

正压大气非线性波的二级近似(二)

——位涡度方程的求解

张学洪

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文是用摄动法求取正压原始方程一类非线性大尺度慢波解的二级近似的第二部分,提出了一种在电子计算机上进行某些初等函数非数值运算的方法,由此求得了二级问题中位涡度方程的解。数值试验的结果表明,所求得的二级近似是合理的。

一、实现某些初等函数解析运算的计算机方法

二级问题(见文献[1])中位涡度方程及其边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_2) &= -c_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta - \mu^{-2}) \phi_0 + c_0 \mu^{-2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} - c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \phi_1 - \mu^{-2} \phi_1) \\ &\quad + (\beta \eta + (\Delta - \mu^{-2}) \phi_0) \Delta \chi_2 + (\Delta \phi_1 - \mu^{-2} \phi_1) \Delta \chi_1 \\ &\quad + \nabla \chi_2 \cdot \nabla (\beta \eta + (\Delta - \mu^{-2}) \phi_0) + \nabla \chi_1 \cdot \nabla (\Delta \phi_1 - \mu^{-2} \phi_1) \\ &\quad - \mu^{-2} J(\phi_0, A_2) + J(\phi_1, \Delta \phi_1 - \mu^{-2} \phi_1) \equiv G_2 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right|_{\eta=0, \infty} = 0 \quad (2)$$

其中 $\phi_0, \phi_1, \chi_1, \chi_2, A_1, A_2, c_0$ 和 c_1 已在文献[1]中给出。容易看出, G_2 的运算量是非常之大的,仅其中的 $J(\phi_1, \Delta \phi_1 - \mu^{-2} \phi_1)$ 一项就可展成 200 项之多,而后还要做大量的三角函数积化和差以及合并同类项的工作,手工演算耗时太多而且难以保证结果的可靠性,因此,我们转而求助于电子计算机来完成这些运算。

首先要给出一种在计算机上表示某些初等函数的方法。

注意到 $\phi_0, \phi_1, \dots, A_2$ 的表达式中一般项形如

$$P_{i,j,k,r}(\xi, \eta) \equiv \begin{Bmatrix} \cos im\xi \\ \sin im\xi \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos jn\eta \\ \sin jn\eta \end{Bmatrix} \cdot \eta^k \cdot e^{r\eta} \quad (3)$$

经过有限次数乘、和、差、积和求导运算后一般项仍为(3)的形式,因此,我们称某一范围内 $P_{i,j,k,r}(\xi, \eta)$ 的全体为基函数,用一组适当规定的下标 i, j, k, r 表示它们,并用相应的下标变量表示所考虑的某一函数相对于基函数的展开系数。这样, $\phi_0, \phi_1, \dots$ 及它们的运算结果就可以方便地表为计算机中的四维场。下面我们给出一种具体的对应关系:

1982年3月23日收到,6月1日收到修改稿。

表 1 四维下标 i, j, k, r 和 $P_{i, j, k, r}(\xi, \eta)$ 的一种对应

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	1	$\cos m\xi$	$\cos 2m\xi$	$\cos 3m\xi$	$\cos 4m\xi$	$\sin m\xi$	$\sin 2m\xi$	$\sin 3m\xi$	$\sin 4m\xi$	—	—
j	1	$\cos n\eta$	$\cos 2n\eta$	$\cos 3n\eta$	$\cos 4n\eta$	$\sin n\eta$	$\sin 2n\eta$	$\sin 3n\eta$	$\sin 4n\eta$	—	—
k	1	η	η^2	η^3	η^4	—	—	—	—	—	—
r	1	$e^{m\eta}$	$e^{2m\eta}$	$e^{3m\eta}$	$e^{4m\eta}$	$e^{-m\eta}$	$e^{-2m\eta}$	$e^{-3m\eta}$	$e^{-4m\eta}$	$e^{in\eta}$	$e^{-2in\eta}$

这样,四维场

$$\{X[i, j, k, r], 0 \leq i, j \leq 8, 0 \leq k \leq 4, 0 \leq r \leq 10\}$$

就可以用来表示计算过程中出现的所有函数,例如 $\phi_0 = -v\eta + {}_0\phi(s_1, s_2)$ 可表为 $\{\psi, [i, j, k, r]\}$, 其中 $\psi_0[0, 0, 1, 0] = -v$, $\psi_0[5, 5, 0, 0] = {}_0\phi$, 而其余的下标变量皆为零。

在此基础上我们给出如下的运算规则:

(I) 数乘(设 c 为常数)

$$Y = cX: cX[i, j, k, r] \Rightarrow Y[i, j, k, r].$$

(II) 加减法

$$Z = X \pm Y: X[i, j, k, r] \pm Y[i, j, k, r] \Rightarrow Z[i, j, k, r].$$

(III) 对 ξ 求导

$$Y = \frac{\partial}{\partial \xi} X: \text{若 } i \leq 4 \text{ 则 } -imX[i, j, k, r] \Rightarrow Y[i+4, j, k, r],$$

