第6卷 第4期
1982年12月
大气科学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA
Vol. 6, No. 4
Dec., 1982

短论

正压原始方程组保持总能量守恒性质的 Galerkin 近似

张学洪
（中国科学院大气物理研究所）

提要

在分析能量变化过程的基础上改写了正压原始方程组，引进新的因变量和“可灵活因子”，得到了一种保持总能量守恒性质从而计算稳定的 Galerkin 近似. 其中，非线性的隐式方程可以为线性隐式方程所代替.

一、小引

Galerkin 方法本质上是一种能量方法. 由于要求残差函数在 L_2 意义上同基函数正交，所以它有可能保持所逼近的微分方程的总能量性质. 以一维平流方程的初值-边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u\dfrac{\partial u}{\partial x} & (a<x<b) \\ u(t,a) = u(t,b) & \\ u(0,x) = u^0(x) & (a \leqslant x \leqslant b) \end{cases} \tag{1}$$

为例，选取一组满足边界条件的基函数 $\{h_i(x)\}_{i=0,1,\cdots,I} \subset C^1[a,b]$，求$U(t,x) = \sum_{i=0}^{I} U_i(t) \cdot h_i(x)$，使满足

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial U}{\partial t}, h_i\right) = \left(-U\dfrac{\partial U}{\partial x}, h_i\right) & i=0,1,\cdots,I \\ (U^0, h_i) = (u^0, h_i) & \end{cases} \tag{2}$$

其中 $(f,g) = \int_a^b fg dx$ · $U(t,x)$ 就是 (1) 式的一种 Galerkin 近似解. 将 (2) 式两端乘 U_i 并对 i 求和后得到

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial U}{\partial t}, U\right) = \left(-U\dfrac{\partial U}{\partial x}, U\right) \\ (U^0, U^0) = (u^0, U^0) \end{cases} \tag{3}$$

由此立即推出

1981年1月13日收到

$$\frac{d}{dt}\frac{\|U\|^2}{2}=\frac{d}{dt}\frac{(U,U)}{2}=0 \tag{4}$$

从而
$$\|U\|^2(t)=\|U^0\|^2(\leqslant\|u^0\|^2).$$

(4) 式表明，U 具有和 u 同样的总能量守恒性质．

然而，当能量形式比较复杂时，要保持近似解和真解之间的能量一致就不那么简单了．

考虑一维原始方程组的初值-边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \\ & (a<x<b)\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t}=-u\dfrac{\partial \phi}{\partial x}-\phi\dfrac{\partial u}{\partial x} & \\ u(t,a)=u(t,b)=0 & \\ u(0,x)=u^0(x),\quad \phi(0,x)=\phi^0(x) & (a\leqslant x\leqslant b)\end{cases} \tag{5}$$

它具有如下的总能量性质：

$$\frac{d}{dt}\int_a^b\left(\frac{1}{2}\phi u^2+\frac{1}{2}\phi^2\right)dx=0 \tag{6}$$

不难看出，如果仍然直接求 u 和 ϕ 的近似解，则因 $\phi\times u$ 一般不再属于基函数所张成的线性空间，故对近似解得不到形如 (6) 式那样的能量关系式．

为了解决这个问题，可以采用曾庆存[1)]所提出的坐标变换法改写方程组，使能量表达式中的权重函数 ϕ 不出现．本文用因变量变换的方法达到了同样的目的．

二、因变量变换和“可灵活因子”的引入

(5) 式的动能和位能变化的方程分别是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}\phi u^2\right)=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[u\cdot\left(\dfrac{1}{2}\phi u^2\right)\right]-u\phi\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}\phi^2\right)=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[u\cdot\left(\dfrac{1}{2}\phi^2\right)\right]-\dfrac{1}{2}\phi^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases} \tag{7}$$

