秒的 τ 值范围内才具有较显著异于零的值^{[2][3]}, 在如此短的时间间隔内可以认为散射质点的运动速度没有改变。以 v 表示质点的径向运动速度, 定义

$$v = -\frac{dR}{dt} \quad (16)$$

即质点向天线运动时, 速度为正。(本文以后谈到的速度一词均系指径向运动速度, 不再另作声明)。假定 $v = \text{常数}$, 在此考虑下就有

$$\Delta\phi(\tau) = \frac{4\pi}{\lambda} \Delta R(\tau) = -\frac{4\pi}{\lambda} v\tau \quad (17)$$

若以 $w_e(v)$ 表示振幅为 e 的质点取速度 v 的条件分布密度, 于是(12—15)四式可以分别改写为

$$\begin{aligned} C_s(\tau) &= \int_0^\infty de \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2}{e^2} w(e) w_e(v) \cos\left(\frac{4\pi v}{\lambda} \tau\right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \cos\left(\frac{4\pi v}{\lambda} \tau\right) dv \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C_c(\tau) &= -\int_0^\infty de \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2}{e^2} w(e) w_e(v) \sin\left(\frac{4\pi v}{\lambda} \tau\right) dv \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \sin\left(\frac{4\pi v}{\lambda} \tau\right) dv \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C_E(\tau) &= \int_0^\infty de \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2}{e^2} w(e) w_e(v) \cos\left(2\pi f_0 + \frac{4\pi v}{\lambda}\right) \tau dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \cos 2\pi \left(f_0 + \frac{2v}{\lambda}\right) \tau dv \end{aligned} \quad (20)$$

$$C_I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) S(u) \cos \frac{4\pi}{\lambda} (v-u) \tau dv du \quad (21)$$

上面四式中的 $S(v)$ 是按下式定义的

$$S(v) = \int_0^\infty \frac{e^2}{e^2} w(e) w_e(v) de \quad (22)$$

$S(v)dv$ 表示的是速度处在区间 v 到 $v+dv$ 之内的质点所散射的功率在总散射功率中所占的百分比。因为较大的质点在计算 $S(v)$ 时有较大的加权, 我们用“有效速度分布密度”这一名词来称呼它。雷达信号的统计特征正是通过 $S(v)$ 而和散射质点的微物理或运动学的特性联系起来的, 所以它在本文的讨论中占有特别重要的地位。

三、高频信号的频谱分析

普通的多普勒雷达的工作过程就是对高频信号 $E(t)$ 作频谱分析。以 $F_E(f)$ 表示

$E(t)$ 的谱密度, 它和 $E(t)$ 的相关函数 $C_E(\tau)$ 互为富氏变换^[4]

$$\begin{cases} F_E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_E(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ C_E(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_E(f) e^{+i2\pi f\tau} df \end{cases} \quad (23)$$

将(20)式代入(23)式, 利用数学物理方法中 δ 函数的富氏积分展开式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

以及 δ 函数作用于连续函数 $f(x)$ 后有关系式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

可以得到

$$\begin{aligned} F_E(f) &= F_E(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} S(v) [e^{i2\pi(f_0 + \frac{2v}{\lambda})\tau} + e^{-i2\pi(f_0 + \frac{2v}{\lambda})\tau}] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \left[\delta\left(\frac{2v}{\lambda} + f_0 - f\right) + \delta\left(\frac{2v}{\lambda} + f_0 + f\right) \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2}\right) [S(v)|_{v=\frac{\lambda}{2}(f-f_0)} + S(v)|_{v=-\frac{\lambda}{2}(f+f_0)}] \end{aligned} \quad (25)$$

实际上频谱分析过程是不区分正负频率的, 所以测量得到的谱密度是

$$F_F(f) = F_E(f) + F_E(-f) = \frac{\lambda}{2} S(v)|_{v=\frac{\lambda}{2}(f-f_0)}, f > 0 \quad (26)$$

