平流方程的数值研究

陈雄山
(中国科学院大气物理研究所)

提要

二维平流方程分别用二阶差分方案、四阶差分方案、一维三次样条函数方案及谱导数方案(假谱方案)进行长时间的数值积分,其中风场是给定的均匀旋转风场或形变风场,并分别以不同大小的圆锥状的物理量分布作为初值。数值试验的结果表明,谱导数方案的精度最高,没有位相误差;其次是一维三次样条函数方案;再其次是四阶差分方案;二阶差分方案的精度最差,畸变严重,位相误差大。

对上述四种方案给出用权重系数形式表示的统一的导数计算公式,看到高精度的导数计算公式是非局地性的。

一、引言

在电子计算机上用数值方法求解一组描述大气运动的流体力学和热力学方程组,是了解大气运动演变规律的重要方法之一. 进行有控制的数值试验有助于了解一些物理因子在大气运动演变中的作用,这对于建立天气予报的数值模式,尤其是对于建立中期天气予报的数值模式是很重要的. 在数值予报的误差中有物理上的原因,有数学上的原因,也有初始资料的原因. 对于一个物理过程考虑得很好的数值模式,如果它的计算方案很差,那么所得到的数值解与原方程组的解会相差很远,甚至根本不是原方程组的解,因此很有必要对一些计算方案进行一次考核.

由于描述大气运动演变规律的是一组非线性偏微分方程组,不易得到解析解,所以比较数值解的计算误差是很困难的. 我们知道平流过程是大气运动演变中重要的过程之一. 在运动方程、热通量方程及水汽方程中都包含着平流项,所以研究平流方程也具有一定的代表性. 在特定的风场下平流方程容易找到解析解,这样便于对不同的计算方案所得到的数值解与解析解进行比较. 选择一些优秀的计算方案用到数值予报中去,并可以挑选一些经得起长时期时间数值积分考验的计算方案用到中期数值予报中去.

目前在数值试验及数值予报中最流行的是二阶差分方案,如 Lilly[1]格式 Shuman[2]格式等. 近年来四阶差分方案的使用也逐渐增多,如 Kálnay-Rivas et al.[3] 及 Mihok & Kaitala[4] 等的工作. 使用三次样条函数方案的工作有 Price & MacPherson[5] 及 MacPherson & Kelly[6] 等. 使用 Fourier 变换的谱模式是比较多的,如 Platzman[7] 等的谱作用系数方案;

1978年3月14日收到.

谱变换方案(乘积在格点上进行)的工作如 Orszag[8,9], Machenhauer & Rasumussen[10], Bourke[11,12], Hoskin & Simmons[13], Daley et al.[14]等；谱导数方案(也称假谱方案)有 Orszag[15], Merilees[16,17] 等. 我们对二维平流方程分别用二阶差分方案、四阶差分方案、一维三次样条函数方案及谱导数方案进行长时间的数值积分. 为了便于比较数值解的精度及位相误差，使用与 Crowley[18], Molenkamp[19], Burstein & Mirin[20], Purnell[21] 及 Orszag[22] 等相同的圆锥状的初始场，但对圆锥取不同的大小.

在四种方案中计算导数的公式用统一的权重系数形式表示，以便于比较及构造高精度的导数计算方案.

二、二维平流方程的数值解法

考虑二维平流方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

其中 $H(x, y, t)$ 是被平流的任一物理量，$u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 分别是 x 及 y 方向的风速分量. 在 x 及 y 方向上取以 D 为周期的周期边界条件，则有

$$\left.\begin{aligned}&H(x+D, y, t)=H(x, y+D, t)=H(x+D, y+D, t)=H(x, y, t),\\&u(x+D, y)=u(x, y+D)=u(x+D, y+D)=u(x, y),\\&v(x+D, y)=v(x, y+D)=v(x+D, y+D)=v(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

初值 $H(x, y, 0)$ 取如下的形式

$$H(x, y, 0)=\begin{cases}1-\dfrac{r}{R}, & 当\ r\leqslant R\\ 0, & 当\ r>R\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $r=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}}$, (x_0, y_0) 为圆锥中心点的位置，R 是圆锥的半径.

