

有地形数值模式中坐标变换和 气压梯度力计算问题的讨论

颜 宏 钱永甫

(中国科学院兰州高原大气物理研究所)

一、前 言

大气动力学微分方程是通过把牛顿第二定律、质量守恒定律及能量守恒定律用于有限小空气微团,然后令微团体积趋于无限小时得到的。因此数值模式的大气动力学方程实际上经历了差分→微分(或再经过坐标变换)→差分这样三种形式的变换过程。在微分意义上,动力学微分方程组(不论取平流形式还是通量形式)和经典坐标变换公式无疑都是正确的,但是由于数值预报总是通过求解差分方程来实现的,因此对于数值模式而言,存在着一个独特的问题,这就是必须保持动力学方程组的差分—微分—差分一致性。人们往往只注意了微分方程化为差分方程所必须保持一致性,而对于第一种形式(差分)和第三种形式(也是差分)之间是否一致,并未多加注意。

在垂直坐标的变换中就存在着这样的问题。众所周知,在进行坐标变换时一般都利用一种我们称之为经典公式的变换公式。但由于大气中某些物理量(特别是气压、密度、温度)的垂直变化往往远大于水平变化,因此将经典变换公式按中央差分方法差分时,会造成很大的计算误差,特别是这些“误差”往往与地形有关,因而随着积分时间的增加会在某些特定的地区积累而造成严重的后果。因此如何根据大气的这种特性,设计更为适宜的坐标变换公式是值得研究的一个问题。

本文根据大气的各向异性特点及差分—微分—差分相一致的观点推导一般坐标变换公式,讨论经典变换公式与一般变换公式在差分计算中的差别。关于 σ 坐标系的气压梯度力计算问题,我们从不同角度出发,用一般变换公式设计了各种计算方案,并用同一模式和初始场与现行的一些方法进行了预报对比。

二、差分—微分—差分相一致的一般变换公式

设 A 为某一物理量, ξ 和 η 是两种不同的垂直坐标,我们来求 A 在这两种坐标系中对独立变量 (x, y, t, ξ) 和 (x, y, t, η) 的微分式之间的关系。令 S 代表 x, y 或 t ,如图1所示,则

1979年4月11日收到第三次修改稿。

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\xi &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{A_1 - A_{-1}}{2\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{A'_1 + A_1 - A'_1 - A'_{-1} - A_{-1} + A'_{-1}}{2\Delta S} \\
 &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{A'_1 - A'_{-1}}{2\Delta S} - \frac{A'_1 - A_1}{2\Delta S} - \frac{A_{-1} - A'_{-1}}{2\Delta S} \right) \\
 &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{A'_1 - A'_{-1}}{2\Delta S} - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{A'_1 - A_1}{2\Delta S} + \frac{A_{-1} - A'_{-1}}{2\Delta S} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\eta - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta S} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_1 (\xi_1 - \xi_0) + \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{-1} (\xi_0 - \xi_{-1}) \right] \\
 &= \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\eta - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta S} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_1 \xi_1 - \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_1 \xi_0 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{-1} \xi_0 - \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{-1} \xi_{-1} \right] \\
 &= \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\eta - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_1 \xi_1 - \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{-1} \xi_{-1}}{2\Delta S} - \xi_0 \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_1 - \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{-1}}{2\Delta S} \right], \quad (1')
 \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\xi &= \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\eta - \frac{\partial}{\partial S} \left(\xi \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_\eta \\
 &\quad + \xi \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_\eta, \quad (1)
 \end{aligned}$$

或

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\xi = \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\eta - \frac{\partial}{\partial S} \left[(\xi - \xi_0) \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_\eta \right].$$

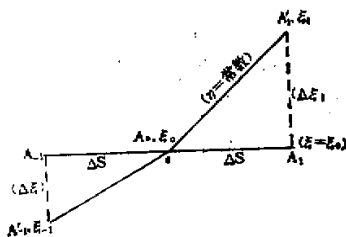


图 1 一般坐标变换公式推导示意

此即为水平微商的一般坐标变换公式，垂直微商的变换仍与经典公式相同，即

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}. \quad (2)$$

从推导过程可以看出，当用中央差方法将(1)式差分，可以还原成原来的差分形式，因此(1)式具有差分—微分—差分一致性。在计算时， $\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_1$ 和 $\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_{-1}$ 拟分别取 ξ_1 和 ξ_0 以及 ξ_0 和 ξ_{-1} 之间的平均值为好。

(1)式还可以从另一个角度导出：将任一物理量 A 沿曲面 $\eta(S, \xi)$ 在 (S_0, ξ_0) 点的邻域内展开成泰勒级数，只保留二阶项，则

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\xi \Delta S + \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)_\xi \Delta \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial S^2}\right) \Delta S^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial S \partial \xi}\right) \Delta S \Delta \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}\right) \Delta \xi^2.
 \end{aligned}$$

