第5卷 第2期 大气科学 Vol. 5, No. 2
1981 年 6 月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA June, 1981

热带大气运动的长波和超长波(一)

李麦村　　姚棣荣
(中国科学院大气物理研究所)　(杭州大学地理系)

提　　要

对热带干大气运动的长波、纬向超长波(纬向扰动尺度 $L_1 \sim 10^4$ 公里,经向扰动尺度 $L_2 \sim 10^3$ 公里)和经向超长波($L_1 \sim 10^3$ 公里,$L_2 \sim 10^4$ 公里)进行了尺度分析,得到了适合这些运动的近似方程. 对于纬向超长波,与长波的情况一样为正压无辐散运动;但在经向超长波时,则涡度方程中存在辐散项,这一结果与 Matsuno 得到的在热带存在 Rossby 波和惯性-重力波混合的情况是一致的. 同时,在存在基本气流切变的情况下,对线性化扰动方程进行了频率分析,结果指出,当 $n \geq 1$ 时,Rossby 波和惯性-重力波是可分的;当 $n=0$,而纬向尺度 $L_1 \sim 1000$ 公里时,存在混合 Rossby-重力波,这就证实了上述尺度分析的结果是正确的. 于是,把尺度分析的结果与热带波动运动中 Rossby 波和惯性-重力波是可分的或混合的特性统一了起来.

一、引　言

热带地区的数值预报、全球大气的数值试验、季风理论研究和长期天气预报,都需要对热带大气运动作进一步研究,因此,近年来人们对热带大气运动进行了多方面的工作,对热带大气活动规律有了许多新的认识,但是,关于热带大气运动的基本性质,现今还未深入了解. Charney[1] 指出在无凝结大气中,热带大气运动是正压无辐散的,在这种模型中只存在 Rossby 波,而将重力波滤掉了,但其后 Matsuno[2] 等人得到了热带大气运动中存在一种混合 Rossby-重力波,这样,两种方法所得的结果有所差别,这种差别的实质在于运动的尺度不同. 在 Matsuno 的结果中指出,在一般情况下,这两种波仍有可分性,只有在 $n=0$ 时,才出现混合 Rossby-重力波,因为他在求本征函数时,采用了 $y \to \pm\infty$ 时,$v \to 0$ 的边界条件,而 $n=0$ 是相当于在经向没有 $v=0$ 的点,也就是说在 y 方向上的尺度为无穷大,这说明在他的分析中,y 方向的尺度比 x 方向的尺度至少大了一个量级,所以,如果我们改变 Charney 尺度分析中的经向尺度,取 $L_2 \sim 10^7$ 米,则应当得到在涡度方程中出现散度项的结果. Murakami[3] 沿着这样的想法,采用与赤道相距一有限距离 y_w 处,$v=0$ 的情况,研究了 y_w 的变化对所得到的解的影响,指出在 $y_w < 3000$ 公里,纬向波长在 1000—30,000 公里范围内,Rossby 波和惯性-重力波是可分的,而 $y_w > 3000$ 公里,纬向波长在 10,000 公里附近,这两种波就不能区分,是混合的. 我们认为,这种结果的获得采用尺度分析,可能比较自然.

1979 年 5 月 26 日收到修改稿.

李麦村[4] 对中纬度的大气运动作了超长波的尺度分析，建立了超长波运动的理论模型．本文对热带干大气运动采用纬向和经向超长波分析，得到了新的结果．

二、无因次运动方程

在赤道 β 平面上，无外源（热源、地形）、无粘性的绝热的运动方程组为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial p}=\beta yv-\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial p}=-\beta yu-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial p}+u\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial p}+v\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial p}+s\omega=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{4}$$

式中 $s=-\frac{RT}{p\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}$，是层结参数，$\beta=\frac{\partial f}{\partial y}$．令

$$\phi=\phi_0(p)+\phi'(x,y,p,t) \tag{5}$$

$\phi_0(p)$ 是标准大气的位势高度，ϕ' 是位势的起伏部分．其它符号是一般动力气象学中常用的．现取如下特征尺度：

$$L_1x'=x,\ L_2y'=y,\ u_0u'=u,\ v_0v'=v \tag{6}$$

$$\frac{1}{T}=\frac{u_0}{L_1},\ Tt'=t,\ \beta_0\beta'=\beta \tag{7}$$

$$\omega_0\omega'=\omega,\ s_0s'=s,\ P_0p'=p \tag{8}$$

因为在热带地区准地转关系不能满足，则有

$$\frac{\delta\phi_x}{f_0L_1v_0}\sim R\sim\frac{u_0}{f_0L_1},\quad \frac{\delta\phi_y}{f_0L_2u_0}\sim R\sim\frac{u_0}{f_0L_1}$$