可以看出，若把求 u、ϕ 的近似解改为求 $\sqrt{\phi}\,u$ 和 ϕ 的近似解，则由 Galerkin 近似经过线性运算就可以得到总动能和总位能的变化方程．因此我们首先改写 (5) 式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sqrt{\phi}u}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}(\sqrt{\phi}u)-u\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial x}\underbrace{-\sqrt{\phi}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}_{\mathrm{I}}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t}=\underbrace{-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\phi-u\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}_{\mathrm{II}}\underbrace{-\dfrac{1}{2}\phi\dfrac{\partial u}{\partial x}}_{\mathrm{III}}\\ u(t,a)=u(t,b)=0\\ (\sqrt{\phi}u)(0,x)=\sqrt{\phi^0(x)}u^0(x),\quad \phi(0,x)=\phi^0(x)\end{cases} \tag{5'}$$

---

1) 曾庆存：计算稳定性问题，1964（中国科学院地球物理研究所的学术报告）．

不难验证：若对 $\sqrt{\phi}u$ 和 ϕ 构造 Galerkin 近似解 U、Φ，并将 (5)′ 式右端出现的 u 和 $\sqrt{\phi}$ 的近似函数取为 $U/\sqrt{\Phi}$ 和 $\sqrt{\Phi}$，则可得到和 (7) 式相应的能量变化方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}U^2\right)=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[u^*\left(\dfrac{1}{2}U^2\right)\right]-U\sqrt{\Phi}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}\Phi^2\right)=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[u^*\left(\dfrac{1}{2}\Phi^2\right)\right]-\dfrac{1}{2}\Phi^2\dfrac{\partial U/\sqrt{\Phi}}{\partial x}\end{cases}\tag{8}$$

其中 $u^*=U/\sqrt{\Phi}$. 由 (8) 式立即可得到相应于 (6) 式的关系式

$$\frac{d}{dt}\int_a^b\left(\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{2}\Phi^2\right)dx=0\tag{9}$$

这说明，对于 $\sqrt{\phi}u$ 和 ϕ 构造的 Galerkin 近似也具有总能量守恒性质.

然而，由于 $u^*=U/\sqrt{\Phi}$ 和 $\sqrt{\Phi}$ 一般不再属于基函数所张成的线性空间(虽然不破坏能量关系)，要给出它们的空间分布是比较麻烦的，这是一个在实用上需要解决的问题.

曾庆存[1]曾经按照能量守恒的原则对原始方程中的量加以分类，指出：存在着若干可以灵活处理而不会破坏能量关系的量. 例如 (8) 式中的 u^* (相应于 (5)′ 式中不以 $\sqrt{\phi}u$ 形式出现的 u) 就是这样的量，可以不必拘泥于 $u^*=U/\sqrt{\Phi}$ 而利用 U 和 Φ 的数据给出 $U/\sqrt{\Phi}$ 对基函数的展开式代替 u^*，甚至还可以用任何满足 (5)′ 式中边界条件的光滑函数代替 u^*.

为了使 $\sqrt{\Phi}$ 能够被灵活处理，先将 (5)′ 式进一步变形. 注意到 (5)′ 式第一式中单独的 $\sqrt{\Phi}$ 仅出现于 I 中，而 $\mathrm{I}\times(\sqrt{\phi}u)$ 代表压力梯度作功所引起的动能改变率，它必须和 (5)′ 式第二式中的 $\mathrm{III}\times\phi$ (代表速度辐散所造成的位能改变率) 保持某种一致性，以保证两种能量之间的转化在整体上的平衡；又考虑到质量守恒的需要，将 II + III 改写成 $-\dfrac{\partial\sqrt{\phi}}{\partial x}U-\sqrt{\phi}\dfrac{\partial U}{\partial x}$，由此得到包含着 u^* 和 $(\sqrt{\phi})^*$ 的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u^*}{\partial x}(\sqrt{\phi}u)-u^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial x}-(\sqrt{\phi})^*\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\ \quad\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=-\dfrac{\partial\sqrt{\phi}^*}{\partial x}(\sqrt{\phi}u)-(\sqrt{\phi})^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial x}\\ u^*(t,a)=u^*(t,b)=0,\quad(\sqrt{\phi}u)(t,a)=(\sqrt{\phi}u)(t,b)=0\\ (\sqrt{\phi}u)(0,x)=\sqrt{\phi^0(x)}u^0(x),\quad\phi^0(x)=\phi(0,x)\end{cases}\tag{5$''$}$$