否则 $(i-4)mX[i, j, k, r] \Rightarrow Y[i-4, j, k, r].$

(IV) 对 η 求导

$$Y = \frac{\partial}{\partial \eta} X: \text{若 } j \leq 4 \text{ 则 } -jnX[i, j, k, r] \Rightarrow Y[i, j+4, k, r],$$

否则 $(j-4)nX[i, j, k, r] \Rightarrow Y[i, j-4, k, r];$ 又 $kX[i, j, k, r] \Rightarrow Y[i, j, k-1, r];$ $c[r] \cdot X[i, j, k, r] + Y[i, j, k, r] \Rightarrow Y[i, j, k, r].$

这里 $\{c[r]\}$ 是由表 2 给出的一维场

表 2 一维场 $\{c[r]\}$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c[r]$	0	m	$2m$	$3m$	$-m$	$-2m$	$-3m$	l	$2l$	$-l$	$-2l$

(V) 乘法

$$Z = X \times Y: (\text{先将 } Z \text{ 场置零})$$

记

$$a = X[i, j, k, r] \cdot Y[i', j', k', r'].$$

有

$$\begin{cases} Z[i_1, j_1, k_1, r_1] + ci_1 \cdot cj_1 \cdot a \Rightarrow Z[i_1, j_1, k_1, r_1] \\ Z[i_1, j_2, k_1, r_1] + ci_1 \cdot cj_2 \cdot a \Rightarrow Z[i_1, j_2, k_1, r_1] \\ Z[i_2, j_1, k_1, r_1] + ci_2 \cdot cj_1 \cdot a \Rightarrow Z[i_2, j_1, k_1, r_1] \\ Z[i_2, j_2, k_1, r_1] + ci_2 \cdot cj_2 \cdot a \Rightarrow Z[i_2, j_2, k_1, r_1] \end{cases}$$

其中 $k_1 = k + k'$, r_1 由指数函数乘法规则决定(见表 3), i_1, ci_1, i_2, ci_2 (类似地, j_1, cj_1, j_2, cj_2) 由三角函数积化和差公式给出(见表 4、表 5)。

表 3 $r_1[r, r']$

$r \backslash r'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3		0	4	5				
2	2	3			1	0	4				
3	3	3			2	1	0				
4	4	4	0	1	2	5	6				
5	5	4	0	1	6						
6	6	5	4	0							
7	7							8		0	
8	8										0
9	9							0		10	
10	10								0		

表 4 $i_1[i, i']$ (左) 和 $ci_1[i, i']$ (右)

$i \backslash i'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0 1	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	7 1	8 1
1	1 1	0 1	1 1	2 1	0	6 1	5 1	6 1	0
2	2 1	1 1	0 1	0	0	5 -1	8 1	0	0
3	3 1	2 1	0	0	0	6 -1	0	0	0
4	4 1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	5 1	6 1	5 -1	6 -1	0	0 1	1 1	2 1	0
6	6 1	5 1	8 1	0	0	1 1	0 1	0	0
7	7 1	6 1	0	0	0	2 1	0	0	0
8	8 1	0	0	0	0	0	0	0	0

表 5 $i_1[i, i']$ (左)和 $ci_1[i, i']$ (右)

$i \backslash i'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0 1	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	7 1	8 1
1	1 1	2 1	3 1	4 1	0	6 0	7 1	8 1	0
2	2 1	3 1	4 1	0	0	7 1	8 0	0	0
3	3 1	4 1	0	0	0	8 1	0	0	0
4	4 1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	5 1	6 0	7 1	8 1	0	2 -1	3 -1	4 -1	0
6	6 1	7 1	8 0	0	0	3 -1	4 -1	0	0
7	7 1	8 1	0	0	0	4 -1	0	0	0
8	8 1	0	0	0	0	0	0	0	0

表 3—5 中空白处可为任意足够大的数字,表示运算超出了预定的范围。

上述运算规则是很容易在计算机上实现的,而且可以方便地用语言程序写出来。这种方法的缺点是所给出的函数表达式的系数是数值的,要想给出文字系数,需要更细致的表示方法和更详尽的解释性程序,这多半要用机器指令或符号程序来实现。

对于文献[1]中所给的参数,我们用上述方法在电子计算机上检验了手工推演求得的 χ_2 和 A_2 , 结果表明文献[1]中给出的解答是正确的。

二、位涡度方程的求解

对文献[1]中所给的参数值,用前一节的方法求得了(1)式的右端项

$$G_2(\xi, \eta) = [-c_2 m(x_{11} - \mu^{-2}) \cdot \phi \sin n\eta + G_1(\eta)] \cos m\xi + \bar{G}_2(\eta) \sin 2m\xi + G_3(\eta) \cos 3m\xi + \bar{G}_4(\eta) \sin 4m\xi \quad (4)$$