风场分别取两种情况. 第一种风场是以 Ω 为角速度的均匀旋转风场

$$\left.\begin{aligned}u&=-\Omega(y-y_p)\\v&=\Omega(x-x_p)\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中(x_p, y_p)是均匀旋转风场的中心位置，角速度取 $\Omega=2\pi/T$，T 为周期，即经过 T 时刻旋转风场刚好转一圈. 第二种风场取形变风场

$$\left.\begin{aligned}u&=\alpha\\v&=\alpha\left(1+\cos\frac{2\pi x}{D}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中 α 为常数.

现在对平流方程(2.1)在离散的网格点上求数值解. 取空间网格距为 $\Delta x=\Delta y=d$，时间步长为 Δt，则 x 方向及 y 方向上的格点数是 $N=D/d$，并有 $x=l\Delta x$, $y=m\Delta y$, $t=\tau\Delta t$，其中 $(l=0, 1, 2, \cdots, N-1)$, $(m=0, 1, 2, \cdots, N-1)$, $(\tau=0, 1, 2, \cdots)$. 可以把 $H(x, y, t)$ 写成 $H(x, y, t)=H^{\tau}_{l,m}$，于是在离散格点上的平流方程可以写成

$$H_{l,m}^{\tau+1} = H_{l,m}^{\tau-1} - 2\Delta t\left[u_{l,m}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l,m} + v_{l,m}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{l,m}\right] \tag{2.6}$$

其中时间差分使用了中央差分，并使用数值予报中常用的"三步法"起步计算.

在数值计算中取 $\Delta x = \Delta y = d = 1$，$\Delta t = 0.5$，$D = 32$，则有 $N = 32$. 在初值(2.3)中圆锥半径分别取 4，2，1，圆锥中心点的坐标为 $x_0 = 16$，$y_0 = 8$. 在均匀旋转风场中其旋转中心的坐标为 $x_p = 16$，$y_p = 16$；取周期 $T = 400$，则旋转角速度为 $\Omega = 2\pi/400$. 在形变风场中取 $\alpha = D/T = 0.08$，这样经过 T 时刻在 x 方向及 y 方向移动的距离各为 D.

在离散格点上的平流方程(2.6)中对空间导数项 $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l,m}$ 及 $\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{l,m}$ 采用不同的方案，会得到不同精度的数值解. 现在采用二阶精度差分方案、四阶精度差分方案、一维三次样条函数方案及谱导数方案进行比较.

1. 二阶精度差分方案 空间导数取如下的形式

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l,m} &= (H_{l+1,m} - H_{l-1,m})/2d\\ \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{l,m} &= (H_{l,m+1} - H_{l,m-1})/2d\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

它的精度是 $O(d^2)$，于是平流方程(2.6)可以写成

$$H_{l,m}^{\tau+1} = H_{l,m}^{\tau-1} - \frac{2\Delta t}{2d}\left[u_{l,m}(H_{l+1,m} - H_{l-1,m}) + v_{l,m}(H_{l,m+1} - H_{l,m-1})\right] \tag{2.8}$$

在第一种风场及第二种风场的情况下，使用 Lilly[1] 格式或 Shuman[2] 格式只能得到同一个差分方程(2.8).

2. 四阶精度差分方案 空间导数取如下的形式

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l,m} &= \left[\frac{4}{3}(H_{l+1,m} - H_{l-1,m}) - \frac{1}{6}(H_{l+2,m} - H_{l-2,m})\right]/2d\\ \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{l,m} &= \left[\frac{4}{3}(H_{l,m+1} - H_{l,m-1}) - \frac{1}{6}(H_{l,m+2} - H_{l,m-2})\right]/2d\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

它的精度是 $O(d^4)$. Kálnay-Rivas et al.[3] 及 Mihok & Kaitala[4] 的四阶差分格式在第一种风场及第二种风场的情况下也只能得到与以(2.9)式代入(2.6)式后所得的方程一样的差分方程.

3. 一维三次样条函数方案 在等距 $\Delta x = d$ 及周期边界条件 $H(x + D) = H(x)$ 的情况下，一维三次样系函数 $H(x)$ 及其一阶导数 $\frac{\partial H}{\partial x}$ 在离散格点上成立线性方程组[23]

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l-1} + 4\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l} + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l+1} = \frac{3}{d}(H_{l+1} - H_{l-1}) \tag{2.10}$$

其中 $l = 0,1,2,\cdots,N-1$. 用追赶法来解线性方程组(2.10)就可以得到各格点上对 x 的导数值 $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)$. 用同样方法也能得到各格点上对 y 的导数值 $\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)$.