(5)″ 式中的 $F^*(F=u,\sqrt{\phi})$ 有两层意思：第一，它本质上仍然是 F；第二，它的计算比较灵活，允许和真正的 F 有差别而又不破坏总能量守恒. 本文称 F^* 为“可灵活因子”，它的引进在物理上是合理的，并且可以给实际计算带来很大的好处.

三、总能量守恒的 Galerkin 近似

在 $C^1[a,b]$ 中选取一组基函数 $\{h_i(x)\}_{i=0,1,\cdots,I}$，其中除 h_0、h_I 外皆有 $h_i(a)=h_i(b)=0$. 令

$$\begin{cases} U(t,\ x) = \sum_{i=0}^{I} U_i(t)h_i(x) \\ \Phi(t,\ x) = \sum_{i=0}^{I} \Phi_i(t)h_i(x) \end{cases} \tag{10}$$

记

$$\mathbf{W} = (U,\ \Phi)^T,$$

$$A\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial u^*}{\partial x} - u^*\frac{\partial}{\partial x} & -(\sqrt{\phi})^*\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial(\sqrt{\phi})^*}{\partial x} - (\sqrt{\phi})^*\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{W} \tag{11}$$

要求 U、Φ 满足

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t},\ h_i\right) = (A\mathbf{W},\ h_i) \\ (\mathbf{W}|_{t=0}, h_i) = \left(\begin{matrix}\sqrt{\phi^0}u^0 \\ \phi^0\end{matrix},\ h_i\right) \\ U_0 = U_I = 0. \end{cases} \quad (i = 0,\ 1,\ \cdots, I) \tag{12}$$

这里，A 中出现的 u^* 和 $(\sqrt{\phi})^*$ 可由 U 和 Φ 用任何一种近似公式来表示(但要求 u^* 满足边界条件)．(12) 式是通过 (5)″ 式得到的 (5) 式的一种 Galerkin 近似．

将 (12) 式中 U 的方程乘 U_i，Φ 的方程乘 Φ_i，分别对 i 求和然后相加，得到

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\|\mathbf{W}\|^2}{2} = (A\mathbf{W},\ \mathbf{W}) \\ \|\mathbf{W}\|^2_{t=0} = (\sqrt{\phi^0}u^0,\ U^0) + (\phi^0,\ \Phi^0) \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\|\mathbf{W}\|^2 = \|\Phi\|^2 + \|U\|^2$.

由 (5)″ 式的推演过程可知，不论 u^* 和 $(\sqrt{\phi})^*$ 如何选取皆有

$$(A\mathbf{W},\ \mathbf{W}) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left[u^*\frac{U^2+\Phi^2}{2}\right]dx - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U(\sqrt{\phi})^*\Phi}{2}\right]dx = 0 \tag{14}$$

于是得到

$$\|\mathbf{W}\|^2(t) = \|\mathbf{W}\|^2(0) \tag{15}$$

这说明 (12) 式保持了 (5) 式的总能量守恒性质．

为了求得 (12) 式的数值解，将时间 t 按步长 Δt 离散化，并记

$$\begin{cases} U^n(x) = U\,(n\Delta t,\ x) = \sum_{i=0}^{I} U_i^n h_i(x) \\ \Phi^n(x) = \Phi\,(n\Delta t,\ x) = \sum_{i=0}^{I} \Phi_i^n h_i(x) \end{cases} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{16}$$