其中除移速的二级修正 c_2 待求外,其余都是已知的, $G_1(\eta) \cdots \bar{G}_4(\eta)$ 由形如 $\begin{Bmatrix} \cos n\eta \\ \sin n\eta \end{Bmatrix} \eta^k e^{\gamma\eta}$ 的项组成,具体形式由附录 1 给出。

将 ϕ_0 代入(1)式中的算子 $\mathcal{L}$ (见文献[1](13)式),可将(1)式写成

$$\begin{aligned} & -J((c_0 - U)\eta + \phi \sin m\xi \sin n\eta, (\Delta - \kappa_{11})\phi_2) \\ & = [-c_2 m(\kappa_{11} - \mu^{-2})\phi \sin n\eta + G_1(\eta)] \cos m\xi + \bar{G}_2(\eta) \sin 2m\xi \\ & \quad + G_3(\eta) \cos 3m\xi + \bar{G}_4(\eta) \sin 4m\xi \end{aligned} \quad (1)'$$

我们用 Fourier 方法来求解它,设

$$(\Delta - \kappa_{11})\phi_2 = \sum_{j=0}^{\infty} [L_j(\eta) \cos jm\xi + \bar{L}_j(\eta) \sin jm\xi] \quad (5)$$

代入(1)'式,从所得的无穷常微分方程组看出,除 $\bar{L}_3, L_2, \bar{L}_1, L_0$ 外的 L_j 和 $\bar{L}_j$ 皆可取零解,从而得到

$$\mathcal{Q}_3(\bar{L}_3) = -\frac{2}{\phi mn} \bar{G}_4(\eta) \quad (6)$$

$$\mathcal{Q}_2(L_2) = -\frac{2}{\phi mn} G_3(\eta) + \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{6}{n} \bar{L}_3 \quad (7)$$

$$\mathcal{Q}_1(\bar{L}_1) = -\frac{2}{\phi mn} \bar{G}_2(\eta) - \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{4}{n} L_2 - \mathcal{Q}_3(\bar{L}_3) \quad (8)$$

$$\mathcal{Q}_0(L_0) = -\frac{1}{\phi mn} G_1(\eta) + \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{1}{n} \bar{L}_1 - \frac{1}{2} \mathcal{Q}_2(L_2) \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_j(\cdot) \equiv \left(\sin n\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + j \cos n\eta \right) (\cdot) \\ \bar{\mathcal{Q}}_j(\cdot) \equiv \left(\sin n\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - j \cos n\eta \right) (\cdot) \end{cases} \quad (10)$$

由此可解出

$$\bar{L}_3(\eta) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \tilde{G}_4(\eta', \eta) d\eta' + D \sin^3 n\eta \quad (11)$$

其中 D 是一个自由参数, 而

$$\tilde{G}_4(\eta', \eta) = -\frac{2}{\phi mn} \bar{G}_4(\eta') \left(\frac{\sin n\eta}{\sin n\eta'} \right)^3 \frac{1}{\sin n\eta'} \quad (12)$$

$$L_2(\eta) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \tilde{G}_3(\eta', \eta) d\eta' + \left(6D \frac{c_0 - U}{\phi} \eta + E \right) \sin^2 n\eta \quad (13)$$

其中 E 是另一个自由参数, 而

$$\tilde{G}_3(\eta', \eta) = -\frac{2}{\phi mn} \left[G_3(\eta') + 6 \frac{c_0 - U}{\phi} \bar{G}_4(\eta') \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right] \left(\frac{\sin n\eta}{\sin n\eta'} \right)^2 \frac{1}{\sin n\eta'} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \bar{L}_1(\eta) = B_1 \sin n\eta + \bar{L}_1(\eta) \\ \tilde{L}_1(\eta) \equiv \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \tilde{G}_2(\eta', \eta) d\eta' + \frac{3}{2} D \cos 2n\eta \sin n\eta \\ \quad - 4 \frac{c_0 - U}{\phi} \left(3D \frac{c_0 - U}{\phi} \eta + E \right) \eta \sin n\eta \end{cases} \quad (15)$$

