

发展方程差分格式的构造和应用

季仲贞 曾庆存

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文把许多拟线性方程归结为算子形式的“发展方程”： $\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{A}F = 0$ 。证明了带有非负算子 $\mathcal{A}$ 的“强隐式（即 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ ）格式”是绝对稳定的；而带有反对称算子 $\mathcal{A}$ 的“弱隐式和显式（即 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ ）格式”是绝对不稳定的。文中又以一维非线性平流方程为例，具体地构造了具有非负算子 $\mathcal{A}$ 的三种差分格式和相应的带人工耗散项的稳定格式，给出一个计算实例，说明后一类格式对消除虚假的寄生波也是很有有效的，适于计算有间断的问题。

拟线性方程或方程组在流体力学、空气动力学和数值天气预报中都有着广泛的应用。一般这些方程难以直接找到解析解，而要借助于电子计算机进行数值求解，有限差分法是最常采用的求解方法。众所周知，由于方程的非线性，在差分求解中最突出的问题之一是计算稳定性问题，尤其是非线性计算稳定性问题。因此，对这类方程如何构造出长时间计算稳定的计算格式是一个很重要的课题。

一、发展方程及其差分格式

上述各种形式的拟线性方程都可以化为如下算子形式的“发展方程”：

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{A}F = 0 \quad (1)$$

其中 $F = F(X, t)$ 是待求函数， $X = X(x_1, \dots, x_k)$ 是空间坐标， k 是空间维数， t 为时间坐标， $\mathcal{A} = \mathcal{A}(F, X, t)$ 是一个非线性算子。例如，对于二维原始方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - f v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + f u = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

而言，有

1979年7月24日收到，12月7日收到修改稿。

$$F = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}, \mathcal{A} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} & -f & \frac{\partial}{\partial x} \\ f & u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \phi \frac{\partial}{\partial x} & \phi \frac{\partial}{\partial y} & u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

对于正压无辐散涡度方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \left(\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3)$$

有 $F = \zeta$, $\mathcal{A} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$.

对于最简单的一维非线性平流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

有 $F = u$, $\mathcal{A} = u \frac{\partial}{\partial x}$.

为了便于构造差分格式, 可以把 (3)、(4) 改写如下:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[(1-\alpha) u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u \zeta}{\partial x} \right] + \left[(1-\alpha) v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \alpha \frac{\partial v \zeta}{\partial y} \right] = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1-\alpha) u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial uu}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

对于 (2) 以致三维原始方程也可以作类似的改写, 详见 [1] [4]. 改写后的方程 (5) (6) 仍可化为算子方程 (1), 只不过这时相应的算子 $\mathcal{A}$ 的定义有所不同罢了. 为了记住算子 $\mathcal{A}$ 是依赖于函数 F 和参数 α 的, 将 $\mathcal{A}$ 标记为 $\mathcal{A}_\alpha(F)$, 于是得算子方程:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{A}_\alpha(F)F = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (7)$$

取空间步长为 h , 时间步长为 τ , 在 (X, t) 空间布网 $(mh, n\tau)$. 记函数 F 在 $n\tau$ 时刻的值为 F^n , 在点 $(mh, n\tau)$ 的值为 F_m^n . 于是与 (7) 相应的差分方程可写为:

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + A_\alpha(F^*)[\theta F^{n+1} + (1-\theta)F^n] = 0 \quad (8)$$

其中 A_α 为与 $\mathcal{A}_\alpha$ 相应的差分算子, F^* 为 F 的某种线性组合或光滑值.

定义两个网格函数 F, G 的内积为

$$(G, F) = \sum_m F_m G_m \Delta_m \quad (9)$$

在一维情形时 $\Delta_m = h$, 在二维情形时 $\Delta_m = h^2$. 而范数则取为:

$$\|F\| = (F, F)^{1/2} \quad (10)$$

如果算子 A 满足

$$(AF, F) \geq 0 \quad (11)$$

则称为非负的,而当等号成立时,则称为反对称的.

二、主要稳定性定理

我们关心的是能作长时间计算的格式,这样我们取下述定义:

如果差分方程(8)的解 F 满足

$$\|F^n\| \leq C \quad (12)$$

则称格式(8)为计算稳定的,其中 C 为常数,即 $\|F^n\|$ 对 n 一致有界.

显然,若 $\|F^{n+1}\| \leq \|F^n\|$, 则必定是计算稳定的.