所以位势起伏部分的特征量为：

$$\delta\phi_x\sim u_0v_0,\quad \delta\phi_y\sim\frac{u_0^2L_2}{L_1} \tag{9}$$

将 (6)、(7)、(8)、(9) 式代人 (3) 式得：

$$\frac{u_0^2v_0^2}{L_1P_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial p}+u\frac{\partial^2}{\partial x\partial p}+v\frac{\partial^2}{\partial y\partial p}\right)\phi+\omega_0s_0\omega s=0 \tag{10}$$

在这里和下面，我们都略去了各无因次量右上角的撇号．由(10)式得到：

$$\omega_0\sim R_i^{-1}\frac{P_0u_0}{L_1} \tag{11}$$

式中

$$R_i=\frac{P_0^2s_0}{u_0v_0} \tag{12}$$

是 Richardson 数．散度的特征表达式 D_0 为：

$$D_0 \sim \frac{\omega_0}{P_0} \sim R_i^{-1}\frac{u_0}{L_1} \tag{13}$$

将(1)和(2)式分别进行涡度和散度运算，并代人特征量(6)、(7)、(8)和(9)式，省去中间运算过程，得到如下方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{L_1v_0}{L_2u_0}v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta+\frac{2\Omega\cos\varphi}{a}\frac{L_1v_0}{u_0\zeta_0}\beta v+\frac{2\Omega\cos\varphi}{a}\frac{L_2}{\zeta_0}R_i^{-1}\beta yD$$
$$+R_i^{-1}\left(\zeta D+\omega\frac{\partial\zeta}{\partial p}+\frac{v_0}{L_1\zeta_0}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{u_0}{L_2\zeta_0}\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}\right)=0 \tag{14}$$

$$R_i^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{L_1v_0}{L_2u_0}v\frac{\partial}{\partial y}\right)D$$
$$=\frac{2\Omega\cos\varphi}{a}\frac{L_1^2L_2}{u_0^2}\zeta_0\beta y\zeta-\frac{2\Omega\cos\varphi}{a}\frac{L_1^2}{u_0}\beta u-\frac{v_0}{u_0}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{L_1}{L_2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$
$$+2\frac{L_1v_0}{L_2u_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-R_i^{-2}\left(D^2+\omega\frac{\partial D}{\partial p}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{L_1v_0}{L_2u_0}\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial p}\right) \tag{15}$$

由(10)和(11)式得到

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial p}+u\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial p}+v\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial p}+s\omega=0 \tag{16}$$

在(14)和(15)式中，φ 是地理纬度，a 是地球半径．方程中除特征量之外，所有的量都是无因次的，其量级为 10^0．在热带地区，取

$$\frac{2\Omega\cos\varphi}{a}\sim 10^{-11}\,(1/\text{米秒})$$

因为在干大气中，$\omega_0\sim 3\times10^{-4}$ 毫巴/秒[5]，于是由(11)和(12)式可以估计 s_0，即

$$s_0\sim\frac{u_0^2v_0}{L_1P_0\omega_0} \tag{17}$$

其中 P_0 取 1000 毫巴，则对于 $L_1\sim10^6$ 米和 10^7 米时，s_0 约为 3×10^{-3}—3×10^{-4} 米²/秒毫巴²．

三、纬向超长波

所谓纬向超长波，就是指扰动的东西方向尺度为 10^4 公里，而南北方向尺度为 10^3 公里．对这类超长波，我们取如下特征尺度：

$$L_1\sim10^7\,\text{米},\ L_2\sim10^6\,\text{米},\ u_0\sim10^1\,\text{米/秒},\ v_0\sim10^0\,\text{米/秒} \tag{18}$$

则

$$\zeta_0\sim\frac{v_0}{L_1}-\frac{u_0}{L_2}\sim\frac{u_0}{L_2} \tag{19}$$

于是由(12)式得

$$R_i\sim 3\times10^1 \tag{20}$$

则由(14)和(15)式得到零级近似的涡度方程和散度方程为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta+\beta v=0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\beta y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\beta u \tag{22}$$