其中 B_1 为待定系数, 而

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\eta', \eta) = & -\frac{2}{\phi mn} \left\{ \bar{G}_2(\eta') - 4 \frac{c_0 - U}{\phi} G_3(\eta') \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} - \bar{G}_4(\eta') \right. \\ & \times \left[1 + 3 \frac{\sin n(\eta + \eta')}{\sin n\eta'} \cdot \frac{\sin n(\eta - \eta')}{\sin n\eta'} \right. \\ & \left. \left. + 12 \left(\frac{c_0 - U}{\phi} \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right)^2 \right] \right\} \frac{\sin n\eta}{\sin n\eta'} \cdot \frac{1}{\sin n\eta'} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{cases} L_0(\eta) = B_0 + c_2(\kappa_{11} - \mu^{-2})\eta + \tilde{L}_0(\eta) \\ \tilde{L}_0(\eta) \equiv B_1 \frac{c_0 - U}{\phi} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \frac{\tilde{G}_1(\eta', \eta)}{\sin n\eta'} d\eta' \\ \quad - \frac{c_0 - U}{\phi} \eta \left[\frac{3}{2} D + 2E \frac{c_0 - U}{\phi} \eta + 4D \left(\frac{c_0 - U}{\phi} \right)^2 \eta^2 \right] \\ \quad + \left(3D \frac{c_0 - U}{\phi} \eta + \frac{E}{2} \right) \cos 2n\eta \end{cases} \quad (17)$$

其中 B_0, c_2 待定, 而

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(\eta', \eta) = & -\frac{2}{\phi m} \left\{ \frac{1}{2} G_1(\eta') + \bar{G}_2(\eta') \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right. \\ & - G_3(\eta') \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin n(\eta + \eta')}{\sin n\eta'} \cdot \frac{\sin n(\eta - \eta')}{\sin n\eta'} \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\frac{c_0 - U}{\phi} \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right)^2 \right] - \bar{G}_4(\eta') \right. \\ & \times \left[-2 \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} + 6 \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \left(\frac{\sin n\eta}{\sin n\eta'} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. + 4 \left(\frac{c_0 - U}{\phi} \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right)^3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

以上给出的 $\bar{L}_3, L_2, \bar{L}_1$ 和 L_0 的表达式是适用于 $n=1$ 的情形的, 此时它们在 $0 < \eta < \pi$ 内有意义, 容易证明, 若定义

$$\begin{cases} \bar{L}_3(0) = \frac{2}{3} \frac{1}{\phi mn} \bar{G}_4(0) \\ \bar{L}_3(\pi) = (-1)^n \frac{2}{3} \frac{1}{\phi mn} \bar{G}_4(\pi) \end{cases} \quad (11)'$$

$$\begin{cases} L_2(0) = \frac{1}{\phi mn} [G_3(0) - 3m(c_0 - U)\bar{L}_3(0)] \\ L_2(\pi) = (-1)^n \frac{1}{\phi mn} [G_3(\pi) - 3m(c_0 - U)\bar{L}_3(\pi)] \end{cases} \quad (13)'$$

$$\begin{cases} \bar{L}_1(0) = \frac{2}{\phi mn} [\bar{G}_2(0) - \bar{G}_4(0) - 3 \cdot \phi mn \bar{L}_3(0) \\ \quad + 2m(c_0 - U)L_2(0)] \\ \bar{L}_1(\pi) = (-1)^n \frac{2}{\phi mn} [\bar{G}_2(\pi) - \bar{G}_4(\pi) \\ \quad - 3 \cdot \phi mn (-1)^n \bar{L}_3(\pi) + 2m(c_0 - U)L_2(\pi)] \end{cases} \quad (15)'$$

则 $\bar{L}_3, L_2$ 和 $\bar{L}_1$ 都是 $0 \leq \eta \leq \pi$ 上的连续函数。事实上, $\eta=0, \pi$ 是式 (11), (13) 和 (15) 所定义函数的可去奇点, 而式 (11)', (13)' 和 (15)' 正是由单侧极限所定义的在这两点上的函数值。对于 $n > 1$ 的情形可以类似地处理。

L_0 中的 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \frac{\tilde{G}_1(\eta', \eta)}{\sin n\eta'} d\eta'$ 在 $\eta=0, \pi$ 附近可能具有对数奇性, 这问题留待求解 ϕ_2 时再行解决。

我们来求 ϕ_2 的 Fourier 级数形式的解:

$$\phi_2(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} ({}_2\phi_j(\eta) \cos jm\xi + {}_2\bar{\phi}_j(\eta) \sin jm\xi) \quad (19)$$

代入 (5) 及 (2) 式就得到 ${}_2\phi_j$ 和 ${}_2\bar{\phi}_j$ 所满足的二阶线性常系数常微分方程齐次边值问题

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} - (\kappa_{11} + j^2 m^2) \right] {}_2\phi_j = L_j(\eta) \\ {}_2\phi_j(0) = {}_2\phi_j(\pi) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} - (\kappa_{11} + j^2 m^2) \right] {}_2\bar{\phi}_1 = \bar{L}_1(\eta) \\ {}_2\bar{\phi}_1(0) = {}_2\bar{\phi}_1(\pi) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