定理 1 若 A 为非负算子,则格式(8)当 $1 \geq \theta \geq \frac{1}{2}$ 时无条件稳定. 若 $(AF, F) = 0$ 且 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, 则格式(8)绝对不稳定.

该定理的证明方法可参见 [1] 和 [2], 今从略.

定理 2 若 $(AF, F) = 0$ 且 $\theta = \frac{1}{2}$, 则格式(8)有如下守恒性:

$$(1) \text{ 能量守恒: } \|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 = \|F^0\|^2 \quad (13)$$

(2) “广义能量”守恒:

$$\|F^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|AF^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|AF^n\|^2 \quad (14)$$

$$(3) \text{ “平均尺度”守恒: } \frac{\|F^{n+1}\|^2}{\|AF^{n+1}\|} = \frac{\|F^n\|^2}{\|AF^n\|} \quad (15)$$

证明 用 $F^{n+1} + F^n$ 与 (8) 作内积, 即得 (13). 把 (8) 改写为

$$F^{n+1} + \theta \tau A_n(F^*) F^{n+1} = F^n - (1 - \theta) \tau A_n(F^*) F^n \quad (16)$$

两边取范数, 并注意 $\theta = \frac{1}{2}$ 和 $(AF, F) = 0$, 即得 (14). 有了 (13) (14) 后, (15) 是显然的. 定理证毕*.

上述的守恒性不但能保证狭义的计算稳定性 (即函数有界), 还可以在一定程度上抑制寄生波, 使计算场保持平滑^[1], 由此可见满足 $(AF, F) = 0$ 的守恒型格式的优越性, 其中 (8) 又比 (17) 更好.

三、守恒型格式的构造

正如前面所看到的, 为了使得差分格式计算稳定, 算子 A 的非负性 (即 $(AF, F) \geq 0$) 是十分重要的. 但是具体地应如何构造差分格式, 才能使 $(AF, F) \geq 0$ 呢?

* 如果以 Crank-Nicholson 格式

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + \theta A(F^{n+1}) F^{n+1} + (1 - \theta) A(F^n) F^n = 0 \quad (17)$$

代替 (8), 在定理 2 的条件下只能得到上述守恒性 (14), 而得不到其余两个守恒性. 不过守恒性 (14) 也可同时限制总能量和平均尺度, 使得 $\|F\|^2$ 和 $\|AF\|^2$ 永远为有界量.

为了简单明瞭起见, 我们仅以一维平流方程(6)为例构造具体的差分格式, 其基本思想和方法完全可以推广到高维的方程.

与(6)相应的差分格式(8)可写为:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A_x^{ab}(u^*)\bar{u}^\theta = 0 \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} A_x^{ab}(u^*)\bar{u}^\theta &= (1-\alpha)[au^*\bar{u}_{+x}^\theta + (1-a)u^*\bar{u}_{-x}^\theta] \\ &+ \frac{\alpha}{2}[b(u^*\bar{u}^\theta)_{+x} + (1-b)(u^*\bar{u}^\theta)_{-x}] \end{aligned} \quad (19)$$

而

$$\bar{u}^\theta = \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n \quad (20)$$

$$u_{+x} = \frac{u_{m+1} - u_m}{h}, \quad u_{-x} = \frac{u_m - u_{m-1}}{h}, \quad u_x = \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} \quad (21)$$

显然

$$(u_{+x} + u_{-x})/2 = u_x \quad (22)$$

引理 1 若函数 u, v 在区域边界上为零, 或为周期性条件, 则

$$(u, v_{+x}) + (v, u_{-x}) = 0 \quad (23)$$

证明 因为

$$u_m(v_{m+1} - v_m) + v_m(u_m - u_{m-1}) = u_m v_{m+1} - u_{m-1} v_m$$

把等式两边同乘 h , 并对所有内点 m 求和, 利用所给的边界条件, 即得(23).