因此沿 ξ 面 A 的水平微商为

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{A - A_0}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\Delta \xi}{\Delta S} + \frac{\partial^2 A}{\partial S \partial \xi} \Delta \xi \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial S^2} \Delta S + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \frac{\Delta \xi}{\Delta S} \Delta \xi \right) \Bigg].$$

根据大气各向异性的特点以及量级的比较, 上式可简化为:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi} = \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\eta} - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\Delta \xi}{\Delta S} + \frac{\partial^2 A}{\partial S \partial \xi} \Delta \xi \right).$$

又因 $\Delta \xi = \xi - \xi_0$, $\xi_0 = \text{常数}$, 故 $\frac{\partial \xi}{\partial S} = \frac{\partial(\Delta \xi)}{\partial S}$, 则有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi} &= \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\eta} - \frac{\partial}{\partial S} \left[(\xi - \xi_0) \frac{\partial A}{\partial \xi} \right] \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\eta} - \frac{\partial}{\partial S} \left(\xi \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) + \xi \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right), \end{aligned}$$

此即为(1)式。因此不难看出(1)式包含了一个二阶项, 考虑了物理量 A 的水平导数的垂直变化(或 A 的垂直导数的水平变化), 所以它的截断误差较小。

将(1)式右端第二、三项微分展开, 约去相同的项, 可得经典变换公式

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi} = \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\eta} - \frac{\partial A}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial S} \right)_{\eta}. \quad (3)$$

因此, (1)式已包含了经典公式(3), 具有更普遍的性质, 而化成中央差分经典公式只是一般公式(1)退化为二阶精度时的特例。

若定义

$$R(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi}^{(1)} - \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi}$$

为用中央差展开时经典公式相对于一般公式的误差, 则

$$R(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi}^{(1)} - \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\eta} + \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial S} \right)_{\eta} \quad (4)$$

这里上标(1)和(3)分别表示按(1)式和(3)式计算。为讨论方便计, 并不失一般性, 令 $S = x$, $\xi = z$, 将 $\left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi}^{(1)}$ 视为 $\left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{\xi}$ 的真值, 并略去上标(1), 则有

$$R(z, \eta) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_z - \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{\eta} + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\eta} \quad (5)$$

显然, (5)中 $\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_z$ 表示 A 的水平变化, $\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{\eta}$ 表示 A 沿 η 面变化的水平投影, $\frac{\partial A}{\partial z}$ 表示 A 的垂直变化, $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\eta}$ 表示 η 面的坡度。我们先来看看各项的量级, 化为差分时有

$$\begin{aligned} O \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{\eta} \right] &= \frac{A'_1 - A'_{-1}}{2\Delta x}, \\ O \left[\frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\eta} \right] &= O \left[\frac{A'_1 - A'_{-1}}{z_1 - z_{-1}} \cdot \frac{z_1 - z_{-1}}{2\Delta x} \right] = O \left[\frac{A'_1 - A'_{-1}}{2\Delta x} \right]. \end{aligned}$$

由此可见两项量级相同。于是我们可以分两种情况来讨论误差 $R(z, \eta)$ 。

(i) 设

$$O \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_z \right] = O \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{\eta} \right] \quad (6)$$

即(5)式右端三项量级相同,设计算精度达 10^{-n} ($n \geq 1$),则显然有

$$O[R(z, \eta)] = 10^{-n} \times O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right].$$

当 $n \geq 1$ 时, $R(z, \eta)$ 就是一个小项。但此时必有

$$O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right] = O\left[\frac{\partial A}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\eta\right],$$

故

$$O\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\eta\right] = O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right] / O\left[\frac{\partial A}{\partial z}\right].$$

上述讨论说明,当物理量 A 沿 x 、 y 、 z 方向变化是各向异性时,经典变换公式的简单中央差格式的适用性受到一定条件的约束,这就是:坐标面的坡度不得大于物理量 A 的水平变化和垂直变化之比。

大气中气压、密度、温度等物理量的垂直变化远大于水平变化。例如当水平尺度 $L = 10^6 \text{ cm}$, 垂直特征尺度 $H = 10^6 \text{ cm}$ 时,气压的水平变化特征尺度为 $\Delta P = 50 \text{ mb}$, 而垂直变化的特征尺度为 $P_0 = 1000 \text{ mb}$, 所以

$$O\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \leq O\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) / O\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \frac{\Delta P}{L} \div \frac{P_0}{H} = 5 \times 10^{-4}.$$

这就是说,如采用经典变换公式的简单中央差格式, η 面的坡度必须不大于 5×10^{-4} , 否则会出现不能容许的误差。但此时对计算精度要求不必很高。

$$(ii) \text{ 设 } O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right] \ll O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_\eta\right] = O\left[\frac{\partial A}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\eta\right] \quad (7)$$