由于齐次问题只有零解,故我们只须求解对应于 $\bar{L}_3$ 、 L_2 、 $\bar{L}_1$ 和 L_0 的四个问题.

$$(I) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} - l_3^2 \right] {}_2\bar{\phi}_3 = \bar{L}_3(\eta) \\ {}_2\bar{\phi}_3(0) = {}_2\bar{\phi}_3(\pi) = 0 \end{cases} \quad (l_3^2 \equiv 8m^2 - n^2 > 0) \quad (22)$$

利用常数变易法并考虑到边界条件可得

$${}_2\bar{\phi}_3(\eta) = \frac{1}{l_3} \{ R_3 \cdot \text{sh}[l_3(\eta - \pi)] + \bar{\phi}_3(\eta) \} \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{\phi}_3(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\pi} \text{sh}[l_3(\eta' - \eta)] \bar{L}_3(\eta') d\eta' \\ R_3 \equiv [\text{sh}(\pi l_3)]^{-1} \bar{\phi}_3(0) \end{cases} \quad (24)$$

$$(II) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} - l_2^2 \right] {}_2\phi_2 = L_2(\eta) \\ {}_2\phi_2(0) = {}_2\phi_2(\pi) = 0 \end{cases} \quad (l_2^2 \equiv l^2 - 3m^2 - n^2 > 0) \quad (25)$$

可解得

$${}_2\phi_2(\eta) = \frac{1}{l_2} \{ R_2 \cdot \text{sh}[l_2(\eta - \pi)] + \bar{\phi}_2(\eta) \} \quad (26)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{\phi}_2(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\pi} \text{sh}[l_2(\eta' - \eta)] L_2(\eta') d\eta' \\ R_2 \equiv [\text{sh}(\pi l_2)]^{-1} \bar{\phi}_2(0) \end{cases} \quad (27)$$

$$(III) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} + n^2 \right] {}_2\bar{\phi}_1 = \bar{L}_1(\eta) \\ {}_2\bar{\phi}_1(0) = {}_2\bar{\phi}_1(\pi) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

取方程的解为

$${}_2\bar{\phi}_1(\eta) = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin n(\eta - \eta') \bar{L}_1(\eta') d\eta' \quad (29)$$

边界条件归结为右端项 $\bar{L}_1$ 与齐次方程的解 $\sin n\eta$ 的正交性即

$$\int_0^{\pi} \sin n\eta \cdot \bar{L}_1(\eta) d\eta = 0 \quad (30)$$

由此决定了:

$$B_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin n\eta \cdot \bar{L}_1(\eta) d\eta \quad (31)$$

$$(IV) \quad \begin{cases} \left[\frac{d^2}{d\eta^2} + l_0^2 \right] {}_2\phi_0 = L_0(\eta) \\ {}_2\phi_0(0) = {}_2\phi_0(\pi) = 0 \end{cases} \quad (l_0^2 \equiv -\kappa_{11} - m^2 + n^2) \quad (32)$$

取方程的解为

$$\psi_0(\eta) = \frac{1}{l_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \sin l_0(\eta - \eta') L_0(\eta') d\eta' \quad (33)$$

将 (17) 式代入 (33) 式, 注意

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \sin l_0(\eta - \eta') \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta'} \frac{\tilde{G}_1(\eta'', \eta')}{\sin n\eta''} d\eta'' d\eta' \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \frac{1}{\sin n\eta''} \left[\int_{\eta''}^{\eta} \sin l_0(\eta - \eta') \cdot \tilde{G}_1(\eta'', \eta') d\eta' \right] d\eta'' \end{aligned}$$