在涡度方程中，βyD 项比 βv 项小了一个量级，在散度方程中，$\beta y\zeta$ 项与 βu 项是同量级。(21)、(22)和(16)式就是描写纬向超长波的近似方程。(21)式左端说明，当水平尺度不均一时，涡度方程对这类超长波仍有预报意义。

若取特征量为：

$$L_1\sim L_2\sim 10^7\text{米},\ u_0\sim v_0\sim 10^1\text{米/秒} \tag{23}$$

则

$$R_i\sim 3\times 10^0 \tag{24}$$

由(14)式得

$$\beta yD\sim\beta v \tag{25}$$

这是 Burger[6] 的结果。

四、经向超长波

所谓经向超长波，是指环流经向发展时期，扰动的南北方向尺度比东西方向尺度要大得多的一种大槽大脊。取特征量为：

$$L_1\sim 10^6\text{米},\ L_2\sim 10^7\text{米},\ u_0\sim v_0\sim 10^1\text{米/秒} \tag{26}$$

则

$$\zeta_0\sim\frac{v_0}{L_1}-\frac{u_0}{L_2}\sim\frac{v_0}{L_1} \tag{27}$$

$$R_i\sim 3\times 10^1 \tag{28}$$

由(14)和(15)式得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta+\beta v+\beta yD=0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\beta y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\beta u \tag{30}$$

涡度方程(29)与纬向超长波的(21)式相比，多保留了散度项 βyD。

五、长 波

若取

$$L_1\sim L_2\sim 10^6\text{米},\ u_0\sim v_0\sim 10^1\text{米/秒} \tag{31}$$

则

$$R_i\sim 3\times 10^1 \tag{32}$$

由(14)和(15)式得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta+\beta v=0 \tag{33}$$

$$\Delta\phi=\beta y\Delta\psi-\beta u+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{34}$$

这是 Charney[1] 的结果，它是描写热带大气长波活动的模式。其后，有许多人都得到过这样的结果。

六、频率方程

为了进一步讨论热带大气大尺度扰动的特征，先将方程(1)—(4)对大气基本状态 U 和 ϕ 进行线性化，即令

$$u=U(y)+u',\ v=v',\ \omega=\omega',\ \phi=\phi(p)+\phi' \tag{35}$$

其中 u'、v'、ω' 和 ϕ' 是扰动量，这里假设了基本气流 U 仅是 y 的函数。略去右上角的撇号，线性化后的方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial U}{\partial y}-\beta yv=-\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{36}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+U\frac{\partial v}{\partial x}+\beta yu=-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial p}+U\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial p}+s\omega=0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{39}$$

为了方便，我们取 Rossby 参数 β 和重力内波波速 C ($C^2=P_0^2s_0$) 这样两个基本参数，于是水平尺度单位 L 和时间尺度单位 T 规定为：

$$L=\left(\frac{C}{\beta}\right)^{1/2},\quad T=\frac{1}{\beta L}=(C\beta)^{-1/2} \tag{40}$$

垂直尺度单位为 P。由此规定无因次变量为：

$$\left.\begin{aligned}&x',\ y'=L(x,\ y),\ p'=Pp,\ t'=Tt\\&(u',\ v',\ \omega')=C\left[u,\ iv,\ \omega\frac{P}{L}\right]e^{i(kx+mp+\nu t)}\\&\phi'=C^2\phi e^{i(kx+mp+\nu t)}\\&U'=CU\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

式中带撇号的变量是有量纲的，没有撇号的变量是无量纲的，而且 u, v, ω 和 ϕ 是 y 的函数。k 和 m 分别表示在 x 方向和垂直方向的无因次波数，ν 是波的无因次频率，它们与有因次量 k'、m'、ν' 有如下关系：

$$\nu'=\beta L\nu,\quad k=k'L,\quad m=m'P \tag{42}$$

另外，我们取 $s=C^2m^2/P^2$，在计算中取 s 为常数。于是由(36)—(39)式得到如下无量纲方程：

$$\sigma u-y^*v=-k\phi \tag{43}$$

$$\sigma v + yu = -\phi_y \tag{44}$$

$$\sigma\phi = m\omega \tag{45}$$

$$ku + v_y + m\omega = 0 \tag{46}$$

式中下标 y 表示偏导数,而

$$\sigma = (\nu + kU), \quad y^* = y - U_y \tag{47}$$

为了确定波长与频率之间的色散关系,由(45)和(46)式消去 ω, 得

$$ku + v_y + \sigma\phi = 0 \tag{48}$$

再由(43)和(48)式,可以得到对于 $\sigma \neq k$ 的 u 和 ϕ 的解:

$$\Delta u = -kv_y - \sigma y^* v \tag{49}$$

$$\Delta\phi = \sigma v_y + k y^* v \tag{50}$$

式中

$$\Delta = k^2 - \sigma^2 \tag{51}$$

把这些关系式代入(44)式,得到如下关于 v 的二阶微分方程:

$$\frac{d^2v}{dy^2} - \Delta^{-1}\Delta_y \frac{dv}{dy} + \left[\frac{k}{\sigma}\left(1 - \frac{d^2U}{dy^2} - \Delta^{-1}\Delta_y y^*\right) - \Delta - yy^*\right] v = 0 \tag{52}$$

