第7卷 第2期　大 气 科 学　Vol. 7, No. 2
1983 年 6 月　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　June, 1983

正压模式中的非线性波动

刘式适　刘式达
（北京大学地球物理系）

提　要

本文从非线性大气运动正压模式方程组出发，用我们所设计的将非线性项在平衡点附近作 Taylor 展开的方法，求得了非线性有限振幅的惯性-重力外波和有辐散的 Rossby 波，均满足著名的 KdV 方程，它的解为椭圆余弦波，它包含线性波动，在一定的条件下形成孤立波．对有限振幅的但有辐散的 Rossby 波，它包含线性的有辐散的 Rossby 波（即叶笃正波），而且建立了包含叶笃正公式在内的新的色散关系，它含有振幅因子．分析表明：对有限振幅的惯性-重力外波，振幅大、宽度大的波传播越快，但对有限振幅的有辐散的 Rossby 波，振幅大、宽度大的波传播越慢，阻塞、切断系统可能属于 Rossby 孤立波．

一、引　言

十多年来，对于非线性波的研究多用所谓“多尺度扰动”法，在这方面，用这种方法从事大气科学研究的先后有 Long[1], Benney[2], Benjamin[3], Redekopp[4], Kawahara[5], Maslowe[6] 等人，这些研究都取得了不少有意义的成果．不过，这种方法较为繁琐，参数选取太随意，结论也不够明确．我们一直企图用一种比较简洁的方法求解非线性波动．对于比较简单的非线性波动，我们已求得了解析解[7]，而且用我们设计的将非线性项作 Taylor 展开的方法求得了非线性波动解[8]，即椭圆余弦波(Cnoidal waves)和孤立波(Solitary waves)．显然，非线性方程的波动解析解的求得是有限的，而非线性方程近似波动解的求法有较为普遍的意义．本文即用这种方法求得了正压模式中的非线性惯性-重力外波和有辐散的 Rossby 波的波动解．

二、基本方程组

描写大气运动有自由面的正压模式基本方程组通常可以写为

$$\begin{cases}\partial u/\partial t + u(\partial u/\partial x) + v(\partial u/\partial y) - fv = -(\partial\phi/\partial x)\\ \partial v/\partial t + u(\partial v/\partial x) + v(\partial v/\partial y) + fu = -(\partial\phi/\partial y)\\ \partial\phi/\partial t + u(\partial\phi/\partial x) + v(\partial\phi/\partial y) + c_0^2(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) = 0\end{cases} \tag{1}$$

其中 u, v 分别为 x, y 方向的速度分量，$\phi = gh$（g 为重力加速度，h 为自由面的高度）为自由面上的重力位势，t 为时间，$f = 2\Omega\sin\varphi$（Ω 为地球自转角速度，φ 为纬度）为 Coriolis

1981 年 8 月 13 日收到

参数，$c_0=\sqrt{gH}$（H为自由面的平均高度）为重力外波的传播速度，设为常数.

(1) 式显然包含惯性-重力外波和 Rossby 波两类基本波动. 在线性的条件下，这两类波动的传播速度分别是

$$c=\bar{u}\pm\sqrt{c_0^2+(f/k)^2} \tag{2}$$

和

$$c=\frac{\bar{u}-\beta/k^2}{1+\mu^2/k^2} \qquad (3)^{[9]}$$

式中 $\bar{u}$ 为基本西风，k 为 x 方向的波数，$\beta=df/dy$ 为 Rossby 参数，$\mu^2=(f/c_0)^2$.

(2) 式所表征的惯性-重力外波的频散作用导致了地转适应过程的实现. (3)式所表征的 Rossby 波的频散作用形成了上下游效应. 这两类波动在大气运动过程中有重要的意义.

三、非线性惯性-重力外波

设物理量与 y 无关，即限制运动是空间一维的，则(1)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-fv=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+fu=0\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}+u\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+c_0^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases} \tag{4}$$

下面，我们在 $f=$ 常数的条件下，求(4)式所表征的非线性惯性-重力外波

设(4)式的波动解为

$$\begin{cases}u=\bar{u}+U(\xi) \qquad v=V(\xi) \qquad \phi=\bar{\Phi}+\Phi(\xi)\\ \xi=x-ct\end{cases} \tag{5}$$

(5)代入(4)式得

$$\begin{cases}(\bar{u}+U-c)U'-fV=-\Phi'\\ (\bar{u}+U-c)V'+fU=0\\ (\bar{u}+U-c)\Phi'+c_0^2U'=0\end{cases} \tag{6}$$

式中符号“′”代表对 ξ 的导数.