4. 谱导数方案 这里所指的谱导数是指用 Fourier 变换的方法求出格点上的导数

值. 在离散格点上取值的 $H_l(l=0,1,2,\cdots,N-1)$ 的有限项的 Fourier 变换为

$$G_k=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}H_l\exp\left(-\frac{i2\pi kl}{N}\right),(k=0,1,2,\cdots,N-1) \tag{2.11}$$

其中 G_k 为 H_l 的 Fourier 变换, $i=\sqrt{-1}$. Fourier 逆变换公式为

$$H_l=\sum_{k=0}^{N-1}G_k\exp\left(\frac{i2\pi kl}{N}\right),(l=0,1,2,\cdots,N-1) \tag{2.12}$$

则导数的表示式为

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_l=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{i2\pi\tilde{k}}{Nd}G_k\exp\left(\frac{i2\pi kl}{N}\right),(l=0,1,2,\cdots,N-1) \tag{2.13}$$

其中 $\tilde{k}$ 的取值要按如下的规则

$$\left.\begin{aligned}&\text{当}\quad 0\leqslant k<\frac{N}{2}\text{时},\tilde{k}=k,\\&\text{当}\quad k=\frac{N}{2}\text{时},\tilde{k}=0,\\&\text{当}\ \frac{N}{2}<k\leqslant N-1\text{时},\tilde{k}=k-N.\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

同理可得到对 y 方向的导数值.

这里所用的离散 Fourier 变换用快速 Fourier 变换(FFT)来计算. 自从 1965 年 Cooley & Tukey[24] 发表 FFT 的论文以来已有好多 FFT 的版本，其计算量也大小不等. Andrews[25] 的 FFT 的计算量比较小. 但我们在 Jagadeesen[26] 的流程图的基础上,对固定的格点数 $N=32$，对计算方案经过进一步简化，得到计算量更小的 FFT 计算方案,实数乘法次数比 Andrews[25] 的 FFT 方案少一半.

三、 数值计算结果

周期边界条件的二维平流方程(2.1)在均匀旋转风场(2.4)的情况下,它的解析解是已知的,即H场绕均匀旋转风场中心点(x_p, y_p)作等角速度运动,当 $t=T$ 时刚好绕风场中心点 (x_p, y_p)一周并回到原来的位置. 同样,周期边界条件的二维平流方程(2.1)在形变风场(2.5)的情况下,它的解析解也是已知的,即H场在 x 方向作 $u=\alpha$ 的等速运动,在 y 方向作 $v=\alpha\left(1+\cos\frac{2\pi x}{D}\right)$ 的变速运动. 在沿途上H场不断地遭受到拉长或压缩的形变. 但已取 $\alpha=D/T$,所以当 $t=T$ 时,刚好经过一个周期,在周期边界条件下,H场又回复到原来的形状及原来的位置. 初值 $H(x,y,0)$ 采用圆锥的形状是为了能更好地检验四个方案的精度. 因为圆锥的尖顶容易定位,圆锥的变形容易察觉.

现在已取 $\Delta t=0.5$, $T=400$, 所以一个周期需要计算 800 步. 在表 1 中总结了在均匀旋转风场下平流方程数值计算的结果，其中 S 为积分步数,R 为圆锥半径，d 为网格距，H_{max} 是在格点上的圆锥最高值，因为在数值计算中圆锥的尖顶会分裂成几个,故括号内的数值是圆锥尖顶附近的第二中心值，H_{min} 是H的格点最低值，λ_θ 为沿均匀旋转