将 $\tilde{G}_1$ 的表达式 (18) 代入方括弧内的积分, 可得

$$\frac{1}{l_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \sin l_0(\eta - \eta') \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta'} \frac{\tilde{G}_1(\eta'', \eta')}{\sin n\eta''} d\eta'' d\eta' = -\frac{2}{\phi m l_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} G_0(\eta, \eta') d\eta' \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} G_0(\eta, \eta') &\equiv G_1(\eta') \frac{1}{l_0} \frac{\sin \frac{l_0(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} \\ &+ \bar{G}_2(\eta') \frac{1}{l_0} \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{1}{\sin n\eta'} \left[\frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} - \frac{1}{l_0} \frac{\sin l_0(\eta - \eta')}{\sin n\eta'} \right] \\ &+ G_3(\eta') \left\{ -\frac{1}{l_0} \frac{\sin^2 \frac{l_0(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} - \frac{1}{\sin n\eta'} \left[\frac{1}{l_0} \cos 2n\eta' \left(\frac{\sin \frac{l_0(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{l_0 + 2n} \frac{\sin \frac{(l_0 - 2n)\eta - (l_0 + 2n)\eta'}{2}}{\sin n\eta'} \cdot \frac{\sin \frac{(l_0 + 2n)(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{l_0 - 2n} \frac{\sin \frac{(l_0 + 2n)\eta - (l_0 - 2n)\eta'}{2}}{\sin n\eta'} \cdot \frac{\sin \frac{(l_0 - 2n)(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} \right] \right\} \\ &+ \frac{2}{l_0} \left(\frac{c_0 - U}{\phi} \right)^2 \frac{1}{\sin n\eta'} \left[\frac{4}{l_0^2} \left(\frac{\sin \frac{l_0(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} \right)^2 - \left(\frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right)^2 \right] \\ &+ \bar{G}_4(\eta') \left\{ \frac{2}{l_0} \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{1}{\sin n\eta'} \left[\frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} - \frac{1}{l_0} \frac{\sin l_0(\eta - \eta')}{\sin n\eta'} \right] \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{c_0 - U}{\phi} \frac{1}{\sin n\eta'} \left[\frac{1}{\sin^2 n\eta'} \left(\frac{1}{l_0^2} \frac{\sin l_0(\eta - \eta')}{\sin n\eta'} - \frac{1}{l_0} \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sin^2 n\eta'} \left(\frac{1}{(l_0 + 2n)^2} \cos \frac{(l_0 - 2n)\eta - (l_0 + 2n)\eta'}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(l_0 + 2n)(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{l_0 + 2n} \cos 2n\eta' \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right) - \frac{1}{\sin^2 n\eta'} \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{(l_0 - 2n)^2} \cos \frac{(l_0 + 2n)\eta - (l_0 - 2n)\eta'}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\sin \frac{(l_0 - 2\pi)(\eta - \eta')}{2}}{\sin n\eta'} - \frac{1}{2} \frac{1}{l_0 - 2\pi} \cos 2n\eta \cdot \frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \Bigg] \\
& + \frac{4}{l_0} \left(\frac{c_0 - U}{\phi} \right)^3 \frac{1}{\sin n\eta'} \left\{ \frac{6}{l_0^2} \frac{1}{\sin^2 n\eta'} \left(\frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{l_0} \frac{\sin l_0(\eta - \eta')}{\sin n\eta'} \right) - \left(\frac{\eta - \eta'}{\sin n\eta'} \right)^3 \right\} \quad (35)
\end{aligned}$$

(34) 和 (35) 式表明, 虽然 L_0 中的 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \frac{\tilde{G}_1(\eta', \eta)}{\sin n\eta'} d\eta'$ 可能有对数奇性, 但由于经过了积分运算, ϕ_0 中相应的部分是没有奇性的. 不仅如此, 和 (12)、(14)、(16) 式一样, (35) 式的写法考虑了尽量减少计算过程中的精度损失, 可以有效地用于数值求积.

再记

$$\begin{aligned}
I(\eta; D, E) \equiv & \frac{1}{l_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \sin l_0(\eta - \eta') \left\{ -\frac{c_0 - U}{\phi} \eta' \left[\frac{3}{2} D \right. \right. \\
& + 2E \frac{c_0 - U}{\phi} \eta' + 4D \left(\frac{c_0 - U}{\phi} \right)^2 \eta'^2 \Bigg] \\
& \left. + \left(3D \frac{c_0 - U}{\phi} \eta' + \frac{E}{2} \right) \cos 2n\eta' \right\} d\eta' \quad (36)
\end{aligned}$$

就可将 (33) 式写成

$$\begin{aligned}
\phi_0(\eta) = & \frac{1}{l_0^2} \left[B_0 - \frac{\pi}{2} \frac{c_0 - U}{\phi} B_1 + \left((\kappa_{11} - \mu^{-2}) c_2 + \frac{c_0 - U}{\phi} B_1 \right) \eta \right. \\
& - \left(B_0 + \frac{\pi}{2} (\kappa_{11} - \mu^{-2}) c_2 \right) \cos l_0 \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \\
& \left. - \frac{1}{l_0} \left((\kappa_{11} - \mu^{-2}) c_2 + \frac{c_0 - U}{\phi} B_1 \right) \sin l_0 \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
& - \frac{2}{\phi m l_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} G_0(\eta, \eta') d\eta' + I(\eta; D, E) \quad (37)
\end{aligned}$$