(6) 之第三式代入第一式，设 $\bar{u}+U-c\neq 0$，则化为

$$\begin{cases}U'=\dfrac{f(\bar{u}+U-c)V}{(\bar{u}+U-c)^2-c_0^2}=F(U,V)\\ V'=-\dfrac{fU}{\bar{u}+U-c}=G(U,V)\end{cases} \tag{7}$$

式中右端 $F(U,V)$, $G(U,V)$ 是 U, V 的非线性函数. 使得 F, G 或 U', V' 同时为零的平衡点是 $(U,V)=(0,0)$. 而相路方程为

$$dV/dU=-\left[1-\frac{c_0^2}{(\bar{u}+U-c)^2}\right]U/V \tag{8}$$

在 $c \gg U$ 的条件下，相路方程的近似方程为

$$dV/dU = -\left(1 - \frac{c_0^2}{(\bar{u}-c)^2}\right) U/V \tag{9}$$

积分得到

$$\left(1 - \frac{c_0^2}{(\bar{u}-c)^2}\right) U^2 + V^2 = D \tag{10}$$

上式表明：在 $(\bar{u}-c)^2 > c_0^2$ 条件下，相路是围绕平衡点的椭圆. D 为积分常数.

将 $F(U, V)$、$G(U, V)$ 在平衡点 $(0, 0)$ 附近作 Taylor 展开得到

$$\begin{cases} F(U, V) = \dfrac{f(\bar{u}-c)}{(\bar{u}-c)^2 - c_0^2} V - \dfrac{f[(\bar{u}-c)^2 + c_0^2]}{[(\bar{u}-c)^2 - c_0^2]^2} UV + \cdots \\ G(U, V) = -\dfrac{f}{\bar{u}-c} U + \dfrac{f}{(\bar{u}-c)^2} U^2 + \cdots \end{cases} \tag{11}$$

若用(11)式右端的线性部分代替 F、G，则(7)式化为

$$\begin{cases} U' = \dfrac{f(\bar{u}-c)}{(\bar{u}-c)^2 - c_0^2} V \\ V' = -\dfrac{f}{\bar{u}-c} U \end{cases} \tag{12}$$

它即是(6)式线性化的结果，其相路方程与相路分别与(9)、(10)相同.

由(12)可得

$$U'' + \frac{f^2}{(\bar{u}-c)^2 - c_0^2} U = 0 \tag{13}$$

上式表征波动，要求 $\dfrac{f^2}{(\bar{u}-c)^2 - c_0^2} > 0$，若令

$$\frac{f^2}{(\bar{u}-c)^2 - c_0^2} = k^2 \tag{14}$$

则求得线性惯性-重力外波的色散关系(2)，这说明(12)式表征的即是通常的小振幅的惯性-重力外波.

若取(11)式右端到二次项，则(7)式化为

$$\begin{cases} U' = \dfrac{f(\bar{u}-c)}{(\bar{u}-c)^2 - c_0^2} V - \dfrac{f[(\bar{u}-c)^2 + c_0^2]}{[(\bar{u}-c)^2 - c_0^2]^2} UV \\ V' = -\dfrac{f}{\bar{u}-c} U + \dfrac{f}{(\bar{u}-c)^2} U^2 + \cdots \end{cases} \tag{15}$$

它表征有限振幅的惯性-重力外波

(15)的第一式对 ξ 微商，并用第二式及(10)式代入，略去 U, V 的三次项后得到

$$\begin{aligned} U'' = &-\frac{f^2}{(\bar{u}-c)^2 - c_0^2} U + \frac{f^2[3(\bar{u}-c)^2 + c_0^2]}{(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2 - c_0^2]^2} U^2 \\ &- D\frac{f^2(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2 + c_0^2]}{[(\bar{u}-c)^2 - c_0^2]^3} \end{aligned} \tag{16}$$

上式对 ξ 微商，即得到著名的 KdV 方程

$$U''' - \frac{2f^2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}UU' + \frac{f^2}{(\bar{u}-c)^2-c_0^2}U' = 0 \tag{17}$$

(16)或(17)式即是为有限振幅的非线性惯性-重力外波所满足的方程.