风场的切向位相误差，以网格距 d 为单位，λ_r 为对应的法向位相误差. 从表 1 中看到谱导数方案最好，没有位相误差. 当圆锥半径取 $R=4d$ 时，积分 1600 步后仍能很好地保持圆锥的形状，圆锥高度只损失 4%；当 $R=d$ 时，积分 1600 步后，圆锥高度也只损失 37%，这是其他方案所达不到的. 其次是一维三次样条函数方案，已显示出有位相落后现象，但并不严重，当 $R=4d$ 时绕一圈后位相只落后 0.4 个格距. 我们所得的结果比 Purnell[21] 的样条函数迎风差方案要好，当圆锥绕 (x_p, y_p) 点转一圈后他的圆锥最高值为0.82，而我们的圆锥最高值为 0.88. 在我们的样系函数方案中当尺度变小 ($R=d$) 时，畸变已显著了，当积分到 1600 步时圆锥高度已损失 81%. 四阶差分方案比样条函数方案差，虽然当 $R=4d$ 时绕一圈后位相只落后 0.6 个格距，但是当 $R=d$ 时积分到 800 步圆锥已不可辨认了. 情况最差的是二阶差分方案，在尺度较大的 $R=4d$ 的情况下，积分到 800 步时圆锥位相落后 3.2 个格距，圆锥高度损失 45%；圆锥已严重畸变，并在圆锥的下游引起很大的波动，使格点最低值 H_{min} 达到−0.23；当 $R=2d$ 时已出现二个圆锥中心；$R=d$ 时积分到 400 步圆锥已不可辨认.

表1 在均匀旋转风场下平流方程数值计算的精度

方案	S	$R=4d$				$R=2d$				$R=d$			
		H_{max}	H_{min}	λ_θ	λ_r	H_{max}	H_{min}	λ_θ	λ_r	H_{max}	H_{min}	λ_θ	λ_r
二阶差分	800	0.55	−0.23	−3.2	0	0.23 (0.20)	−0.18	—	—	—	−0.13	—	—
	1600	0.47	−0.25	−3.4	0	0.21 (0.18)	−0.15	—	—	—	−0.13	—	—
四阶差分	800	0.82	−0.10	−0.6	0	0.38	−0.15	−1.5	0	—	−0.10	—	—
	1600	0.72	−0.15	−0.6	0	0.33	−0.16	−1.4	0	—	−0.08	—	—
样条函数	800	0.88	−0.04	−0.4	0	0.58	−0.17	−0.8	0	0.22	−0.09	−1.1	0
	1600	0.87	−0.06	−0.4	0	0.49	−0.17	−0.5	0	0.19	−0.10	—	—
谱导数	800	0.98	−0.02	0	0	0.97	−0.03	0	0	0.67	−0.15	0	0
	1600	0.96	−0.04	0	0	0.96	−0.06	0	0	0.63	−0.22	0	0

在差分方案中出现的上述现象可以用数值计算中的频散现象来说明. 以一维情形为例，具有均匀风速 U 的平流方程，当它写成二阶差分方案时对应的系统移速 U_2 为

$$U_2 = U\frac{\sin(2\pi k/N)}{2\pi k/N}, \tag{2.15}$$

当它写成四阶差分方案时对应的系统移速 U_4 为

$$U_4 = U\frac{\sin(2\pi k/N)}{2\pi k/N}\cdot\frac{4-\cos(2\pi k/N)}{3}. \tag{2.16}$$

现在系统的移速 U_2 及 U_4 与系统的波数有关，波数愈大移动愈慢，当波数大到 $k=N/2$ 时，系统移动速度为零，即 $U_2=U_4=0$. 虽然 U_4 比 U_2 要好一些，但这种频散现象仍然存在.

在表 2 中总结了在形变风场下平流方程数值计算的结果，其中 λ_x 及 λ_y 表示 x 方向

及 y 方向的位相误差，以格距为单位. 从表 2 中看到还是谱导数方案最好，没有位相误差,经过一个周期 ($T = 400$)后圆锥仍能回复到原来的形状及原来的位置,但圆锥高度损失已增大到 8%，比在均匀旋转风场的情况要差些. 样条函数方案、四阶差分方案及二阶差分方案的基本情况与在均匀旋转风场的情况大致一样，但圆锥高度损失增大. 在四阶差分方案及二阶差分方案的计算结果中已出现二个以上的圆锥中心,在 $R = d$ 的样条函数方案的计算中也出现二个圆锥中心. x 方向的位相误差 λ_x 普遍落后,但 y 方向的位相误差 λ_y 普遍超前. 这是由于在(2.5)式的形变风场中，x 方向以 $u = \alpha$ 的速度前进时有