为保持总能量守恒，选取隐式的梯形公式进行时间积分[2]：

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathbf{W}^{n+1}-\mathbf{W}^n}{\Delta t},\ h_i\right) = \left(A\frac{\mathbf{W}^{n+1}+\mathbf{W}^n}{2},\ h_i\right) \\ (\mathbf{W}^0,\ h_i) = \left(\begin{matrix}\sqrt{\phi^0}u^0 \\ \phi^0,\end{matrix}\quad h_i\right) \\ U_0^n = U_I^n = 0. \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} i = 0,\ 1,\cdots,\ I \\ n = 0,\ 1,\ 2,\cdots \end{matrix}\right) \tag{17}$$

将 (17) 式中 U 和 Φ 的方程分别乘 $U_i^{n+1}+U_i^n$ 和 $\Phi_i^{n+1}+\Phi_i^n$，对 i 求和然后相加并利用 (14) 式，可得

$$\frac{1}{\Delta t}(\|\mathbf{W}^{n+1}\|^2-\|\mathbf{W}^n\|^2)=\frac{1}{2}(A(\mathbf{W}^{n+1}+\mathbf{W}^n),(\mathbf{W}^{n+1}+\mathbf{W}^n))=0$$

即

$$\|\mathbf{W}^{n+1}\|^2=\|\mathbf{W}^n\|^2=\cdots=\|\mathbf{W}^0\|^2 \tag{18}$$

这说明，上述时间离散形式的 Galerkin 近似仍然具有总能量守恒性质.

总能量守恒性质直接保证了对于 U、Φ 而言，计算在 L_2 意义上是稳定的. 考虑到 (5) 式中的变量是 u 和 ϕ，它们的近似解应为 $\tilde{u}=U/\sqrt{\Phi}$ 和 Φ，代入 $\mathbf{W}$ 的表达式后由 (18) 式可得

$$\int_a^b \frac{1}{2}[\Phi^n\cdot(\tilde{u}^n)^2+(\Phi^n)^2]\,dx=\int_a^b\frac{1}{2}[\Phi^0\cdot(\tilde{u}^0)^2+(\Phi^0)^2]dx=E^0 \tag{19}$$

故在条件

$$\Phi\geqslant\Phi_*>0 \tag{20}$$

之下，有

$$\begin{cases}\|\tilde{u}^n\|^2\leqslant 2E^0/\Phi_*\\ \|\Phi^n\|^2\leqslant 2E^0\end{cases} \tag{21}$$

此时 $\tilde{u}$ 和 Φ 的计算过程也是稳定的. 条件 (20) 反映了非线性方程的特点：解的适定性往往和解本身的变动范围有关.

特别应当指出：(17) 式右端 $A\mathbf{W}^{n+1}$ 中所包含的 u^* 和 $(\sqrt{\phi})^*$，尽管和 $\mathbf{W}^{n+1}$ 相关联，但由于它们是"可灵活因子"，可以独立于 U、Φ 给出，故完全可以由 $\mathbf{W}^*$ (或 $(n+1)\Delta t$ 以前时刻的 $\mathbf{W}$ 值) 计算它们而不破坏总能量守恒. 这样，(17) 式就成了线性隐式方程，比起非线性隐式方程来，它的求解途径更多，而且也便于进行理论上的探讨.

对于二维原始方程的初值-边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+fv\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}=-u\dfrac{\partial v}{\partial x}-v\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial\phi}{\partial y}-fu \qquad (x,y)\in G\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial t}=-u\dfrac{\partial\phi}{\partial x}-v\dfrac{\partial\phi}{\partial y}-\phi\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\\[2mm] \mathbf{V}_n|_{\partial G}=0\\ u(0,x,y)=u^0(x,y),\ v(0,x,y)=v^0(x,y),\ \phi(0,x,y)=\phi^0(x,y).\end{cases} \tag{22}$$