为了求解这个方程,我们作如下变换,令

$$v = v^* e^{\int \frac{1}{2}\Delta^{-1}\Delta_y dy} \tag{53}$$

则得

$$\frac{d^2v^*}{dy^2} + \left[\frac{1}{2}\Delta^{-1}\Delta_{yy} - \frac{3}{4}(\Delta^{-1}\Delta_y)^2 + \frac{k}{\sigma}\left(1 - \frac{d^2U}{dy^2} + \Delta^{-1}\Delta_y \frac{dU}{dy}\right)\right.$$
$$\left. - \Delta - \left(\frac{k}{\sigma}\Delta^{-1}\Delta_y - \frac{dU}{dy}\right)y - y^2\right] v^* = 0 \tag{54}$$

下面分两种情况进行讨论.

1. 假定 U 为常数,即基本气流具有如下的形式:

$$U(y) = U_0 = 常数 \tag{55}$$

$$\frac{d^2U^*}{dy^2} + \left[\frac{k}{\sigma_0} - \Delta_0 - y^2\right] v^* = 0 \tag{56}$$

式中

$$\sigma_0 = \nu + kU_0, \quad \Delta_0 = k^2 - \sigma_0^2$$

为了运算的方便,令对 y 的符号作一变换,即

$$y_0 = -y \tag{57}$$

则(56)式仍为

$$\frac{d^2v^*}{dy_0^2} + \left[\frac{k}{\sigma_0} - \Delta_0 - y_0^2\right] v^* = 0 \tag{58}$$

这是 Shrödinger 方程. 因为我们讨论热带赤道附近的波动运动,在远离赤道时可以认为扰动消失,所以取边界条件为:

$$y_0 \to \pm\infty, \quad v^* \to 0 \tag{59}$$

方程(58)在齐次边界条件(59)下,具有非零解的条件为:

$$\frac{k}{\sigma_0}-\Delta_0=2n+1,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{60}$$

此时(58)式的解和相应的函数 u 和 ϕ 的振幅为：

$$v^*=e^{-\frac{1}{2}y_0^2}H_n(y_0) \tag{61.a}$$

$$u=-\frac{1}{k+\sigma_0}\left\{\frac{k}{k-\sigma_0}\frac{dH_n}{dy_0}-y_0H_n\right\}e^{-\frac{1}{2}y_0^2} \tag{61.b}$$

$$\phi=\frac{1}{k+\sigma_0}\left\{\frac{k}{k-\sigma_0}\frac{dH_n}{dy_0}+y_0H_n\right\}e^{-\frac{1}{2}y_0^2} \tag{61.c}$$

式中 $H_n(y_0)$ 是 n 阶 Hermite 多项式．(60) 式就是我们所讨论问题中的频率方程，它表示了频率与经向波节数 n 之间的关系．由(60)式可得：

$$\sigma_0^2-k^2+\frac{k}{\sigma_0}=2n+1 \tag{62}$$

对于 $n\geqslant 1$，当 k 很大时，(62)式的近似解为：

$$\nu_1\cong\frac{k}{k^2+2n+1}-kU_0 \tag{63.a}$$

$$\nu_{2,3}\cong\pm\sqrt{k^2+2n+1}-kU_0 \tag{63.b}$$

ν_1 表示向西传布的 Rossby 波，而 $\nu_{2,3}$ 分别表示向西和向东传布的惯性-重力波．如果我们采用量纲参数来描写上述波的相速度，可以看得更清楚．其相应的相速度为：

$$C_1=-\frac{\beta}{k^2+\frac{\beta}{C}(2n+1)}+U_0 \tag{64.a}$$

$$C_{2,3}=\mp C\sqrt{1+\frac{1}{k^2}\frac{\beta}{C}(2n+1)}+U_0 \tag{64.b}$$

在式中已略去了有量纲参数右上角上的撇号．上述结果表明，在经向扰动尺度不是很大时，Rossby 波与惯性-重力波可以明显的区分．这与 Murakami[5] 所得到的结果是符合的．