表 2　在形变风场下平流方程数值计算的精度

方　案	S	$R = 4d$				$R = 2d$				$R = d$			
		H_{max}	H_{min}	λ_x	λ_y	H_{max}	H_{min}	λ_x	λ_y	H_{max}	H_{min}	λ_x	λ_y
二阶差分	800	0.44 (0.41)	−0.29	−3.3 (−1.5)	2.2 (0)	0.32 (0.27)	−0.15	—	—	—	−0.22	—	—
	1600	0.38 (0.23)	−0.24	−4.6 (0.5)	2.4 (−0.5)	—	−0.15	—	—	—	−0.12	—	—
四阶差分	800	0.63	−0.19	−0.5	0.5	0.37 (0.27)	−0.12	−1.2 (0)	1.4 (−0.5)	0.19 (0.16)	−0.10	—	—
	1600	0.59	−0.20	−0.8	0.5	0.30 (0.26)	−0.14	—	—	0.15 (0.14)	−0.12	—	—
样条函数	800	0.73	−0.17	−0.3	0.5	0.39	−0.15	−0.5	0.2	0.23 (0.20)	−0.11	—	—
	1600	0.70	−0.20	−0.4	1.0	0.35	−0.12	−1.0	1.5	0.19 (0.17)	−0.07	—	—
谱导数	800	0.92	−0.03	0	0	0.74	−0.15	0	0	0.48	−0.10	0	0
	1600	0.92	−0.02	0	0	0.72	−0.13	0	0	0.45	−0.10	0	0

位相落后现象,经过一个周期 ($T = 400$) 圆锥回不到原来的 (x_0, y_0) 点上，从形变风场(2.5)式看到 $v = \alpha[1 + \cos(2\pi x/D)]$,所以在 (x_0, y_0) 点以西的 v 比在 (x_0, y_0)点的 v 要大，所以 y 方向的位相误差 λ_y 会有超前现象. 二阶差分方案的效果最差，圆锥半径取 $R = 4d$ 时,积分到 800 步圆锥高度已损失 56%,而且出现二个圆锥中心;当 $R = d$ 时圆锥就很难辩认了,全场只见高高低低的小波动,已面目全非.

但是一个值得注意的现象是所有上述四个方案在均匀旋转风场及形变风场的数值计算中都能很好地保持平方守恒特性. 换言之，$\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} H_{l,m}^2$ 值随时间的相对变化不超过 10^{-4}. 以二阶差分方案为例,在形变风场及圆锥半径 $R = d$ 的情况下，$\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} H_{l,m}^2$ 值在初始时刻为 1.00000000000 而积分到 1600 步时该值变为 1.00000008999，即平方守恒性能保持得很好,但二阶差分由于其频散特性全场满是高高低低的小波动,已找不到原来的圆锥. 所以在这种情况下，二阶差分方案所求得的数值解已不是原来平流方程 (2.1) 的解. 谱导数方案在上述数值计算中同样能很好地保持平方守恒特性,而且它的精度很高，尤其当所描述的对象的尺度较小时，谱导数方案所求得的解的精度远远超过样条函数方

案、四阶差分方案及二阶差分方案.

目前国内外构造差分格式都很重视守恒性，像 Lilly[1] 二阶差分格式及 Shuman[2]二阶差分格式等虽然具有守恒性，但其他性能与上述二阶差分是一样的. 它们的缺点是位相落后，系统变形以及对不同波长的波动有不同移速的频散特性，它会激发出纯粹是计算上的原因所造成的新生系统. Miyakoda et al.[27,28] 以及 Druyan et al.[29] 等用二阶差分方案的数值预报模式对实际的初始场积分二个星期，再与天气实况对照，结果并不令人满意，除了初值及物理上的原因外，可能二阶差分方案对这种过程是很难描写好的.

在实际天气预报中已知较小尺度的天气系统会带来严重的天气现象，所以特别受到实际预报部门的重视. 但是在数值预报中二阶差分方案对较小尺度的天气系统的描述能力最差. 在这方面谱方法是很有希望的，它对较小尺度的天气系统的描述能力远远超过其他三个方案. 同样，在台风路径的预报上，在内含台风的数值预报模式中使用谱方法，其效果会比使用二阶差分方案要好.