即真值是两大量的小差。若设

$$O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_\eta\right] = 10^m \times O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right] (m \geq 1),$$

且计算精度为 10^{-n} , 则有

$$O[R(z, \eta)] \sim 10^{-(n-m)} \times O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right],$$

为使经典公式可用,必须有 $n - m \geq 1$, 即 $n \geq m + 1$ 。因为 $m \geq 1$, 故有 $n \geq 2$, 这就是说在(7)式的情况下,计算精度必须很高,否则误差 $R(z, \eta)$ 的量级很可能与真值相当,甚至更大,从而使 $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z$ 的计算值落入误差范围之内,因而计算不准。这表示 $O\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\eta\right]$ 很大,即

$$O\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\eta\right] = 10^m \times O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right] / O\left[\frac{\partial A}{\partial z}\right] (m \geq 1)$$

的时候,为保证计算精度,经典公式(3)已不能再按简单中央差展开。

总之,以上讨论一致说明了按中央差展开的经典变换公式能够满足计算精度要求的必要条件是物理量 A 的水平变化(沿等 ξ 面)与沿等 η 面上的水平变化投影具有相同的量级:

$$O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z\right] = O\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_\eta\right],$$

或者计算精度至少能达到

$$10^{-n} = 10^{-(m+1)} = 10^{-1} \times O \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_x \right] / O \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_y \right].$$

σ 坐标中引入的真实地形, 其陡峭的坡度最大可达 10^{-2} 以上, 因此不满足第一条件, 同时简单的中央差的计算精度又不可能满足第二个条件。因此, 经典变换公式的简单中央差格式是不能用于与地形有密切关系的物理量的变换的, 必须设计更为精确的差分格式。从下面的数值试验可以看到, 从这里导出的一般变换公式出发, 可以构造出比较精确又比较简单的格式, 其物理意义也更明确。

三、 σ 坐标系气压梯度力计算的各种方案

只要在模式大气的下部采用了 σ 坐标, 都会遇到同样的气压梯度力计算问题。尽管人们已经采取了种种方法^[2-4], 但这至今仍是有地形 σ 坐标数值预报的一大难题。

我们认为, σ 坐标中气压梯度力计算不准的主要根源是不加分析地沿用了经典变换公式的简单中央差格式; 而所谓的“大量余差”问题可能不是问题的关键。为了说明这一观点, 我们对各种气压梯度力计算方案进行了对比预报试验。

用作对比试验的模式是球面网格的 P - σ 混合坐标系二层原始方程模式^[5], 最大地形坡度为 5.4×10^{-3} 。在所有的试验中, 上部 P 坐标系中梯度力计算公式除 No. 1 采用积分平均法外, 都采用完全相同的形式, 因此只是下部大气的 σ 坐标系中采用不同计算方法, 以便比较其优劣。

用作对比的 σ 坐标系气压梯度力计算方案共十种, 各种方法简要说明如下:

(1) 多元大气中的积分平均法 (No. 1)

其特点是考虑整层状态的平均, 先将气压梯度力项在等压面上差分, 再分别对整层积分求得^[5]。这里只给出计算公式:

$$(\overline{\nabla \phi})_f = g \nabla \left\{ \left(z_5 + \frac{T_5}{\gamma} \right) - \frac{T_5}{0.002 P_{50}^* \gamma (1 + \kappa)} [(1 + 0.002 P_{50}^*)^{\kappa+1} - 1] \right\}, \quad (8)$$

式中 $(\overline{\nabla \phi})_f$ 代表整层 ($\sigma: 0 \sim 1$ 即 $P_5 \sim P_s$) 中的平均气压梯度力, ∇ 表示中央差, z 是位势高度, T 是温度, $\gamma = \frac{\partial T}{\partial z}$ 为多元大气温度递减率。带下标 0 的是计算点上的值, 作为参数引入, 不参加差分, 其余符号见表 1 说明。

(2) 多元大气中的平均法 (No. 2)

令下部大气平均气压梯度力为

$$(\overline{\nabla \phi})_f = \frac{1}{2} [\nabla \phi_5 + (\nabla \phi)_{P=P_{50}}],$$

将 $(\nabla \phi)_{P=P_{50}}$ 在 $P = P_{50}$ 等压面上算出来, 有

$$(\nabla \phi)_f = g \nabla \left\{ z_5 + \frac{T_5}{2\gamma} [(1 - (1 + 0.002 P_{50}^*)^\kappa)] \right\}. \quad (9)$$