在(26)中我们已将 $S(v)|_{v=-\frac{\lambda}{2}(f+f_0)}, f > 0$ 略去, 因为不会有取如此大的负速度的质点存在。

(26)式和 Rogers 所得到的结果^[5]在实质上是一样的, 但本文用不同于 Rogers 的比较简洁明了的方式推得它, 无需引进复数振幅及其相关函数及谱密度等概念。而且我们在(26)中表明速度 v 和频率迁移间有如下的对应关系:

$$\frac{2v}{\lambda} = f - f_0, f > 0 \quad (27)$$

$f > f_0$ 和 $f < f_0$ 分别对应于正速度和负速度。(27)正好就是多普勒频移的表达式。这样(26)式就清楚的表明了测量利用的是多普勒效应。

四、低频信号的频谱分析

强度 $I(t)$ 是低频信号, $I(t)$ 的谱密度是

$$F_I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_I(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = F_I(-f)$$

将(21)式改写为复数形式代入上式得

$$F_I(f) = F_I(-f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) S(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \{ e^{i2\pi[\frac{\lambda}{2}(v-u)-f]\tau} + e^{-i2\pi[\frac{\lambda}{2}(v-u)+f]\tau} \} \cdot d\tau du dv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(v)S(u) \left\{ \delta \left[\frac{2}{\lambda} (v-u) - f \right] + \delta \left[\frac{2}{\lambda} (u-v) - f \right] \right\} dudv \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) \left[S \left(v - \frac{\lambda}{2} f \right) + S \left(v + \frac{\lambda}{2} f \right) \right] dv \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S(v) S \left(v + \frac{f\lambda}{2} \right) dv \\
&= \frac{\lambda}{2} S(\Delta v) \Big|_{\Delta v = \frac{f\lambda}{2}} \quad (28)
\end{aligned}$$

根据概率论中的卷积公式可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} S(v) S \left(v + \frac{f\lambda}{2} \right) dv$ 代表速度差的分布密度, 所以上式给出速度差为 $\frac{f\lambda}{2}$ 时分布密度的数值。一般说来, 对强度 $I(f)$ 作低频频谱分析就只能确定速度差的分布密度。

下面我们考虑几种特殊情况:

1. 设质点速度由重力场中的下落速度 v_g 和气流速度 v_a 两部分组成, $v = v_g + v_a$ 。分别用 $S_g(v_g)$ 和 $S_a(v_a)$ 代表 v_g 和 v_a 的有效速度分布密度。若认为 v_a 和 v_g 互相独立, 则 $\Delta v = \Delta v_g + \Delta v_a$, Δv_g 和 Δv_a 也是互相独立的, 那末由卷积公式就可将(28)式最末一个式子化为

$$\begin{aligned}
F_i(f) &= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(\Delta v_g) S_a \left(\Delta v_a + \frac{f\lambda}{2} \right) d(\Delta v_a) \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(\Delta v_g) S_a \left(-\Delta v_g + \frac{f\lambda}{2} \right) d(\Delta v_g) \quad (29)
\end{aligned}$$

式中

$$S_g(\Delta v_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(v_g) S_g(v_g + \Delta v_g) dv_g \quad (30_a)$$

$$S_a(\Delta v_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_a(v_a) S_a(v_a + \Delta v_a) dv_a \quad (30_b)$$

(29)式就是 Горелик 和 Мельничук 所用的基本公式^[6], 显然, 它只是(28)式的一个特例。

2. 设有效速度分布密度 $S(v)$ 具有对称性, 即

$$S(v - v_0) = S(v_0 - v) \quad (31)$$

引进 $v' = v - v_0$, 那末 $S(v) = S(v_0 + v')$ 就是 v' 的偶函数, 这样(18), (19), (21)可改写为

$$C_s(\tau) = \cos \frac{4\pi v_0}{\lambda} \tau \int_{-\infty}^{+\infty} S(v_0 + v') \cos \frac{4\pi v'}{\lambda} \tau dv' \quad (32)$$

$$C_e(\tau) = \sin \frac{4\pi v_0}{\lambda} \tau \int_{-\infty}^{+\infty} S(v_0 + v') \cos \frac{4\pi v'}{\lambda} \tau dv' \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
C_i(\tau) &= C_s^2(\tau) + C_e^2(\tau) \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(v_0 + v') \cos \frac{4\pi v'}{\lambda} \tau dv' \right]^2 \quad (34)
\end{aligned}$$