在本节的末尾，想提一下上述四种方案在平流方程数值积分中的计算量问题. 若以二阶差分方案的计算量作为 1，则四阶差分方案的计算量为 1.5，样条函数方案的计算量为 4.7，谱导数方案的计算量为 10.

四、 导数计算公式的比较

在平流方程的数值解法中，对空间导数分别采用了二阶差分方案、四阶差分方案、一维三次样条函数方案及谱导数方案，所求得的数值解的精度是很不一样，相差悬殊. 其中以谱导数方案求得的精度最高. 二阶差分方案求得的精度最差. 在这四种方案中，求导数的方法总可以把它们看成是对离散格点上的变量 $H_l(l=0,1,2,\cdots,N-1)$经过线性代数运算后得到格点上的导数值$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_l$ $(l=0,1,2,\cdots,N-1)$. 现在考虑在周期边界条件下把它们写成统一的形式

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_l=\sum_{p=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}C_{l+p,l}H_{l+p},\quad(l=0,1,2,\cdots,N-1)\tag{4.1}$$

其中 $C_{l+p,l}$ 是特定的权重系数，不同的方案会有不同的权重系数.

在二阶差分方案中已知

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_l=\frac{1}{2\Delta x}(H_{l+1}-H_{l-1})\tag{4.2}$$

直接可以写出

$$\left.\begin{aligned}C_{l+1,l}&=\frac{1}{2\Delta x}\\C_{l-1,l}&=\frac{-1}{2\Delta x}\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

其余的权重系数都是零.

在四阶差分方案中，已知

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_l = \frac{1}{2\Delta x}\left[\frac{4}{3}(H_{l+1} - H_{l-1}) - \frac{1}{6}(H_{l+2} - H_{l-2})\right] \tag{4.4}$$

直接可以写出

$$\left.\begin{aligned} C_{l-2,l} &= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\Delta x} \\ C_{l-1,l} &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\Delta x} \\ C_{l+1,l} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\Delta x} \\ C_{l+2,l} &= -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\Delta x} \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

其余的权重系数也都是零。

表3 权重系数 $C_{l+p,l}\times\Delta x$

p	谱导数方案	样条方案	四阶差分方案	二阶差分方案
−16	0.000 000 000	0.000 000 000		
−15	−0.009 669 371	−0.000 000 007		
−14	0.019 529 176	0.000 000 029		
−13	−0.029 780 991	−0.000 000 110		
−12	0.040 665 321	0.000 000 411		
−11	−0.052 475 508	−0.000 001 534		
−10	0.065 598 284	0.000 005 723		
−9	−0.080 569 952	−0.000 021 360		
−8	0.098 174 770	0.000 079 715		
−7	−0.119 626 304	−0.000 297 501		
−6	0.145 928 927	0.001 110 289		
−5	−0.183 672 077	−0.004 143 654		
−4	0.237 014 862	0.015 464 328		
−3	−0.323 638 845	−0.057 713 659		
−2	0.493 557 900	0.215 390 309	0.083 333 333	
−1	−0.996 785 171	−0.803 847 577	−0.666 666 667	−0.500 000 000
0	0.000 000 000	0.000 000 000	0.000 000 000	0.000 000 000
1	0.996 785 171	0.803 847 577	0.666 666 667	0.500 000 000
2	−0.493 557 900	−0.215 390 309	−0.083 333 333	
3	0.323 638 845	0.057 713 659		
4	−0.237 014 862	−0.015 464 328		
5	0.183 672 077	0.004 143 654		
6	−0.145 928 927	−0.001 110 289		
7	0.119 626 304	0.000 297 501		
8	−0.098 174 770	−0.000 079 715		
9	0.080 569 952	0.000 021 360		
10	−0.065 598 284	−0.000 005 723		
11	0.052 475 508	0.000 001 534		
12	−0.040 665 321	−0.000 000 411		
13	0.029 780 991	0.000 000 110		
14	−0.019 529 176	−0.000 000 029		
15	0.009 669 371	0.000 000 007		

在一维三次样条函数方案中求权重系数 $C_{l+p,l}$ 比较复杂些，它与所取的格点数N有关. 现在不想求一般的表示式，只想得到在特定的 $N=32$ 的情况下的 $C_{l+p,l}$，则可以用下述简便的方法求得. 给定

$$H_{l+p}=\begin{cases}1, \text{当 } l+p=16\\ 0, \text{当 } l+p\neq 16\end{cases} \tag{4.6}$$
$$(l+p=0,1,2,\cdots,N-1)$$