这里利用了多元大气等压面高度计算公式^[5]。

表 1 气压梯度力计算方案表

编号	方法名称	计算公式 ($\sigma = \frac{P - P_s}{P_s - P_s}$)	参考文献
1	多元大气层分平均法	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \nabla \left\{ \left(z_s + \frac{T_s}{\gamma} \right) - \frac{T_s}{0.002 P_{s0}^* \gamma (1 + \kappa)} [(1 + 0.002 P_{s0}^*)^{\kappa+1} - 1] \right\}$	[5]
2	多元大气上下层平均法	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \nabla \left\{ z_s + \frac{T_s}{2\gamma} [1 - (1 + 0.002 P_{s0}^*)^{\kappa}] \right\}$	[5]
3	上下层平均法	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = \frac{g}{2} \left\{ \nabla z_s + \frac{1}{\rho_{s0}} \left[\frac{1}{g} \nabla P_s^* + 0.5 (\nabla (\rho_{s0} + \rho_s) z_s - z_{s0} \nabla \rho_s) \right] \right\}$	[1]
4	$z \rightarrow \sigma$ 变换法	$\left(\frac{1}{\rho} \nabla_s P \right)_r = \frac{g}{2 \rho_{s0}} \left[\nabla (\rho_{s0} + \rho_s) z_s - z_{s0} \nabla \rho_s + \frac{1}{g} \nabla P_s^* \right]$	
5	局地等密度 $P \rightarrow \sigma$ 变换法	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \left\{ \nabla z_s + \frac{2}{g} \left[\nabla \left(\frac{P_s^*}{\rho_{s0} + \rho_s} \right) - P_{s0}^* \nabla \left(\frac{1}{\rho_{s0} + \rho_s} \right) \right] \right\}$	
6	经典计算公式	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \left(\nabla z_s + \frac{RT_s}{g} \nabla \ln P_r \right)$	
7	回插到 P 坐标计算法	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \left\{ \nabla z_s - \nabla \frac{T_s}{\gamma} [(0.001 P_{s0}^* + 1)^{\kappa} - 1] \right\}$	[8]
8	局地等温 $P \rightarrow \sigma$ 变换法	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \left\{ \nabla z_s + \frac{R}{g} \bar{T} \nabla \ln P_r \right\}; \bar{T}$ 表示差分方向上的平均	[6]
9	静力扣除法(一)	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \nabla \left(\frac{T_s - T_r}{\gamma} \right) + R \left[T_r \nabla \ln \left(\frac{P_r}{\bar{P}_r} \right) + (T_r - \bar{T}_r) \nabla \ln \bar{P}_r \right]$	[2]
10	静力扣除法(二)	$\langle \nabla_P \phi \rangle_r = g \nabla (z_s - \bar{z}_r) + R (T_r \nabla \ln P_r - \bar{T}_r \nabla \ln \bar{P}_r)$	[3]

注: 上表中 z_s 为 500 毫巴高度, T_s 为 500 毫巴温度, $P_s^* = P_s - P_s$ 为下部大气气压厚度,

$$\gamma = \frac{g}{R} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$$

为递减率, $K = \frac{R}{g} \gamma$; 下标中, r 表示在 $\sigma = \frac{1}{2}$ 面上取值, 0 表示在格点 (i, j) 上取值, s 表示在地形面 ($\sigma = 1$) 上取值; 在 No. 9 和 10 中, $\bar{T} = 0.055^\circ \text{K}/\text{米}$, $P_0 = 1000 \text{ mb}$, $T_0 = 303^\circ \text{K}$, $\bar{K} = 0.1611$, $\bar{T} = T_0 - \bar{T}_s$, $\bar{P} = P_0 \left(\frac{\bar{T}}{T_0} \right)^{1/\bar{K}}$, $\bar{P}_r = \frac{1}{2} (\bar{P}_i + 500)$, $\bar{T}_r = T_0 \left(\frac{\bar{P}_r}{P_0} \right)^{\bar{K}}$, $\bar{z}_r = \frac{T_0 - \bar{T}_r}{\bar{T}}$.

(3) 上下层平均法 (No. 3)

令下部大气平均气压梯度力为

$$\langle \nabla \phi \rangle_r = \frac{1}{2} \left[\nabla \phi_s + \frac{1}{\rho} (\nabla_H P)_{s=z_{s0}} \right],$$

其中地面气压梯度力用 z 坐标形式, 由一般变换公式 (1) 变换到 $\sigma = 1$ 的地形面上, 并略去了等高面上的密度变化*, 有

$$\langle \nabla \phi \rangle_r = \frac{1}{2} \{ \nabla \phi_s + \alpha \nabla P_s^* + 0.5 g [\nabla (1 + \theta) z_s - z_s \nabla \theta] \} \quad (10)$$

式中 $\alpha = \frac{RT_s}{P_s}$ 是地面空气比容, $\theta = \rho_s / \rho_{s0}$ 是地面周围格点与计算点空气密度之比, z_s 是地形高度.

* 本文中凡说明略去某坐标面上某物理量的变化, 指的是不考虑坐标面上相邻格点比物理量的差异对梯度力计算的影响.