对于 $n=0$ 时，即经向扰动尺度很大时，(62)式可以写成：

$$(\sigma_0-k)[\sigma_0^2+k\sigma_0-1]=0 \tag{65}$$

其中一个根 $\sigma_0=k$ 是不存在的，因为在推导(52)式时利用了(49)式的关系，即

$$u=\frac{-kv_y-\sigma y^*v}{(k-\sigma)(k+\sigma)}$$

考虑到(55)式，则此处 $y=y^*$，对于这一表达式，它要求分母不等于零，否则不能满足方程(44)和边界条件(59)．所以，在 $n=0$ 时两个频率的允许解为：

$$\nu_1=-\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^{1/2}-\frac{k}{2}-kU_0 \tag{66.a}$$

$$\nu_2=\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^{1/2}-\frac{k}{2}-kU_0 \tag{66.b}$$

ν_1 是向东传布的惯性-重力波，而 ν_2 是向西传布的混合 Rossby-重力波．当

$$0\leqslant k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$$

时，ν_2 相当于向西传布的惯性-重力波，而 $k \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，ν_2 相当于 Rossby 波，可见，在 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的情况下，Rossby 波和惯性-重力波才是混合的. 此时，由(42)式可以算得 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时的纬向波长 L_x 为 10^4 公里，即相当于纬向扰动尺度 $L_1 \sim 10^3$ 公里. 这表明纬向波长在 10,000 公里附近，而经向扰动尺度为无穷大，或者比纬向尺度至少大一个量级时，才出现混合的 Rossby-重力波. 这也与 Murakami[3] 所得到的结果相一致.

在 $n=0$ 的情况下，(58)式的解和相应的函数 u 和 ϕ 的振幅应为：

$$v^* = e^{-\frac{1}{2}y_0^2} \tag{67.a}$$

$$u = \phi = \frac{y_0}{k-\sigma_0} e^{-\frac{1}{2}y_0^2} \tag{67.b}$$

2. 如果不考虑基本气流的切变，例如假定 $U=0$ 的情况，则(52)和(59)式变成：

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left(\frac{k}{\sigma} + \nu^2 - k^2 - y^2\right) v = 0 \tag{68}$$

$$y \to \pm\infty, \quad v \to 0 \tag{69}$$

这就是 Matsuno[2]、郭晓岚[8,9]讨论过的方程. 它的本征函数和频率方程分别为：

$$v = e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \tag{70}$$

$$\nu^2 - k^2 + \frac{k}{\nu} = 2n + 1 \tag{71}$$

在 $n \geqslant 1$ 时，(71)式的近似解为：

$$\nu_1 \cong \frac{k}{(k^2 + 2n + 1)} \tag{72.a}$$

$$\nu_{2,3} \cong \pm\sqrt{k^2 + 2n + 1} \tag{72.b}$$

表明 Rossby 波和惯性-重力波是可分的.

对于 $n=0$，(71) 式可写成：

$$(\nu - k)(\nu^2 + k\nu - 1) = 0 \tag{73}$$

上式的两个允许解是：

$$\nu_1 = -\left(\frac{k^2}{4} + 1\right)^{1/2} - \frac{k}{2}, \tag{74.a}$$

为向东传布的惯性-重力波.

$$\nu_2 = \left(\frac{k^2}{4} + 1\right)^{1/2} - \frac{k}{2} \tag{74.b}$$

为向西传布的混合 Rossby-重力波.

另外，在赤道地区还存在一种热带波动，即 Kelvin 波，它的特征是风的经向分量为零. 它不能包含在上面的解中，因而要单独进行讨论. 在 (43)、(44) 和 (48) 式中，令 $v \equiv 0$，则有