将 $C_i(\tau)$ 开方后再作富氏变换即得

$$\begin{aligned}
 G_I(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_I^{\frac{1}{2}}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \frac{\lambda}{2} S(v_0 + v') \Big|_{v' = \frac{f\lambda}{2}}
 \end{aligned} \quad (35)$$

这样,速度按 v' 的分布可以从 $C_I(\tau)$ 中得到,但 v_0 无法定出,用 (35) 式整理记录比 Гопе-лик 等人所用的方法^[7]好一些,因为可以不必假设速度是遵循高斯分布的。若认为速度分布是正态分布

$$S(v_0 + v') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(v')^2}} \exp \left[-\frac{(v')^2}{2(v')^2} \right] \quad (36)$$

那末由 (34) 式就可以得到

$$\overline{(v')^2} = \frac{-\lambda^2}{16\pi\tau^2} \ln C_I(\tau) \quad (37)$$

本段所讨论的情况和非降水的云以及小雪相近,在这些情况下可以采用。层状云中 v_0 可认为是零,所以用这种方法能得到较完整的知识。

3. 若在信号 $E(s)$ 中混入已知信号 $e_0 \cos 2\pi f_0 s$, 那末合成信号变为

$$\begin{aligned}
 E'(s) &= E(s) + e_0 \cos 2\pi f_0 s \\
 &= \sum_{k=0}^N c_k \cos [2\pi f_0 s - \phi_k(s)]
 \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $\phi_0(s) = 0$, 此时 (22) 式定义的 $S(v)$ 变为:

$$S'(v) = \frac{1}{N e^2 + e_0^2} [N \overline{e^2} S(v) + e_0^2 \delta(v)] \quad (39)$$

将 (39) 代入 (28), 就得到这种情况下的谱密度 $F_{II}(f)$:

$$\begin{aligned}
 F_{II}(f) &= \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(N \overline{e^2} + e_0^2)^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} N \overline{e^2} S(v) S\left(v + \frac{f\lambda}{2}\right) dv \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} e_0^2 \delta(v) \delta\left(v + \frac{f\lambda}{2}\right) dv \right. \\
 &\quad \left. + N \overline{e^2} e_0^2 S(v) \Big|_{-\frac{f\lambda}{2}} + N \overline{e^2} e_0^2 S(v) \Big|_{-\frac{f\lambda}{2}} \right]
 \end{aligned} \quad (40)$$

当已知信号足够强, 不等式 $e_0^2 \gg N \overline{e^2}$ 能够成立时, 略去高阶小量就有

$$F_{II}(f) = \frac{N \overline{e^2} \lambda}{e_0^2} \frac{1}{2} [S(v) \Big|_{-\frac{f\lambda}{2}} + S(v) \Big|_{-\frac{f\lambda}{2}}] \quad (41)$$

由此可见,从 $F_{II}(f)$ 有可能推得 $S(v)$, Lhermitte 就是用这种办法来进行测量的^[6]。本文用自己的方式推得 (41), 这个等式右端的第二项代表了速度取负值的质点的贡献, 它在 Lhermitte 的公式中没有给出来。实际上 (41) 式表明低频频谱分析是不能区分正负速度的, 当正负速度的质点都存在时, 由 $F_{II}(f)$ 去推断 $S(v)$ 需要特别小心。在这种情况下最好在低频频谱分析之前将 $f < f_0$ 的高频成分全部滤去, 这样就可除去 (41) 右端的第二项, 由 $F_{II}(f)$ 去推断 $S(v)$, $v > 0$ 就不会有什么困难了。