No. 2 和 No. 3 都用上下界面上气压梯度力的算术平均来近似该层的平均气压梯度力。

(4) $z \rightarrow \sigma$ 变换法 (No. 4)

利用一般变换公式(1)把 z 坐标系气压梯度力项变换到 σ 坐标中去, 可得

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla_z P\right)_7 = \frac{1}{\rho_7} \{ \nabla_\sigma P_7 + [\nabla_\sigma(\rho_7 \phi_7) - \phi_7 \nabla_\sigma \rho_7] \} \quad (11)$$

式中下标 7 表示在 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上取值, $P_7 = \frac{1}{2} P_s^* + 500$. 计算时取 ρ_7 为周围格点与计算点的值的算术平均, 即不考虑密度在等高面上的变化, 利用多元大气特性

$$\phi_7 = \phi_s - \frac{T_7 - T_s}{\gamma} g,$$

即可用(11)式计算。

(5) 局地等密度 $P \rightarrow \sigma$ 变换法 (No. 5)

利用一般变换公式(1)把 P 坐标系气压梯度力项变换到 σ 坐标系中, 可得

$$(\nabla_P \phi)_7 = \nabla_\sigma \phi_7 + \nabla_\sigma \left(\frac{P_7}{\rho_7} \right) - P_7 \nabla_\sigma \left(\frac{1}{\rho_7} \right), \quad (12)$$

式中 ρ_7 用周围格点与计算点之间的平均值, 此法忽略了等压面上的密度变化。

(6) $P \rightarrow \sigma$ 经典变换法 (No. 6)

利用经典变换公式(3), 可得

$$(\nabla_P \phi)_7 = \nabla_\sigma \phi_7 + \frac{1}{\rho_7} \nabla_\sigma P_7 = \nabla_\sigma \phi_7 + RT_7 \nabla \ln P_7, \quad (13)$$

(7) 回插到 P 坐标算法 (No. 7)

这里利用了多元大气特性进行回插, 有

$$(\nabla_P \phi)_7 = g \left\{ \nabla_{z_5} - \nabla \frac{T_s}{\gamma} [(0.001 P_{s0}^* + 1)^e - 1] \right\}. \quad (14)$$

(8) 局地等温 $P \rightarrow \sigma$ 变换法 (No. 8)

由(1'), 一般变换公式也可写成

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_s = \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_7 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial S} \right)_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial S} \right)_{-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial S} \right)_{-1} \right], \quad (15)$$

式中下标 1 和 -1 分别表示在 0 点附近的左右极限。利用(15)式有

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_\sigma + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{RT}{P} \right)_1 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_1 + \left(\frac{RT}{P} \right)_{-1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{-1} \right] \quad (15')$$

因

$$\begin{aligned} \left(\frac{RT}{P} \right)_1 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_1 &= \left(RT \frac{\partial \ln P}{\partial x} \right)_1 = R \frac{T_0 + T_1}{2} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial x} \right)_1, \\ \left(\frac{RT}{P} \right)_{-1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{-1} &= R \frac{T_0 + T_{-1}}{2} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial x} \right)_{-1}, \end{aligned}$$

则有

$$(\nabla_P \phi)_7 = \nabla_\sigma \phi_7 + \overline{RT_7 \nabla_\sigma \ln P_7}, \quad (16)$$

式中右端第二项上的横线表示对该项取差分方向上的平均。注意这是在运用了一般变换

公式, 令 $\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \ln P}{\partial x}$, 并忽略了等压面上的温度变化后求得的. No. 4、5、8 都是在不同假设下运用一般变换公式的结果. 这也说明 (1) 式具有更普遍的特性. (16) 式也曾由 Corby 从另外的角度得到^[6].

(9) 静力扣除法(一)(No. 9)

设平均多元大气的 $\tilde{\gamma} = \text{常数}$, $\tilde{T} = T_0 - \tilde{\gamma} \tilde{z}$, $\tilde{P} = P_0 \left(\frac{\tilde{T}}{T_0} \right)^{1/\tilde{\gamma}}$, $\tilde{\kappa} = \frac{R}{g} \tilde{\gamma} = \frac{\partial \ln \tilde{T}}{\partial \ln \tilde{P}}$, $\tilde{z} = z_s + \frac{1}{\tilde{\gamma}} (\tilde{T}_s - \tilde{T})$, 式中“ $\sim$ ”表示平均多元大气的量. 代入用于地面 ($\sigma = 1$) 的经典变换公式(3)有

$$g \frac{\partial z_s}{\partial x} + R \tilde{T}_s \frac{\partial \ln \tilde{P}_s}{\partial x} = g \frac{\partial z_s}{\partial x} + R (T_0 - \tilde{\gamma} z_s) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[\left(1 - \frac{\tilde{\gamma} z_s}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \tilde{\gamma}}} P_0 \right] = 0.$$

因此对于 $\sigma = \frac{1}{2}$ 的 P_7 面有

$$(\nabla_P \phi)_7 = g \nabla_\sigma z_7 + R T_7 \nabla_\sigma \ln P_7 = g \nabla_\sigma (z_7 - z_s) + R (T_7 \nabla_\sigma \ln P_7 - \tilde{T}_s \nabla \ln \tilde{P}_s),$$

利用多元大气特性, 上式变成

$$(\nabla_P \phi)_7 = g \nabla_\sigma \left(\frac{T_s - T_7}{\tilde{\gamma}} \right) + R \left[T_7 \nabla_\sigma \ln \left(\frac{P_7}{\tilde{P}_s} \right) + (T_7 - \tilde{T}_s) \nabla_\sigma \ln \tilde{P}_s \right]. \quad (17)$$

此法与[6]采用的方法基本相同.