其中 B_0 、 c_2 由边界条件决定

$$\begin{aligned}
B_0 = & \frac{\pi}{2} \frac{c_0 - U}{\phi} B_1 + \frac{l_0}{\phi m} \left(\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi l_0}{2}} + \frac{\frac{\pi l_0}{2}}{\frac{\pi l_0}{2} - \sin \frac{\pi l_0}{2}} \right) \cdot \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^0 G_0(0, \eta) d\eta \right. \\
& \left. - \frac{\phi m l_0}{2} I(0; D, E) \right] + \frac{l_0}{\phi m} \left(\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi l_0}{2}} - \frac{\frac{\pi l_0}{2}}{\frac{\pi l_0}{2} - \sin \frac{\pi l_0}{2}} \right) \\
& \cdot \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} G_0(\pi, \eta) d\eta - \frac{\phi m l_0}{2} I(\pi; D, E) \right] \quad (38) \\
c_2 = & -\frac{1}{\kappa_{11} - \mu^{-2}} \frac{c_0 - U}{\phi} B_1 - \frac{1}{\phi m} \frac{l_0^2}{\kappa_{11} - \mu^{-2}} \frac{1}{\frac{\pi l_0}{2} - \sin \frac{\pi l_0}{2}} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^0 G_0(0, \eta) d\eta \right.
\end{aligned}$$

$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} G_0(\pi, \eta) d\eta - \frac{\phi m l_0}{2} (I(0; D, E) - I(\pi; D, E)) \quad (39)$$

至此, 我们已经由 $\bar{G}_4, G_3, \bar{G}_2, G_1$ 经过 $\bar{L}_3, L_2, \bar{L}_1, L_0$ 求得了 ${}_2\bar{\phi}_3, {}_2\phi_2, {}_2\bar{\phi}_1$ 和 ${}_2\phi_0$, 再利用 (19) 式就得到

$$\phi_2(\xi, \eta) = {}_2\phi_0(\eta) + {}_2\bar{\phi}_1(\eta) \sin m\xi + {}_2\phi_2(\eta) \cos 2m\xi + {}_2\bar{\phi}_3(\eta) \sin 3m\xi \quad (40)$$

三、数值试验

对于文献[1]中所给的参数, 我们首先由 $\phi_0, \phi_1, \kappa_1, A_1$ 计算了一级近似的高度场和风场(见图1); 而后, 用 Simpson 求积公式计算了 $\bar{L}_3, L_2, \bar{L}_1$ 和 ${}_2\bar{\phi}_3, {}_2\phi_2, {}_2\bar{\phi}_1, {}_2\phi_0$, 同时求得了 c_2 .

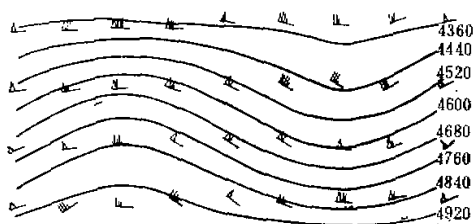


图1 一级近似的高度场 $(\phi_0 + \epsilon\phi_1)\phi^*$ (单位: 米) 和 wind $(V_0 + \epsilon V_1)U^*$

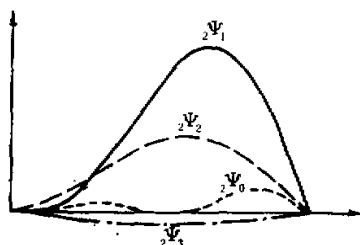


图2 用数值积分求得的 ${}_2\phi_0, {}_2\bar{\phi}_1, {}_2\phi_2$ 和 ${}_2\bar{\phi}_3$.

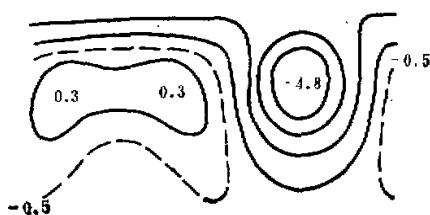


图3 二级修正的高度场 $\epsilon^2\phi_2\phi^*$ (单位: 米)

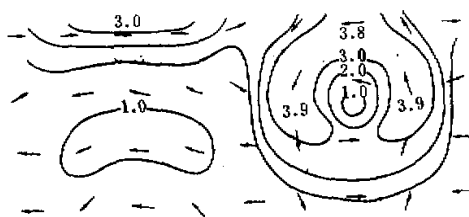


图4 二级修正的风场 $\epsilon^2 V_2 U^*$ (单位: 米秒⁻¹)

${}_2\phi_0 - {}_2\bar{\phi}_3$ 在 $0 \leq \eta \leq \pi$ 上的分布见图2, 它们给出了二级修正流函数中 0—3 波的子

午结构,可以看出,1波和2波是主要的,它们对中高纬流场将有较大的修正。算得的

$$\sigma^2 c_2 \cdot U^* \approx 0.05 \text{ 米秒}^{-1}$$

故移速的二级修正量是可以忽略的。

图3和图4分别是高度场和风场的二级修正量,振幅可达50位势米和4米·秒⁻¹,其作用主要是使一级近似中的长波槽获得明显的加强,这当中“非地转位势” A_2 也起了一定作用。