利用已有的一维三次样条函数方案求导数的程序，立即可求得各格点上的导数值$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_l$，$(l=0,1,2,\cdots,N-1)$. 由(4.1)式并利用(4.6)式直接可写出

$$\left.\begin{aligned}&C_{l+0,l}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l=16},\\ &C_{l+1,l}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l=15},\ C_{l-1,l}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l=17}\\ &C_{l+2,l}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l=14},\ C_{l-2,l}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{l=18}\\ &\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\quad\vdots\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

利用所求得的$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_l$，$(l=0,1,2,\cdots,N-1)$，由(4.7)直接可求出权重系数 $C_{l+p,l}$.

在谱导数方案中求权重系数 $C_{l+p,l}$ 的方法与一维三次样条函数方案中求权重系数的方法完全一样，不在这里重复.

现在把四种求空间导数方案的统一公式中的权重系数 $C_{l+p,l}$ 列在表 3 中，以便于比较. 在表 3 中看到，在求导数该点的权重系数 $C_{l+0,l}$ 在四种方案中都为 0. 在四种方案中都成立 $C_{l+p,l}=-C_{l-p,l}$，即权重系数是呈反对称的. 在二阶差分方案中只有邻近二个格点的权重系数不为 0，而且取值也较小，只有 $\pm 0.5\times\frac{1}{\Delta x}$. 在四阶差分方案中也只有邻近四个格点的权重系数不为 0，取值比二阶差分方案的权重系数要大些，但大得不多. 在样条函数方案中情况就变了，在 32 个权重系数中有 30 个不为 0，权重系数的取值比四阶差分方案的权重系数要大，如 $C_{l\pm1,l}=\pm0.803847577\times\frac{1}{\Delta x}$，$C_{l\pm2,l}=\mp 0.215390309\times\frac{1}{\Delta x}$，是正负相间的. 但权重系数随距离的衰减很快，七、八个格距以上的权重系数基本上可以忽略不计. 在谱导数方案中，权重系数也有 30 个不为0，而且它的取值在四个方案中是最大的，如 $C_{l\pm1,l}$ 的数值已为二阶差分方案中的 $C_{l\pm1,l}$ 的二倍. 在谱导数方案中权重系数也是正负相间的，但是它的最大特点是随距离的衰减较慢，几乎空间各点的函数值对所求格点上的导数都有贡献. 在平流方程的数值计算中看到具有这种随距离的衰减较慢的权重系数的求导数方案才能得到较精确的数值解. 所以想用邻近几个格点来构造出高精度导数的计算公式是比较困难的.

参 考 资 料

[1] D. K. Lilly, On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. *Mon. Wea. Rev.*, **93**(1965), 11—26.

[2] F. G. Shuman, Numerical experiments with the primitive equations. Proc. Intern. Symp. NWP, Tokyo, *Met. Soc. Japan*, (1962), 85—107.

[3] E., Kálnay-Rives, A. Baylis and J. Storch, Experiments with the 4th order GISS general circulation model. Annalen der Meteorologie Nr. 11, 25—27, Simulation of large-scale atmospheric processes, Hamburg, sponsored by DMG and AMS, (1976), pp. 268.

[4] W. F. Mihok, and J. E. Kaitala, U. S. Navy fleet numerical weather central operatianal five-level global fourth-order primitive-equation model. *Mon. Wea. Rev.*, **104**(1976), 1527—1550.

[5] G. V. Priee, and A. K. MacPherson, A numerical weather forecasting method using cubic splines on a variable mesh. *J. Atm. Sci.*, **12**(1973), 1102—1113.

[6] A. K. MacPherson, and R. E. Kelly, A horizontal telescoping grid model with a vertically nested layer using bi-cubic splines. *Mon. Wea. Rev.*, **104**(1976), 932—941.

[7] G. W. Platzman, The spectral form of the vorticity equation. *J. Met.* **17**(1960), 635—644.

[8] S. A. Orszag, Transform method for calculation of vector-coupled sums: Application to the spectral form of the vorticity equation. *J. Atm. Sci.*, **27**(1970), 890—895.