(16)式乘以 $2U'$，并对 ξ 积分得到

$$U'^2 = \frac{2f^2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{3(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]}U^3 - \frac{f^2}{(\bar{u}-c)^2-c_0^2}U^2 - 2D\frac{f^2(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^3}U + A \tag{18}$$

其中 A 为积分常数.

上式或者写为如下形式:

$$U'^2 = \frac{2f^2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{3(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}P(U) \tag{19}$$

其中

$$P(U) = U^3 - \frac{3(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]}{2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}U^2 - 3D\frac{(\bar{u}-c)^2[(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{[(\bar{u}-c)^2-c_0^2][3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}U + B \tag{20}$$

是 U 的三次多项式，B 是常数 $\left(B = \frac{3(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}{2f^2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}A\right)$.

(19)式是 U 的非线性常微分方程，为了保证解是有界的周期函数，三次方程

$$P(U) = 0 \tag{21}$$

的三个根 U_1, U_2, U_3 必须是分立的单实根，即

$$P(U) = (U-U_1)(U-U_2)(U-U_3) \quad U_1 \neq U_2 \neq U_3 \tag{22}$$

对于相对于基本气流的右行波，$c > \bar{u}$，不妨设

$$U_1 > 0 \quad U_2 < 0 \quad U_3 < U_2 < 0 \tag{23}$$

这样，(19)式的解可以用 Jacobi 椭圆余弦函数 c_n 表示，即

$$U(\xi) = U_2 + (U_1-U_2)cn^2\sqrt{\frac{f^2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{6(c-\bar{u})[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}(U_1-U_3)}\,\xi \tag{24}$$

或

$$u(x,t) = U_2 + (U_1-U_2)cn^2\sqrt{\frac{f^2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{6(c-\bar{u})[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}(U_1-U_3)}\,(x-ct) \tag{24$'$}$$

cn^2 在 0 和 1 之间振荡. (24)或(24)′式称为椭圆余弦波，它的波长为

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{6(c-\bar{u})[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}{f^2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2](U_1-U_3)}}K(m) \tag{25}$$

其中

$$K(m) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-m^2\sin^2 t}} \tag{26}$$

是第一种完全椭圆积分，模数 m 满足

$$m^2 = (U_1-U_2)/(U_1-U_3) \tag{27}$$

在(20)式中，若取 $B=0\,(A=0)$，则 $U_2=0$，且

$$\begin{cases} U_1+U_3=\dfrac{3(\bar{u}-c)[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]}{2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]} \\ U_1\cdot U_3=-3D\cdot\dfrac{(\bar{u}-c)^2[(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}{[(\bar{u}-c)^2-c_0^2][3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]} \end{cases} \tag{28}$$

和

$$m^2=U_1/(U_1-U_3) \tag{29}$$

由上两式求得

$$U_1=m^2\left\{\frac{9(\bar{u}-c)^2[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}{4[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]^2}+12D\frac{(\bar{u}-c)^2[(u-c)^2+c_0^2]}{[(\bar{u}-c)^2-c_0^2][3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]}\right\}^{1/2} \tag{30}$$

因此时椭圆余弦波的振幅就是 U_1，则由上式看出，其振幅随着相对基本气流的波速 $c-\bar{u}$ 数值的增加而增加.

由(20)与(21)式，考虑到三次代数方程根与系数的关系有

$$U_1+U_2+U_3=\frac{3(\bar{u}-c)\ [(\bar{u}-c)^2-c_0^2]}{2[3(\bar{u}-c)^2+c_0^2]} \tag{31}$$

这就是有限振幅的惯性-重力外波波速所满足的一个关系式.

在(25)式中，若取 $\lambda=2\pi/k$ (k 为波数)，则求得它的另一个重要关系式为

$$\frac{(c-\bar{u})\,[(\bar{u}-c)^2-c_0^2]^2}{3(\bar{u}-c)^2+c_0^2}=\frac{\pi^2}{6K^2}(f/k)^2(U_1-U_3) \tag{32}$$

根据(31)和(32)式可以确定波速. 例如，无限小振幅的特殊情况，$U_1-U_2\to 0$，但 $U_1>0$，$U_2<0$，则

$$U_1\to U_2\to 0 \tag{33}$$

又由(27)和(26)式

$$m\to 0\qquad K(0)\to\pi/2 \tag{34}$$

将(33)、(34)一并代入(31)和(32)式，即求得无限小振幅惯性-重力外波的色散关系

$$(\bar{u}-c)^2-c_0^2\to(f/k)^2 \tag{35}$$

这就是(2)式.