引理 2 在引理 1 的条件下, 成立

$$(A^{\frac{1}{3}, 0}(v)u, u) = 0 \quad (24)$$

$$(A^{\frac{0}{3}, 1}(v)u, u) = 0 \quad (25)$$

$$(A^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}}(v)u, u) = 0 \quad (26)$$

证明 由(19)知

$$A^{\frac{1}{3}, 0}(v)u = \frac{1}{3}[vu_{+x} + (vu)_{-x}] \quad (27)$$

$$A^{\frac{0}{3}, 1}(v)u = \frac{1}{3}[vu_{-x} + (vu)_{+x}] \quad (28)$$

$$A^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}}(v)u = \frac{1}{3}[vu_x + (vu)_x] \quad (29)$$

在(23)中以 uv 代 u , 以 u 代 v 得

$$(uv, u_{+x}) + (u, (uv)_{-x}) = 0$$

可改写为:

$$(u, vu_{+x}) + (u, (uv)_{-x}) = 0 \quad (30)$$

即 $\frac{1}{3}(A^{\frac{0}{3}, 1}(v)u, u) = 0$, (24) 得证.

同理, 在(23)中以 uv 代 v , 得

$$(u, (uv)_{+x}) + (uv, \bar{u}_{-x}) = 0$$

可改写为

$$(u, (uv)_{+x} + (u, vu_{-x}) = 0 \quad (31)$$

即 $\frac{1}{3} (A_{\frac{1}{3}}^{0,1}(\nu)u, u) = 0$, (25) 得证.

把(30)与(31)相加并除以2得:

$$(u, (uv)_x + vu_x) = 0 \quad (32)$$

即 $\frac{1}{3} (A_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\nu)u, u) = 0$. (26) 得证.

定理 3 在周期边界条件下, 当 $1 \geq \theta \geq \frac{1}{2}$ 时, 如下三个格式绝对稳定:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A_{\frac{1}{3}}^{1,0}(u^*)\bar{u}^\theta = 0 \quad (33)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A_{\frac{1}{3}}^{0,1}(u^*)\bar{u}^\theta = 0 \quad (34)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(u^*)\bar{u}^\theta = 0 \quad (35)$$

若 $\theta = \frac{1}{2}$, 这三个格式还具有能量守恒, “广义能量”守恒和“平均尺度”守恒.

根据定理 1、定理 2 和引理 2, 显然定理 3 成立.

作为特例, 在定理 3 中取 $u^* = u^n$ 或 $u^* = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$; $\theta = \frac{1}{2}$, 就得到实际中最常使用的差分格式^[4]. 其实, 上面我们构造格式的方法就是 [4] 的推广, 在 [4] 中主要关心的是构造原始方程的守恒型差分格式.

上述稳定性定理是周期或零边界条件下证明的, 但在实际应用中所遇到的边界条件也可能更复杂一些, 因此在边界附近仍可能出现一些虚假的扰动, 尽管它们在许多情况下表现为有界的扰动, 但是总是带来不方便, 为此在应用上述格式时在边界附近还需增加一些辅助的稳定性措施才好. 例如, 在 [6] 中把格式 (35) 应用到正压初始方程上作数值试验, 取刚体边界条件, 每隔 12 小时对边界两圈稍加平滑, 这样, 计算 50 余天一直十分稳定.

四、带人工耗散的差分格式及其计算实例

前面导出的计算格式, 最主要的是保证在求解过程中 $\|F\|$ 保持有界. 因此并不排除在实际计算中有时在某些局部地区可能出现虚假的寄生波, 特别是当出现间断解(激波或飑线就是如此)时, 这种虚假的寄生波更为严重, 所以在处理有间断解的问题中, 守恒格式也可能有不便之处, 为此我们可以在方程中适当增加人工耗散项, 使格式既保持无条件稳定性又能抑制这种虚假的寄生波.

例如, 在格式 (33)–(35) 中增加非线性耗散项得:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A^{\frac{1}{2}, 0} (u^*) \bar{u}^\theta - \varepsilon (|u^{**}| \bar{u}_{+x}^\theta)_{-x} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A^{\frac{0, 1}{2}} (u^*) \bar{u}^\theta - \varepsilon (|u^{**}| \bar{u}_{+x}^\theta)_{-x} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} (u^*) \bar{u}^\theta - \varepsilon (|u^{**}| \bar{u}_{+x}^\theta)_{-x} = 0 \quad (38)$$

其中 $\varepsilon > 0$, 是人工耗散系数, 一般依赖于 h 和 τ , u^{**} 是 u 的某种线性组合 (最简单的是取 $u^{**} = u$), 则有:

定理 4 在周期边界条件下, 当 $1 \geq \theta \geq \frac{1}{2}$ 时, 格式 (36)–(38) 绝对稳定.