(10) 静力扣除法(二)(No. 10)

与 No. 9 类似地引入平均多元大气, 代入用 $\sigma = \frac{1}{2}$ 面上的经典变换公式(3)有

$$g \frac{\partial \tilde{z}_7}{\partial x} + R \tilde{T}_7 \frac{\partial \ln \tilde{P}_7}{\partial x} = g \frac{\partial \tilde{z}_7}{\partial x} + R (T_0 - \tilde{\gamma} \tilde{z}_7) \frac{\partial}{\partial x} \ln [P_0 (1 - \tilde{\gamma} \tilde{z}_7 / T_0)^{1/\tilde{\gamma}}] = 0$$

因此

$$(\nabla_P \phi)_7 = g \nabla_\sigma (z_7 - \tilde{z}_7) + R (T_7 \nabla_\sigma \ln P_7 - \tilde{T}_7 \nabla \ln \tilde{P}_7). \quad (18)$$

此法与 Gary^[7] 基本相同. 不难看出, No. 6、9、10 都用了经典变换公式. 十种方案的计算公式和主要特点见表 1 和 2.

四、对比试验结果分析和各种方法的评价

上述十种方案用同一初始场(1972年6月19日08时)作对比预报试验, 除 No. 2、3、5 只作 24 小时预报外, 其余七种均作 48 小时预报. 下面来讨论各种方法的优劣.

预报与实况的比较是对方法优劣的最好评价, 图 2 是 1972 年 6 月 19 日(a), 20 日(b) 和 21 日(c) 08 时的实况(点线是地面图, 实线是 500 毫巴). 图 3 是 No. 1 的 24 小时(a) 和 48 小时(b) 预报图. 将它们与实况比较, 可发现贝湖阻高崩溃过程报得相当成功, 西太平洋副高北跳趋势虽也报出, 但比实况弱. 此外高原附近系统的预报是成功的, 如 48 小时预报图上成都小槽位置与实况完全一致. 高原上也无异常系统. 从地面图上看, 它对西路(巴湖一带)和东路(华北一带)的冷空气入侵也具有较好的预报能力, 甚至 48 小时后形成于上海及其以东海面的一冷高(1010 毫巴)都报得与实况相同.

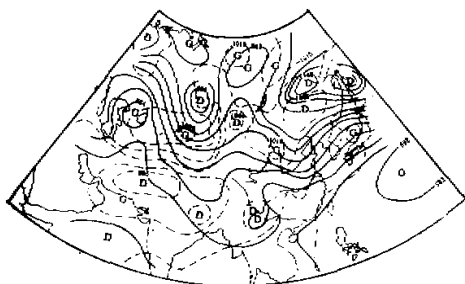


图 2 (a)

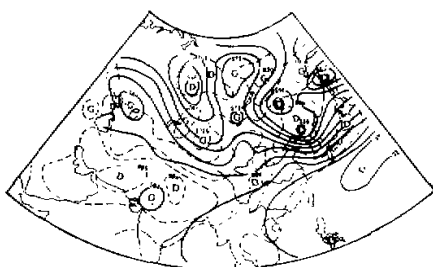


图 2 (b)

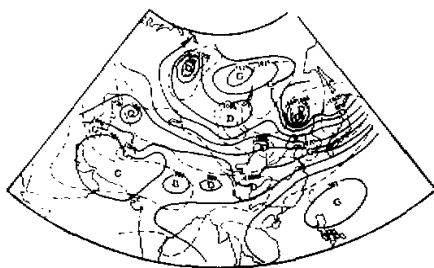


图 2 (c)

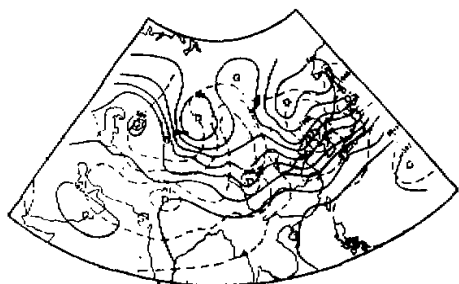


图 3 (a)