至于一般情况，这里不详细叙述了.

四、非线性 Rossby 波

为了更好地了解非线性 Rossby 波的特性，我们用地转近似滤除惯性-重力外波，并限制速度分量与 y 无关，则描写非线性 Rossby 波的方程组由(1)式可以表为

$$\begin{cases} fv=\partial\phi/\partial x \\ \partial/\partial t(\partial v/\partial x)+u(\partial/\partial x)(\partial v/\partial x)+\beta v+f(\partial u/\partial x)=0 \\ \partial\phi/\partial t+c_0^2(\partial u/\partial x)=0 \end{cases} \tag{36}$$

下面，我们在 f 和 β 均为常数的条件下，求上式所表征的非线性 Rossby 波.

以(5)式代入(36)式得到

$$\begin{cases} fV = \Phi' \\ (\bar{u} + U - c)V'' + \beta V + fU' = 0 \\ -c\Phi' + c_0^2 U' = 0 \end{cases} \tag{37}$$

(37)之第三式积分一次有 $U = \frac{c}{c_0^2}\Phi$（取积分常数为零），并代入(37)的第二式消去 U，则(37)式化为

$$\begin{cases} \Phi' = fV \\ \left(\bar{u} + \frac{c}{c_0^2}\Phi - c\right)V'' + \beta V + \frac{fc}{c_0^2}\Phi' = 0 \end{cases} \tag{38}$$

设 $\bar{u} + \frac{c}{c_0^2}\Phi - c \neq 0$，并将第一式代入第二式的最后一项，则第二式化为

$$V'' = -\frac{(\beta + \mu^2 c)V}{\bar{u} + \frac{c}{c_0^2}\Phi - c} \equiv Q(\Phi, V) \tag{39}$$

其中 $Q(\Phi, V)$ 是 Φ, V 的非线性函数，取平衡点为 $(\Phi, V) = (0, 0)$，并将 $Q(\Phi, V)$ 在平衡点附近作 Taylor 展开有

$$Q(\Phi, V) = -\frac{\beta + \mu^2 c}{\bar{u} - c}V + \frac{c(\beta + \mu^2 c)}{c_0^2(\bar{u} - c)^2}\Phi V + \cdots \tag{40}$$

若以(40)式右端的线性部分代替 Q，则(39)式化为

$$V'' + \frac{\beta + \mu^2 c}{\bar{u} - c}V = 0 \tag{41}$$

它即是(37)式线性化的结果. 它表征波动要求

$$\frac{\beta + \mu^2 c}{\bar{u} - c} = k^2 > 0 \tag{42}$$

则求得线性有辐散的 Rossby 波的色散关系(3)，即叶笃正公式. 它说明(38)或(39)式也可求得小振幅的(有辐散的) Rossby 波.

若取(40)式右端到二次项，则(39)式化为

$$V'' = -\frac{\beta + \mu^2 c}{\bar{u} - c}V + \frac{c(\beta + \mu^2 c)}{c_0^2(\bar{u} - c)^2}\Phi V \tag{43}$$

其中 V 如用地转关系 $V = 1/f\Phi'$（即(38)之第一式）代入，则化为

$$\Phi''' - \frac{c(\beta + \mu^2 c)}{c_0^2(\bar{u} - c)^2}\Phi\Phi' + \frac{\beta + \mu^2 c}{\bar{u} - c}\Phi' = 0 \tag{44}$$

这是 KdV 方程. 它说明有限振幅的(有辐散的)非线性 Rossby 波满足 KdV 方程.

上式对 ξ 积分一次有

$$\Phi'' = \frac{c(\beta + \mu^2 c)}{2c_0^2(\bar{u} - c)^2}\Phi^2 - \frac{\beta + \mu^2 c}{\bar{u} - c}\Phi + A \tag{45}$$

A 为积分常数.