五、脉冲波列的谱分析

以上讨论了连续波的相关分析和谱分析。气象上应用的雷达多是脉冲雷达, 脉冲波列的频谱和连续波的频谱是不相同的, 有必要加以分析, 找出它们之间的联系。

以 $M(t)$ 表示图 2 所示的矩形波, 脉冲的宽度是 $2b$, 重复频率是 $f_r = \frac{1}{T_r}$ 。因为 $M(t)$ 是周期为 T_r 的函数,

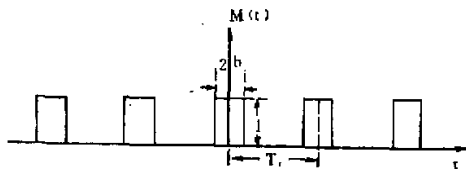


图 2

所以可用富氏级数来表示

$$\begin{cases} M(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{in2\pi f_r t} \\ \alpha_n = \frac{1}{T_r} \int_{-T_r/2}^{+T_r/2} M e^{-in2\pi f_r t} dt \end{cases} \quad (42)$$

$$= \frac{2b \sin n2\pi f_r b}{T_r n2\pi f_r b} \quad (43)$$

脉冲雷达的信号是受上述矩形波 $M(t)$ 调制的, 这时的电场信号应为

$$\begin{aligned} E_p(t) &= M(t)E(t) \\ &= \frac{1}{2} X(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (e^{i2\pi(f_0+n f_r)t} + e^{-i2\pi(f_0-n f_r)t}) \\ &\quad + \frac{1}{2i} Y(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (e^{i2\pi(f_0+n f_r)t} - e^{-i2\pi(f_0-n f_r)t}) \end{aligned} \quad (44)$$

电场 $E_p(t)$ 的相关函数是

$$\begin{aligned} C_{E_p}(\tau) &= \frac{\overline{E_p(t)E_p(t+\tau)}}{E_p^2(t)} = \frac{1}{2} C_x(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (e^{i2\pi(f_0+n f_r)\tau} + e^{-i2\pi(f_0-n f_r)\tau}) \\ &\quad + \frac{1}{2i} C_y(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (e^{i2\pi(f_0+n f_r)\tau} - e^{-i2\pi(f_0-n f_r)\tau}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) \left(e^{i2\pi\left(\frac{2\nu}{\lambda} + f_0 + n f_r\right)\tau} + e^{-i2\pi\left(\frac{2\nu}{\lambda} + f_0 - n f_r\right)\tau} \right) d\nu \end{aligned} \quad (45)$$

$E_p(t)$ 的谱密度是

$$\begin{aligned} F_{E_p}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{E_p}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n [S(\nu)|_{\nu=\frac{\lambda}{2}(f-f_0-n f_r)} + S(\nu)|_{\nu=\frac{\lambda}{2}(f+f_0-n f_r)}] \end{aligned} \quad (46)$$

将(46)和(25)对照, 显见

$$F_{E_p}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n F_E(f - nf_r) \quad (47)$$

考虑到 $\frac{b}{T_r} = f_r b \ll 1$, 对于不十分大的 n 来说有 $\alpha_n = \frac{2b}{T_r} \frac{\sin n2\pi f_r b}{n2\pi f_r b} = \frac{2b}{T_r}$; 又考虑到 $F_E(f)$ 只在不大的频域 $f_1 - f_2$ 内有值(图 3a); 所以在这个频域内 $F_{E_p}(f)$ 可表示为

$$F_{E_p}(f) = \frac{2b}{T_r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_E(f - nf_r) \quad f_1 \leq f \leq f_2 \quad (48)$$