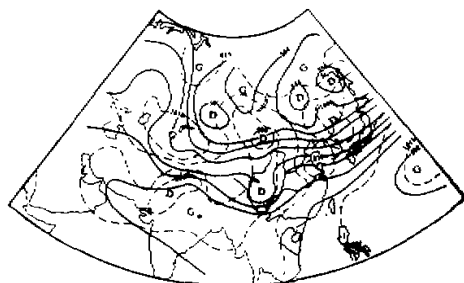


图 3 (b)

No. 4 的 24 小时(图 4(a)) 和 48 小时(图 4(b)) 预报图上, 贝湖阻高崩溃和西太平洋副高的北抬都基本上报出, 但高原地区报得不如 No. 1。在孟加拉湾西北方出现了强度为 588 位势什米的小高压, 且 90°E 、 30°N 的低压也报得太深。此外地面图的 24 小时预报与 No. 1 相差无几。巴湖冷高的入侵强度和速度甚至比 No. 1 更接近实况。但 48 小时地面预报图上在 30°N 、 90°E 处出现了一个虚假的强度为 1010 毫巴的冷高。

No. 5 的 24 小时 500 毫巴预报图上(图略), 高原地区整个偏高, 副高北抬也报得不如 No. 4。除此之外, 与 No. 4 十分相似。

No. 8 的 500 毫巴预报(图略)也与 No. 4 相似, 高原地区不如 No. 4, 孟加拉湾北方高度始终偏高。地面图也与 No. 4 相似, 但 48 小时地面预报图上高原虚假冷高更强达 1020



图 4(a)

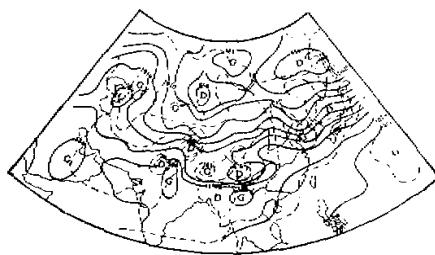


图 4(b)

毫巴。这说明略去等压面的温度变化比略去等高面的密度变化引起的误差要大些。

No. 6 的 24 小时(图略)和 48 小时(图 5) 预报图上, 500 毫巴在平原地区与实况尚可

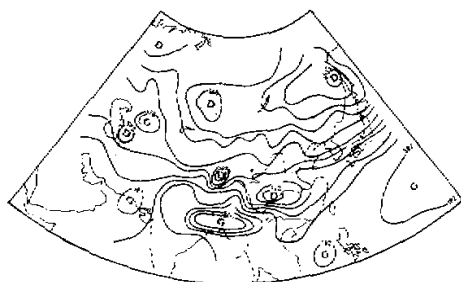


图 5

比较, 但高原地区预报已受严重歪曲, 地面图则糟得无法分析。由此可见经典公式(3)的简单中央差格式不适于有地形的数值预报。No. 9 和 10 的结果(图略)虽比 No. 6 要好, 但比 No. 4、5 要差得多。

上述对比试验结果可归纳如表 2, 表中还给出了计算稳定性及高原地区地面垂直运动等优劣的比较。显而易见, No. 1 最好, No. 4 次之, No. 5 和 8 又次之, No. 9、10 不好, 而 No. 6 最差。这和前二节的分析完全一致。

另外还应指出: 用一般变换公式导出的各种方案(No. 3、4、5、8)都包含着大量余差问题, 但预报并不出现如 No. 6 那样的严重误差, No. 9、10 虽然用静力扣除法减小了大项的量级, 但误差依然较大。这证明梯度力计算误差主要是由于按中央差展开的经典变换公式在有地形数值模式中精度不够之故。No. 5 中各项量级比 No. 4 大得多, 因此这两者之间的差别可能是大量余差的影响, 计算表明, 这种大量余差所造成的误差并未使预报发生实质性的歪曲。值得注意的是: 所有方案的预报中, 高原地区的形势都程度不同地偏高, 因此模式中可能存在着某种共同的误差。因为计算方案的不同, 只能使偏高程度有大小, 而不能从根本上使它消除, 即使用 No. 1, 孟加拉湾北方也仍出现增高的趋势。因此这种误差很可能来源于基本方程组中的其它项。因为模式中除梯度力外, 仍采用(3)式进行变换, 倘若都以公式(1)作为变换公式, 基本方程组其它各项的误差有可能缩小^[9]。