(其中 G 是 (x,y) 平面上由分段光滑曲线围成的连通区域，∂G 是其边界，$\mathbf{V}_n$ 是 $\mathbf{V}=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v$ 在 ∂G 上的法向分量)，同样可以构造出保持总能量守恒性质的 Galerkin 近似. 事实上，类似于 (5)″ 式可推出 (22) 式经过改造的形式：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u^*}{\partial x}(\sqrt{\phi}u)-u^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v^*}{\partial y}(\sqrt{\phi}u)\\
\qquad\qquad -v^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial y}-(\sqrt{\phi})^*\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+f(\sqrt{\phi}v)\\
\dfrac{\partial\sqrt{\phi}v}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u^*}{\partial x}(\sqrt{\phi}v)-u^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}v}{\partial x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v^*}{\partial y}(\sqrt{\phi}v)\\
\qquad\qquad -v^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}v}{\partial y}-(\sqrt{\phi})^*\dfrac{\partial\phi}{\partial y}-f(\sqrt{\phi}u)\\
\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=-\dfrac{\partial(\sqrt{\phi})^*}{\partial x}(\sqrt{\phi}u)-(\sqrt{\phi})^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}u}{\partial x}\\
\qquad\qquad -\dfrac{\partial(\sqrt{\phi})^*}{\partial y}(\sqrt{\phi}v)-(\sqrt{\phi})^*\dfrac{\partial\sqrt{\phi}v}{\partial y}\\
\mathbf{V}_n^*|_{\partial G}=0,\ (\sqrt{\phi}\mathbf{V})_n|_{\partial G}=0\\
(\sqrt{\phi}u)(0,x,y)=\sqrt{\phi^0(x,y)}\,u^0(x,y),\\
\qquad\qquad (\sqrt{\phi}v)(0,x,y)=\sqrt{\phi^0(x,y)}\,v^0(x,y),\\
\phi(0,x,y)=\phi^0(x,y).
\end{cases}
$$

其中 u^*、v^* 和 $(\sqrt{\phi})^*$ 是“可灵活因子”.

在 $C_1(G)$ 中选取一组基函数 $\{h_l(x,y)\}_{l=0,1,\cdots,L}$，仿照 (10)、(16) 和 (11) 式定义 U、V、Φ，U^n、V^n、Φ^n 和 $\mathbf{W}$、$A\mathbf{W}$，就可以得到类似于 (12) 和 (17) 式那样的 Galerkin 近似．容易证明它们也具有总能量守恒性质.

四、结　语

近年来，Galerkin 方法在数值天气预报工作中开始受到重视，已经收到初步成效，并且看到它有很大潜力．因此，结合气象问题的特点对它进行研究，特别是解决它的计算稳定性问题，无疑是很重要的.

本文针对原始方程正压模式，从保持总能量守恒这一基本原则出发，对一般的 Galerkin 方法加以合理的物理约束，得到了计算稳定的逼近公式，并且其稳定性与基函数的选取无关。

本文还仿照文献 [1] 的作法引入了“可灵活因子”．事实再一次表明，它具有多方面的好处．特别，引入“可灵活因子”使得非线性隐式方程为线性隐式方程所代替，这一点同样适用于差分方法.

本文所考虑的算子是一类特殊的“半有界算子”[3]——反对称算子；时间离散限于用梯形公式．对于更一般的情形，需要给出所考虑的算子范数的估计(多半要针对所选取的基函数来进行这种估计)，这是要进一步研究的问题.

本文是在曾庆存同志指导下完成的.

参 考 文 献

[1] 曾庆存，《数值天气预报的数学物理基础》第一卷，(第三章，§7)，科学出版社，1979.
[2] 曾庆存、季仲贞、袁重光，《第二次全国数值天气预报会议论文集》，300—313，科学出版社，1980.
[3] Swartz B. & Wendroff, B. Math. Comp., 23, 37—50. 1969.

AN ENERGY-CONSERVATION GALERKIN APPROXIMATION TO THE BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATIONS

Zhang Xue-hong

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

A modified form of the barotropic primitive equations has been obtained on the basis of energy analysis. A Galerkin type approximation to the equations with energy conservation character, which guarantees the computational stability, has been given. Moreover, it has been found that the nonlinear implicit equations can be substituted by a linear system which is easy to solve.