从(47)(48)看出脉冲波列的谱密度 $F_{E_p}(f)$ 和连续波是不相同的, 前者展布在极宽的频域里。(见图 3abc) (46)、(47)式级数的每一项都给出了一个和 $F_E(f)$ 相同的谱密度(差一个因子 α_n), 级数的相邻项的频域也是相邻的, 它们彼此的距离是 f_r 。这里可能出现两种情况, (1) 若 $F_E(f)$ 取值的区间 $\Delta f = f_2 - f_1 < f_r$, 那末 $F_{E_p}(f)$ 的级数的各项所描绘的谱密度曲线就彼此不相交(图 3b); (2) 若 $\Delta f > f_r$, $F_{E_p}(f)$ 级数中各项的频域就彼此相交(图 3c), $F_{E_p}(f)$ 的曲线由图 3c 中的实线所示。在第二种情况下, 根据 $F_{E_p}(f)$ 就难于推断 $F_E(f)$ 和 $S(\nu)$ 。所以若要对信号作频谱分析, 就要采用脉冲重复频率 f_r 足够高的雷达, f_r 应该大于信号 $E(t)$ 的频域, 这样才有可能根据脉冲波列的谱密度 $F_{E_p}(f)$ 去推断 $F_E(f)$ 和 $S(\nu)$ 。

信号 $I(t)$ 也是受脉冲调制的 $I_p(t) = I(t)M(t)$, 用上面的办法可以得到 $I_p(t)$ 的谱密度 $F_{I_p}(f)$

$$F_{I_p}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n F_I(f - nf_r) \quad (49)$$

考虑到 $\frac{b}{T_r} \ll 1$, 在 $F_I(f)$ 取值的频域 $\Delta f = f_2 - f_1$ 内有

$$F_{I_p}(f) = \frac{2b}{T_r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_I(f - nf_r) \quad f_1 \leq f \leq f_2 \quad (50)$$

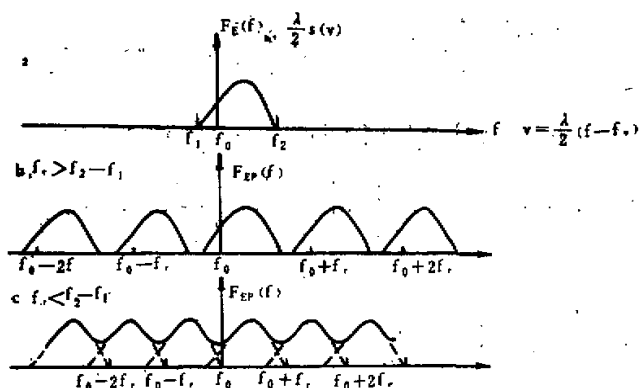


图 3 b, c 图中纵坐标的比例与 a 图不同。

所以, 为了对强度 $I_p(e)$ 作相关分析和谱分析, 也要采用脉冲重复频率大于 $I(e)$ 频域的雷达。普通的气象雷达 f_r 一般只有几百周/秒, 这是不够大的, 用它来作目的在于相关分析和谱分析的观测时, 需要注意。

值得提出的是此处得到(48), (50)两式和离散一时间过程的谱密度表达式一样^[4], 注意到这一点是很有意思的。

六、将有效速度分布密度转化成云和降水的微物理或运动学方面的知识

雷达测量得到的有效速度分布 $S(v)$ 需要加以转换, 以便把云和降水的微物理或运动学状况反映出来。关于这个问题可以分几种情况来讨论

1. 测云: 可以忽略云滴在重力场中的下落, 且认为所有云滴都和气流一起运动, 因此条件分布密度 $w_e(v)$ 的条件 e ——部分波振幅 (亦即云滴的尺度)——不再需要, 故有 $w_e(v) = w(v)$ 。这时(22)式变为

$$S(v) = w(v) \quad (51)$$

所以根据 $S(v)$ 可以推断云的运动学特性。这样的考虑对小雪来说也是合适的。

2. 测雨: 雨滴的速度可表为

$$v(e) = v_s(e) + v_a + v_T(e) \quad (52)$$

这里 $v_T(e)$ 是振幅为 e 的雨滴在湍流作用下的速度。在这种情况下 $w_e(v)$ 可表为^[9]

$$w_e(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_T^2(e)}} \exp \left[-\frac{[v - v_s(e) - v_a]^2}{2 v_T^2(e)} \right] \quad (53)$$