表 2 十种方案的特点及效果比较

编号	方法名称	主要特点			预报效果对比			
		代表层次	坐标及变换公式	主要假设*	动能变化	垂直运动及地面气压倾向	形势预报	总评
1	多元大气积分平均法	整层($\sigma:0\sim1$) 平均	P 坐标(等价于 σ 坐标一般变换)		最稳定	最好	最好	1
2	多元大气上下层平均法	上下层算术平均	同上		相当稳定	较好	一般	4
3	上下层平均法	同上	下层运用一般变换($z \rightarrow \sigma$)		相当稳定	较好	一般	4
4	$z \rightarrow \sigma$ 变换法	$\sigma = \frac{1}{2}$ 层	σ 坐标, 一般变换($z \rightarrow \sigma$)	略去等压面密度变化	相当稳定	较好	较好	2
5	局地等密度 $P \rightarrow \sigma$ 变换法	同上	σ 坐标, 一般变换($P \rightarrow \sigma$)	略去等压面密度变化	稳定	较好	一般	5
6	经典计算公式	同上	σ 坐标, 经典变换		最不稳定	最差	最差	7
7	回插到 P 坐标计算法	同上	P 坐标		相当稳定	较好	一般	4
8	局地等压 $P \rightarrow \sigma$ 变换法	同上	σ 坐标, 一般变换($P \rightarrow \sigma$)	略去等压面密度变化	相当稳定	较好	较好	3
9	静力扣除法(一)	同上	σ 坐标, 经典变换	对 $\sigma = 1$ 层进行静力扣除	较不稳定	较差	较差	6
10	静力扣除法(二)	同上	同上	对 $\sigma = \frac{1}{2}$ 层进行静力扣除	较不稳定	较差	较差	6

* 所有方案中都用了多元大气 $\gamma = \gamma(x, y, z)$ 假定。

五、结 论

从上面各节的讨论可以看出:

(1) σ 坐标系气压梯度力计算误差的来源,主要不是因为所谓的“大量余差”,而是由于按经典变换公式化为中央差分格式时,没有考虑到大气温压湿分布的各向异性对差分格式的限制。因此,在有地形模式中从差分—微分—差分一致的观点和大气的物理特性出发去探索差分格式的设计原理,是有意义的。

(2) 差分—微分—差分一致的一般变换公式(1)用于 σ 坐标系有地形模式中气压梯度力项的变换是成功的。可以证明^[9],凡与地形关系密切的物理量的水平微商项用一般变换公式进行变换后再展开成中央差分,其计算误差会有所减小。至于其它坐标面坡度较大的垂直坐标系(如锋区研究中的 θ 坐标)也应注意经典变换公式中央差分格式的局限性。

(3) 由于本文用以检验气压梯度力计算方法优劣的模式的垂直分层较粗,因此所得结果还是初步的。但用中央差分格式展开的经典公式不适用于大地形数值模式的结论看来是肯定的。不过从经典公式出发,利用其它精度更高的差分格式进行计算时,仍有可能减小截断误差,尤其当垂直分层较细时是这样。

参 考 文 献

- [1] 钱永南、顾宏等,一个大地形影响的初始方程数值预报模式,大气科学,1978年2期。
- [2] 北大数值预报进修班武汉实习组,有限区域中四层原始模式概述及初步试验结果(油印本),1975。
- [3] Gary, J. M., Estimate of Truncation Error in Transformed Coordinate Primitive Equation Atmospheric Model, *J. Atmos. Sci.*, **30**, 223—233, 1973.
- [4] 冈村存, Numerical Experiments of Orographic Effect on the Large Scale Motion of the Atmosphere, *Paper in Met. and Geo.*, Vol. 27, No. 1, 1976.
- [5] 钱永南、郭永润等, $P-\sigma$ 混合坐标系初始方程的若干改进及其在直角网格中的试验结果, 全国第二次数值预报会议交流材料, 1977。
- [6] Corby, G. A., A General Circulation Model of the Atmosphere Suitable for Long Period Integrations, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **98**, 809—832, 1972.
- [7] 兰州高原大气物理研究所, 从几个数值预报个例看大气运动的能量变化和适应问题, 数值天气预报工作文集(一)(油印本), 1976。
- [8] J. Smagorinsky, 等, *Hayka*, 70—134, 1967.
- [9] 钱永南、顾宏, 有地形数值模式中大气动力学方程组计算精度的探讨(一), 贵阳会议材料, 1978。

ON THE PROBLEMS IN THE COORDINATE TRANSFORMATION AND THE CALCULATION OF THE PRESSURE GRADIENT FORCE IN THE NUMERICAL MODELS WITH TOPOGRAPHY

Yan Hong Qian Yung-fu

(Lanzhou Institute of Plateau Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

In this paper the principle of the coordinate transformation in the numerical models with topography is studied, the limitation of the classical transformation formula in the form of finite difference is pointed out, and a more exact formula of the coordinate transformation known as the general transformation formula is derived.

Several calculation schemes of pressure gradient force in the models with topography are proposed, their advantages and shortcomings are identified. Using a common model, the effects of these schemes on the results of prediction are investigated.

It is shown that when the topographic conditions are introduced into a numerical model, the limitation of the classical formula of the coordinate transformation in the form of finite difference must be considered, and the consistency between the form of finite difference and the differential form must be satisfied. The application of a more exact general transformation formula to the models with topography might reduce truncation errors.