[9] S. A. Orszag, Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. 1. Galerkin (spectral) representations. *Stud. in Appl. Math.* Vol. L (1971), 293—327.

[10] B. Machenhauer, and E. Resumussen. On the integration of the spectral hydrodynamical equations by a transform method. Institute of Theoretical Meteorology, University of Copenhagen, Report No. 3, (1972).

[11] W. Bourke, An efficient, one-level, primitive-equation spectral model. *Mon. Wea. Rev.*, **100** (1972), 683—689.

[12] W. Bourke, A multi-level spectral model. I. Formulation and hemispheric integration. *Mon. Wea. Rev.*, **102**(1974), 687—701.

[13] B. J. Hoskin, and A. J. Simmons, A multi-layer spectral model and the semi-implicit method. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **101**(1975), 637—655.

[14] R. Daley, C. Girard, J. Henderson and I. Simmonds, Short-term forecasting with a multi-level spectral primitive equation model Part I—model formulation. Atmosphere, **14**(1976), 98—116.

[15] S. A. Orszag, Comparison of pseudospectral and spectral approximation. *Stud. in Appl. Math.*, **51**(1972), 253—259.

[16] P. E. Merilees, The pseudospectral approximation applied to the shallow water equations on a sphere. Atmosphere, **11**(1973), 13—20.

[17] P. E. Merilees, Numerical experiments with the pseudospectral method in spherical coordinates. Atmosphere, **12**(1974), 77—96.

[18] W. P. Crowley, Numerical advection experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **96**(1968), 1—11.

[19] C. R. Molenkamp, Accuracy of finite-difference methods applied to the advection equation. *J. Appl. Met.*, 7(1968), 160—167.

[20] S. Z. Burstein, and A. A. Mirin, Third order difference methods for hyperbolic equations. *J. Comp. Phys.*, **13**(1970), 547—571.

[21] D. K. Purnell, Solution of the advective equation by upstream interpolation with a cubic spline. *Mon. Wea. Rev.*, **104**(1976), 42—48.

[22] S. A. Orszag, Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. *J. Fluid Mech.*, **49**(1971), 75—112.

[23] J. H., Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, The theory of splines and their applications. Academic Press, New York and London, (1967), pp. 284.

[24] J. W. Cooley, and J. W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, **19**(1965), 295—301.

[25] H. Andrews, A high-speed algorithm for the computer generation of Fourier transforms. IEEE trans. on computers, vol. C-17 (1968), 373—375.

[26] M. Jagadeesan, n-dimensional fast Fourier transform. Proc. IEEE 13th Midwest Symposium on Circuit Theory. (1970), III.2.1—III.2.8.

[27] K. Miyakoda, J. Smagorinsky, R. F. Strickler and G. D. Hembree, Experimental extended predictions with a nine-level hemispheric model. *Mon. Wea. Rev.*, 97(1969), 1—76.
[28] K. Miyakoda, G. D. Hembree, R. F. Strickler and I. Shulman, Cumulative results of extended forecast experiments. I. Model performance for winter cases. *Mon. Wea. Rev.*, 100(1972), 836—855.
[29] L. M. Druyan, R. C. J. Somerville and W. J. Quirk, Extended-range forecasts with the GISS model of the global atmosphere: *Mon. Wea. Rev.*, 103(1975), 779—795.

NUMERICAL STUDY OF THE ADVECTION EQUATION

Chen Yung-san
(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

The advection equation in two space dimensions is integrated numerically in a long period using the second-order finite difference scheme, the fourth-order finite difference scheme, the cubic spline scheme and the spectral derivative scheme (the pseudospectral scheme), respectively. In these experiments, the velocity field is assumed to be the uniform rotational velocity field or the deformation velocity field, and the conical distributions with the different radii are chosen as the initial conditions. It is shown numerically that the spectral derivative scheme which has not the phase errors gives results significantly more accurate than those of the other schemes, the cubic spline scheme is less accurate than the spectral derivative scheme, the fourth-order finite difference scheme is less accurate than the cubic spline scheme, and the second-order finite difference scheme gives results least accurate in terms of both amplitude and phase errors.

The general derivative formulas of th four schemes mentioned above are given in the form of weight coefficients. It is shown that the derivative formula of high accuracy is non-local.