所以

$$S(v) = \int_0^\infty \frac{e^2}{e^2} w(e) \frac{1}{\sqrt{2\pi v_T^2(e)}} \exp \left[-\frac{[v - v_s(e) - v_a]^2}{2 v_T^2(e)} \right] de \quad (54)$$

若 $v_T(e)$ 已知, 上式就是第一类 Fredholm 积分方程。 $v_T(e)$ 除了和 e 有关外, 和湍流场的特性也有关系^[10]。若要由 $S(v)$ 去推算 $w(e)$, 只有尽可能合理地对 $v_T(e)$ 作某种假定, 这样得到的 $w(e)$, 自然有某种程度的不确定性。若湍流很弱 $v_T(e) \rightarrow 0$ 那末(54)式转化为

$$\begin{aligned} S(v) &= \int_0^\infty \frac{e^2}{e^2} w(e) \delta[v - v_s - v_s(e)] de \\ &= \frac{e^2}{e^2} w(e) \left[\frac{dv_s(e)}{de} \right]^{-1} \Big|_{e=v_s^{-1}(v-v_a)} \end{aligned}$$

设振幅 e 和 v_s 、半径 r 之间有关系 $e = e(r)$, $v_s(r) = f(r)$, 以 $w(r)$ 表示滴谱, 上式可进一步表为

$$S(v) = \frac{e^2(r)}{e^2(r)} w(r) [f'(r)]^{-1} \Big|_{r=f^{-1}(v-v_a)} \quad (55)$$

可见, 当 v_a 已知或等于零时可由 $S(v)$ 推断滴谱 $w(r)$ 。

从上述讨论可知: 对气象目标物的高频或低频雷达信号作相关分析与谱分析都有可

能推断云和降水的微物理或运动学的特性。作这种观测雷达的重复频率应大于电场的谱密度的取值范围。雷达测量结果应该用正确的转换公式化成关于滴谱、气流和湍流等知识并注意雷达提供的信息所包含的不确定性。

参 考 资 料

- [1] Д. И. Блохинцев, Акустика Неоднородной Движущейся Среды, (1946).
- [2] J. L. Lawson and G. E. Uhlenbeck, *Threshold Signals*, (1950) 50—53.
- [3] L. J. Battan, *Radar Meteorology*, 15.3 p. 144.
- [4] M. M. Siddiqui, *J. Res. National Bur. Stand.*, 66D, No. 5, (1962), p. 571—580.
- [5] B. B. Rogers, *J. Atmosph. Sci.*, 20, No. 2(1963), 170—174.
- [6] А. Г. Горелик, Ю. В. Мельничук, *Доклады А. Н. СССР*. Том. 140, №3, (1961) 579—582.
- [7] А. Г. Горелик, В. В. Костарев, А. А. Черняков, *Метеор. и Гидр.*, 1958, №5, 12—19.
- [8] B. M. Lhermitte, *Proceeding of 8th Weather Radar Conf.* (1960), 269—275.
- [9] B. B. Rogers and A. J. Chimera, *Proc. 8th Weather Radar Conf.*, (1960), p. 377—385.
- [10] J. D. Stackpole, *Proc. 9th Weather Radar Conf.*, (1961).

CORRELATIVE AND SPECTRAL ANALYSIS OF THE RADAR SIGNALS

Lee Chi-chen and Pan Nai-xian

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

The Doppler effect of moving scatterers causes the radar signals to appear as stochastic processes. Some useful knowledge about the clouds and precipitations can be obtained by analysing the statistical characteristics of these processes. A system containing several methods of measurement is developed in this paper, which enables us to reveal the substantial properties of each method and to evaluate their advantage and defects. Spectral analysis of pulse trains and the method for converting the results of radar measurement into the micro-physical or kinematical properties of clouds and precipitations are also discussed.