$$\sigma u = -k\phi \tag{75}$$

$$yu = \phi_y \tag{76}$$

$$ku + \sigma\phi = 0 \tag{77}$$

由(75)和(77)式可得：

$$-\frac{k}{u}\phi=-\frac{k}{\phi}u=0$$

则

$$\phi=\pm u \tag{78}$$

代入(76)式得：

$$\phi=u=e^{-\frac{1}{2}y^2} \tag{79}$$

$$\phi=-u=e^{\frac{1}{2}y^2} \tag{80}$$

后一个解不满足边界条件、所以(79)式就是 Kelvin 波解．同时，由(75)和(76)式可以得到如下的频率方程：

$$(k-\sigma)(k+\sigma)=0 \tag{81}$$

其中一个根 $\sigma=k$ 是不存在的，所以得到 Kelvin 波的频率为：

$$\nu=-k-kU \tag{82}$$

当 $U=0$ 时，则上式变成：

$$\nu=-k \tag{83}$$

这也与 Matsuno[2]、郭晓岚[8,9]等人的结果是一样的．

七、结　　论

通过对超长波的尺度分析和考虑基本气流的水平切变时线性化扰动方程的频率分析，我们得到如下结果：

1. 对于热带干大气的纬向超长波，与长波一样是正压无辐散运动，描写这类运动的涡度方程(21)和(33)中，只存在 Rossby 波，这说明在纬向扰动尺度比经向尺度大一个量级，或者两者都是 10^3 公里时，Rossby 波和惯性-重力波可以明显区分，因而在无辐散条件下，可以把重力波滤掉；而在频率分析中，当 $n\geqslant 1$，即经向扰动尺度不是很大时，得到了 Rossby 波和惯性-重力波可分的结果．显然，这两种不同方法所得到的结果是一致的．

2. 对于经向超长波，我们得到的涡度方程(29)中，却保留了辐散项，这表明在经向扰动尺度比纬向尺度大一个量级时，有可能 Rossby 波和惯性-重力波是不可分的，是混合在一起的，这也与频率分析中当 $n=0$，即经向扰动尺度很大，而纬向波长在 10,000 公里附近时，存在混合 Rossby-重力波的结果是符合的．

3. 由此可见，Charney 所得到的热带干大气运动是正压无辐散的与 Matsuno 所得到的热带存在一种混合 Rossby-重力波的结果，可以采用超长波的尺度分析将它们统一起来．也就是说，纬向超长波和长波，描写了热带大气中的正压无辐散运动，即表明 Rossby 波和惯性-重力波是可分的；而经向超长波就是热带大气运动中的混合 Rossby-重力波．

参　考　文　献

[1] Charney, J. G. A note on large-scale motions in the tropics, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 607—609, 1963.
[2] Matsuno, T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area, *J. Meteor. Soc. Japan.*, **44**, 25—42.

1966.
[3] Murakami, T. Large-scale disturbances in a dry tropical atmosphere, Syono Memorial, *J. Meteor. Soc. Japan.*, 699—717, 1972.
[4] 李麦村，超长波的尺度分析，大气科学，第2期，114—122，1977.
[5] Lindzen, R. S. Scale analysis and tropical wave motions, Dynamics of the tropical atmosphere, note from a colloquium, 127—134, Summer 1972.
[6] Burger, A. P. Scale consideration of planetary motions of the atmosphere, *Tellus*, **10**, 195—205, 1958.
[7] Bennett, J. R. and Young, J. A. The influence of latitudinal wind shear uponlarge-scale wave propagation into the tropics, *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 202—214, 1971.
[8] Kuo, H. L. Instability theory of large-scale disturbances in the tropical, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 2229—2245, 1975.
[9] Kuo, H. L. Characteristics of disturbances in the atmosphere and ocans, *Pure and Applied Geophysics*, **115**, 915—936, 1977.

THE LONG WAVE AND ULTRA-LONG WAVE IN THE TROPICS (1)

Li Mai-cun
(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences*)

Yao Di-rong
(*Department of Geography, University of Hangzhou*)

Abstract

The scale analysis for the long wave and zonal ultra-long wave (the zonal scale of the perturbance $L_1 \sim 10^4$ km, the meridional scale $L_2 \sim 10^3$ km) and meridional ultra-long wave ($L_1 \sim 10^3$ km, $L_2 \sim 10^4$ km) is carried out, and a set of approximate equations suitable to the motion of these waves in a dry tropical atmosphere is obtained. For the zonal ultra-long wave, the motion of which is the same with that of long wave, the vorticity equation is barotropic nondivergence; while for meridional ultra-long wave the vorticity equation has a divergence term. This result agrees with that of Matsuno who obtained the mixed Rossby-gravity wave in the dry tropical atmosphere. Under the condition of shear of basic current, the frequency analysis for the linearized disturbance equations is carried out. It is found that Rossby wave and gravity wave may be separated for $n \geqslant 1$, but for $n=0$, $L_1 \sim 1000$ km, the mixed Rossby-gravity wave will appear. Hence it is confirmed that above results of scale analysis are correct. The consistency between frequency analysis and scale analysis is established.