上式乘以 $2\Phi'$，再对 ξ 积分一次有

$$\Phi'^2 = \frac{c(\beta + \mu^2 c)}{3c_0^2(\bar{u} - c)^2}\Phi^3 - \frac{\beta + \mu^2 c}{\bar{u} - c}\Phi^2 + 2A\Phi + B \tag{46}$$

B 为积分常数.

上式可改写为如下形式:

$$\Phi'^2 = \frac{c(\beta + \mu^2 c)}{3c_0^2(\bar{u} - c)^2} R(\Phi) \tag{47}$$

其中

$$R(\Phi) = \Phi^3 - \frac{3\,c_0^2(\bar{u} - c)}{c}\Phi^2 + D\Phi + E \tag{48}$$

是 Φ 的三次多项式.

$$D = A \cdot \frac{6c_0^2(\bar{u} - c)^2}{c(\beta + \mu^2 c)}, \quad E = B \cdot \frac{3c_0^2(\bar{u} - c)^2}{c(\beta + \mu^2 c)}.$$

下面求解非线性常微分方程(47).

因(47)式的特例是线性情况,所以,由条件(42)得:

$$\beta + \mu^2 c > 0 \qquad \bar{u} - c > 0 \tag{49}$$

或

$$-\beta/\mu^2 < c < \bar{u} \tag{49$'$}$$

(49)或(49)'式是方程(47)的约束条件. 为了保证(47)式的解是有界的周期函数，三次方程

$$R(\Phi) = 0 \tag{50}$$

的三个根 Φ_1、Φ_2、Φ_3 必须是分立的单实根,即

$$R(\Phi) = (\Phi - \Phi_1)\ (\Phi - \Phi_2)\ (\Phi - \Phi_3) \qquad \Phi_1 \neq \Phi_2 \neq \Phi_3$$

对于东进波: $0 < c < \bar{u}$,不妨设

$$\Phi_1 < 0 \qquad \Phi_2 > 0 \qquad \Phi_3 > \Phi_2 > 0 \tag{51}$$

这样,(47)式的解可以表为

$$\Phi(\xi) = \Phi_2 + (\Phi_2 - \Phi_1)cn^2\sqrt{\frac{c(\beta + \mu^2 c)}{12c_0^2(\bar{u} - c)^2}(\Phi_3 - \Phi_1)}\,\xi \tag{52}$$

或

$$\phi(x, t) = \Phi_2 + (\Phi_2 - \Phi_1)cn^2\sqrt{\frac{c(\beta + \mu^2 c)}{12c_0^2(\bar{u} - c)^2}(\Phi_3 - \Phi_1)}\,(x - ct) \tag{52$'$}$$

(52)或(52)'式即是有辐散的 Rossby 椭圆余弦波,它的波长是

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{12c_0^2(\bar{u} - c)^2}{c(\beta + \mu^2 c)\ (\Phi_3 - \Phi_1)}}\,K(m) \tag{53}$$

$K(m)$为第一种完全椭圆积分(见(26)式),模数 m 满足

$$m^2 = (\Phi_2 - \Phi_1)/(\Phi_3 - \Phi_1) \tag{54}$$

在(48)式中,若取 $E = 0(B = 0)$, 则 $\Phi_2 = 0$, 且

$$\Phi_1 + \Phi_3 = \frac{3\,c_0^2(\bar{u} - c)}{\bar{u}} \qquad \Phi_1 \cdot \Phi_3 = D \tag{55}$$

和

$$m^2 = -\Phi_1/(\Phi_3 - \Phi_1) \tag{56}$$

由此得到

$$-\Phi_1 = m^2\sqrt{\left(\frac{3c_0^2(\bar{u}-c)}{\bar{u}}\right)^2 - 4D} \tag{57}$$

因此时 $-\Phi_1$ 就是椭圆余弦波的振幅，所以，可以看出振幅随相对基本西风波速 $c-\bar{u}$ 数值的增大而增大，这是一般椭圆余弦波的共性.

一般，由(48)式可得

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{3c_0^2(\bar{u}-c)}{c} \tag{58}$$

由上式可确定波速

$$c = \bar{u}\Big/\left[1 + \frac{1}{3c_0^2}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)\right] \tag{59}$$

因 Φ 表征重力位势，即反映气压场，(51)式的取法意味着 Φ_1、Φ_2 分别代表槽和脊，又因 $\Phi_2 - \Phi_1$ 是椭圆余弦波的振幅，如我们取

$$\Phi_1 = -\hat{\Phi}/2 \qquad \Phi_2 = \hat{\Phi}/2 \qquad \Phi_3 = 3\hat{\Phi}/4 \tag{60}$$

其中 $\hat{\Phi}$ 相当于波的振幅.