最后,我们以二级近似

$$\begin{cases} (\phi_0 + \sigma\phi_1 + \sigma^2\phi_2)\Phi^* \\ (u_0 + \sigma u_1 + \sigma^2 u_2)U^* \\ (v_0 + \sigma v_1 + \sigma^2 v_2)U^* \end{cases}$$

在 $t=0$ 时刻的分布为初值,采用文献[2]中给出的格式B(水平格距 $d=196.35$ 公里, $\Delta t=5$ 分钟),作了较长时间的积分。

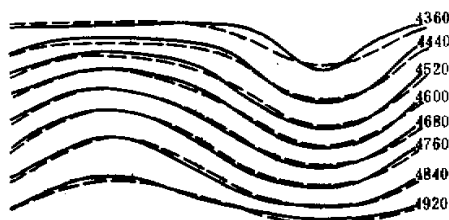


图5 由二级近似积分到第19天的高度场及其初值(虚线)(单位:米)

图5是积分到第19天的高度场,它和初始场(虚线)大体重合,表明二级近似在随时间演变过程中基本上保持了非频散特点。此时波移动的距离恰为波长的四倍,由此算出平均移速为

$$\bar{C} = 4 \times 2\pi \times L^* / 19 \times 86400 \approx 15.3 \text{ 米秒}^{-1}$$

而二级近似的理论移速为

$$U^*(c_0 + \sigma c_1 + \sigma^2 c_2) = U^*(0.369 + \sigma \times 0.488 - \sigma^2 \times 0.02) \approx 15.4 \text{ 米秒}^{-1}$$

这表明,我们的全部计算结果是合理的,所得到的二级近似确实是正压原始方程的一组较好的近似解。

本文是在曾庆存同志的鼓励与指导下完成的。

附录 G_1 、 $\bar{G}_2$ 、 G_3 、 $\bar{G}_4$ 的表达式*

$$\begin{aligned} G_1(\eta) = & -0.0004e^\eta + 0.0050e^{-\eta} \\ & + \cos \eta [-0.0057 - 0.0001e^{-2\eta} + 0.0008e^{-\sqrt{2}\eta} + 0.0059\eta \\ & - 0.0004\eta e^{-\sqrt{2}\eta} - 0.0074\eta^2 + 0.0016\eta^3] \\ & + \cos 3\eta [-0.0013 - 0.0004\eta] \\ & + \sin \eta [-0.0027 + 0.0001e^{-2\eta} - 0.0008e^{-\sqrt{2}\eta} + 0.0161\eta \end{aligned}$$

* 所用参数见[1]。这里已将绝对值小于 10^{-4} 的系数四舍五入。

$$\begin{aligned}
& -0.00037e^{-\sqrt{2}\eta} + 0.0055\eta^2] \\
& + \sin 3\eta[-0.0008 + 0.0012\eta - 0.0004\eta^2] \\
\bar{G}_1(\eta) = & [-0.0045 + 0.0001e^{-2\eta} - 0.0006e^{-\sqrt{2}\eta} - 0.0132\eta + 0.00037e^{-\sqrt{2}\eta} \\
& + 0.0099\eta^2 - 0.0021\eta^3] \\
& + \cos \eta[0.0005e^\eta - 0.0066e^{-\eta}] \\
& + \cos 2\eta[0.0126 - 0.0001e^{-\sqrt{2}\eta} + 0.0058\eta] \\
& + \sin \eta[-0.0005e^\eta - 0.0066e^{-\eta}] \\
& + \sin 2\eta[0.0046 - 0.0099\eta + 0.0031\eta^2] \\
& + 0.0006 \sin 4\eta \\
G_3(\eta) = & \cos \eta[0.0019 + 0.0001e^{-2\eta} - 0.0008e^{-\sqrt{2}\eta} + 0.00047e^{-\sqrt{2}\eta}] \\
& + \sin \eta[0.0007 + 0.0001e^{-2\eta} - 0.0008e^{-\sqrt{2}\eta} + 0.00037e^{-\sqrt{2}\eta}] \\
& + 0.0006 \sin 3\eta \\
\bar{G}_4(\eta) = & 0.0001 - 0.0006 \sin 2\eta
\end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 张学洪, 正压大气非线性波的二级近似(一), 大气科学, 7 卷 4 期, 1983.
 [2] Arne Grammeltevd, M. W. R., 97, 5, 384—404, 1969.

SECOND APPROXIMATIONS TO NONLINEAR WAVES IN THE BAROTROPIC ATMOSPHERE (II)

Zhang Xuehong

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

This is the second part of the work on seeking the second order approximations to the large scale wave solutions of the primitive equations by perturbation method. In this part, a technique for the analytical operations of certain elementary functions on computer has been developed and the solution to the potential vorticity equation has been obtained with this technique. The numerical experiments have shown that the second order approximations given in this paper are reasonable.