证明 根据定理 1 和引理 2, 只需证明增加的人工耗散项相当于增加一个非负算子即可. 在 (23) 中以 $|u^{**}| \bar{u}_{+x}^\theta$ 代 u , 以 $\bar{u}^\theta$ 代 v 得:

$$(\bar{u}^\theta, (|u^{**}| \bar{u}_{+x}^\theta)_{-x}) = -(\bar{u}_{+x}^\theta, |u^{**}| \bar{u}_{+x}^\theta) = -|u^{**}| \|\bar{u}_{+x}^\theta\|^2 \leq 0$$

即

$$-(\bar{u}^\theta, (|u^{**}| \bar{u}_{+x}^\theta)_{-x}) = |u^{**}| \|\bar{u}_{+x}^\theta\|^2 \geq 0 \quad (39)$$

定理证毕.

在上述格式 (36)–(38) 中, 若取 $u^{**} = 1$, 则得到带线性耗散项的稳定格式.

为了检验上面所构造格式的实际效果, 我们用如下有准确解的强间断实例^[4] 进行计算.

对于非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (40)$$

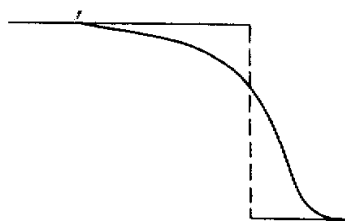


图 1 格式 (38) 在 $u^{**} = 1$ 时的计算结果,

$$h = 1, \tau = 0.02, n = 420, \theta = \frac{1}{2}$$

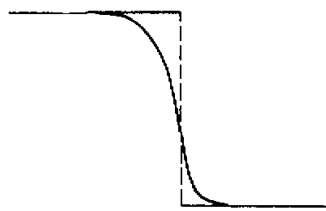


图 2 格式 (38) 在 $u^{**} = u$ 时的计算结果,

$$h = 1, \tau = 0.02, n = 420, \theta = \frac{1}{2}$$

其初值取为

$$u(x, 0) = \begin{cases} 5 & x \leq 5 \\ 2 & 15 < x < 36 \\ 0 & x \geq 36 \end{cases} \quad (41)$$

这初值带有两个间断, 这两间断在 $t = 8.4$ 时重合为一个间断, 重合位置是 $x = 44.4$, 重合前有

$$u(x, t) = \begin{cases} 5 & x \leq 3.5t + 15 \\ 2 & 15 + 3.5t < x < 36 + t \\ 0 & x \geq 36 + t \end{cases} \quad (42)$$

重合后有

$$u(x, t) = \begin{cases} 5 & x \leq 2.5t + 44.4 \\ 2 & x > 2.5t + 44.4 \end{cases} \quad (43)$$

图 1 和图 2 分别给出与实况对照的带线性耗散和非线性耗散的格式 (38) 的结果, 可见带线性人工耗散项的格式的计算结果过于平滑, 而带非线性人工耗散的计算结果较好。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 第二卷, (即将出版).
- [2] 曾庆存, 季仲贞, 发展方程的计算稳定性问题, 计算数学, 第 1 期, 92—97, 1981.
- [3] 曾庆存, 计算稳定性的若干问题, 大气科学, 第二卷, 181—191, 1978.
- [4] 曾庆存, 季仲贞, 袁重光, 原始方程差分格式的设计, 第二次全国数值预报会议文集, 300—313, 1980.
- [5] Anderson D. A., A Comparison of Numerical Solutions to the Inviscid Equations of Fluid Motion, *Journal of Computational Physics*, 15, 1—20, 1974.
- [6] 曾庆存, 袁重光, 李荣凤, 半球旋转适应过程的数值试验, 中国科学, 687—695, 1980.

THE CONSTRUCTION AND APPLICATION OF DIFFERENCE SCHEMES OF EVOLUTION EQUATIONS

Ji Zhong-zhen Zeng Qing-cun

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, many quasi-linear equations are reduced to evolution equations in operator form $\frac{\partial F}{\partial t} + AF = 0$. It is proved that if the operator A is non-negative, then

“strongly implicit (i.e., $1/2 \leq \theta \leq 1$) schemes” would be absolutely stable, but if the operator A is skew-symmetric, then “weakly implicit and explicit (i.e., $0 \leq \theta < 1/2$) schemes” are absolutely unstable.

Furthermore, taking one dimensional non-linear advection equation as an example, three schemes with non-negative operator A and the corresponding stable schemes with an artificial dissipation term are designed. A computational example is given. It is shown that the latter schemes are effective for damping false parasitic waves, and suitable for the calculation of problems with discontinuity.