(60)代入(59)式即有

$$c = \bar{u}\Big/\left(1 + \frac{1}{4c_0^2}\hat{\Phi}\right) \tag{61}$$

上式说明：振幅越大的波，波速越小，这是线性波所得不到的，也与实际相近.

在(53)式中，若取 $\lambda = 2\pi/k$，则求得

$$\frac{(\bar{u}-c)^2}{c(\beta+\mu^2c)} = \frac{\pi^2}{12K^2}\cdot\frac{1}{k^2c_0^2}(\Phi_3 - \Phi_1) \tag{62}$$

可以根据(58)和(62)式确定波速. 例如无限小振幅的情况，$\Phi_2 - \Phi_1 \to 0$. 但 $\Phi_1 < 0$，$\Phi_2 > 0$，则

$$\Phi_1 \to \Phi_2 \to 0 \tag{63}$$

又由(26)和(54)式

$$m \to 0 \qquad K(0) \to \pi/2 \tag{64}$$

将(63)、(64)一并代入(58)和(62)式，即求得无限小振幅且有辐散的 Rossby 波的色散关系

$$(1 + \mu^2/k^2)c \to \bar{u} - \beta/k^2 \tag{65}$$

这就是(3)式.

又如，取(60)式中的 Φ_1、Φ_2、Φ_3，此时

$$m = \sqrt{4/5} \qquad K = 2.24 \tag{66}$$

而 $\pi^2/12K^2 \approx 1/6$，代入到(58)和(62)式求得

$$c = \frac{\bar{u} - \dfrac{5\beta}{6k^2}}{1 + \dfrac{5\mu^2}{6k^2}} \tag{67}$$

这就启示我们，可以根据实际气压波动或理论上调节 Φ_1、Φ_2、Φ_3，得到不同的波速，这也是线性波所得不到的.

无限小振幅的波要求 $m \to 0$，而当 $m \to 1$ 时，椭圆余弦波转化为孤立波，此时，由(54)式

$$m \to 1 \qquad \Phi_2 \to \Phi_3 \tag{68}$$

为了找到具体的孤立波解，我们取 $A = 0\ (D = 0)$，且令

$$\Phi \to \Phi_0 \qquad \Phi' \to 0 \qquad \Phi'' \to 0 \qquad \text{当 } \xi \to \infty \text{时} \tag{69}$$

则由(45)、(46)式定得

$$\Phi_0 = \frac{2c_0^2(\bar{u} - c)}{c} \qquad B = \frac{4c_0^4(\beta + \mu^2 c)(\bar{u} - c)}{3c^2}$$
$$E = \frac{4c_0^6(\bar{u} - c)^3}{c^3} \tag{70}$$

代入(48)式得到

$$\begin{aligned} R(\Phi) &= \Phi^3 - \frac{3c_0^2(\bar{u} - c)}{c}\Phi^2 + \frac{4c_0^6(\bar{u} - 3)^3}{c^3} \\ &= \left(\Phi - \frac{2c_0^2(\bar{u} - c)}{c}\right)^2\left(\Phi + \frac{c_0^2(\bar{u} - c)}{c}\right) \end{aligned} \tag{71}$$

令 $R(\Phi) = 0$，求得三个根为

$$\Phi_1 = -\frac{c_0^2(\bar{u} - c)}{c} < 0 \quad \Phi_2 = \Phi_3 = \frac{2c_0^2(\bar{u} - c)}{c} > 0 \tag{72}$$

这里 $\Phi_2 = \Phi_3$ 是重根.

注意：当 $m \to 1$ 时，椭圆余弦函数转化为双曲正割函数，即

$$m \to 1 \qquad cn(\ ) \to \mathrm{sech}(\ ) \tag{73}$$

则我们求得(47)式的孤立波解为

$$\Phi(\xi) = \frac{2c_0^2(\bar{u} - c)}{c} + \frac{3c_0^2(\bar{u} - c)}{c}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\beta + \mu^2 c}{4(\bar{u} - c)}}\,\xi \tag{74}$$

或

$$\phi(x, t) = \frac{2c_0^2(\bar{u} - c)}{c} + \frac{3c_0^2(\bar{u} - c)}{c}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\beta + \mu^2 c}{4(\bar{u} - c)}}(x - ct) \tag{74'}$$

设 $\hat{\phi}$ 是孤立波的振幅，则由上式求得有辐散的非线性 Rossby 孤立波的色散关系为

$$c = \bar{u}\Big/\left(1 + \frac{1}{3c_0^2}\hat{\phi}\right) \tag{75}$$

而波宽为

$$d = \sqrt{\frac{4(\bar{u} - c)}{\beta + \mu^2 c}} \tag{76}$$

有辐散的 Rossby 波的色散关系(75)不同于线性的色散关系 (3)，在(75)式中包含了振幅 $\hat{\phi}$，而且振幅越大，波速越小，波越宽．这进一步加深了我们认为阻塞或切断系统是属于 Rossby 孤立波的看法

上述讨论进一步说明，经典的 Rossby 波只适用于振幅较小的情况，具有很大的局限性，实际的Rossby波是非线性Rossby波的反映，我们建立过的非线性的但无辐散的 Rossby 波的色散关系[7,8]，以及现在建立的非线性的但有辐散的 Rossby 波的色散关系(61)和(75)

都包含波的振幅因子,而且与无辐散的非线性 Rossby 波一样,有辐散的非线性 Rossby 波的普遍色散关系(58)和(62)包含了经典的叶笃正公式.

对于西退波: $-\beta/\mu^2 < c < 0$, 可类似讨论.

五、结 论

将非线性项展为 Taylor 级数来求解非线性波动有较为广泛的用处. 用这种方法求得的有限振幅的大气波动,如我们讨论过的惯性波、重力内波,无辐散的 Rossby 波以及本文讨论的惯性-重力外波和有辐散的 Rossby 波都满足 KdV 方程,它的解为椭圆余弦波,它包含线性的波动,在一定的条件下形成孤立波.

非线性波的特点是色散关系包含振幅,对非线性惯性-重力外波,振幅大、宽度大的波传播越快,而非线性 Rossby 波,振幅大、宽度大的波传播越慢.

关于非线性波的物理机制以及它的应用有待进一步深入讨论.

参 考 文 献

[1] Long, R. R., *J. Atmos. Sci.*, vol 21, p. 197, 1964.
[2] Benney, D. J. *J. Math. and Phys.*, vol. 45, p. 52, 1966.
[3] Benjamen, T. B., *J. F. M.*, vol 25, 1966.
[4] Redekopp, L. G., *J. F. M.* vol 82, p. 725, 1977.
[5] Kawahara, *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 41, p. 1402, 1976.
[6] Maslowe, S. A and Redekopp. L. G., Geophy. and Astro. Fluid Dynamics, 1979.
[7] 刘式达、刘式适,大气中非线性波动方程的解,气象学报,40 卷 3 期 p. 279, 1982.
[8] 刘式达,刘式适,大气中的非线性椭圆余弦波 (cnoidal waves) 和孤立波 (solitary waves) 中国科学 (B 辑), p. 372,1982.
[9] Yeh. T. C., On energy dispersion in the atmosphere, *J. Metes.* vol 6, p. 1, 1949.

NONLINEAR WAVES IN BAROTROPIC MODEL

Liu Shikuo Liu Shida

(Department of Geophysics, Beijing University)

Abstract

In this paper, from the system of equations describing a barotropic atmosphere, using the method of Taylor expansion for the nonlinear terms, the periodic solutions of the nonlinear surface inertio-gravitational waves and Rossby waves have been obtained.

The finite-amplitude nonlinear surface inertio-gravitational waves and Rossby waves with horizontal divergence satisfy the KdV equation. Its solution is a cnoidal wave which consists of linear waves and forms solitary waves under certain conditions. For the finite-amplitude Rossby waves with horizontal divergence, we find the new dispersive relation which contains the amplitude parameter. In case of small amplitude it is reduced to the Yeh formula. It is shown that the larger the amplitude and width, the faster the finite-amplitude surface inertio-gravitational waves and the slower the finite-amplitude Rossby waves with horizontal divergence propagate. The blocking or cut-off system in which the amplitude and width are large may be considered as Rossby solitary wave.