

斜压大气中飑线的非线性过程 与 $K-dV$ 方程

李 麦 村

(中国科学院大气物理研究所)

薛 纪 善

(广东热带海洋气象研究所)

提 要

本文从理论上证明斜压非静力平衡大气中飑线的形成与演变和正压大气中一样可以归结为一类由 $K-dV$ 方程所描述的大气孤波。讨论了在具有垂直切变的基本气流中这类孤波的结构特征,并与观测事实作了对比。当沿着低空急流出现有限宽度的初始扰动时,这种孤波可以被激发出来。当扰动的强度与宽度达到一定值时,还将形成一种孤波队列。这正是大气中所观测到的飑线或雷雨列队现象。

文献[1]指出大气低空急流上出现的飑线,本质上是一类孤波的非线性演变过程,可以用著名的 $K-dV$ 方程来描述。除了低空急流的强风速水平切变对飑线有影响以外,过去的研究还指出,基本气流的垂直切变与静力稳定度在飑线的形成与演变过程中也有十分重要的作用。由于文献[1]只分析了正压大气的状况,根据其结果当然还难以得出大气运动的真实图象。本文中我们考察斜压、非静力平衡大气中飑线的非线性演变过程。结果表明,斜压大气中飑线的演变同样归结为由 $K-dV$ 方程所描述的一类孤波,并且理论计算的结果与实际观测到的流场在不少重要方面是一致的。

一、大气动力学方程组的摄动展开

将垂直方向的气压梯度力与重力表示成扰动气压梯度与浮力之和,并采用准 Bousin esq 近似,此时大气运动的基本动力学方程组为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g\theta}{\theta_0}\end{aligned}\quad (1.1)$$

1981年12月17日收到,1982年11月12日收到修改稿。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

式中 θ_0 、 ρ_0 分别是环境流场的位温与密度, 它们只是高度的函数. $\sigma = \frac{d\theta_0}{dz}$. 其余符号同一般习惯. 将各变量写成其特征尺度与无量纲量的乘积:

$$\begin{aligned}(x, y) &= L(x', y') & z &= D(z') & t &= f^{-1}(t') \\ (u, v) &= U(u', v') & w &= \frac{U}{L} D(w') & \theta &= \delta\theta(\theta') \\ \delta p_{x,y} &= \frac{P}{gH} fLU(p') & \delta p_z &= \frac{P}{\theta_0} \delta\theta(p') & \rho_0 &= \frac{P}{gH}(\rho_i)\end{aligned}\quad (1.2)$$

其中 H 是均质大气的高度, P 是地面的特征气压, $\delta p_{x,y}$ 表示水平方向的气压变化, δp_z 则是其垂直方向的变化. 所有右上角带一撇的全是无量纲变量.

以(1.2)式代入(1.1)式得到无量纲方程组:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{U}{fL} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{U}{fL} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'}{\partial y'} - u' \\ \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{U}{fL} \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) &= \frac{gL\delta\theta}{DfU\theta_0} \left(-\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \theta' \right) \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t'} + \frac{U}{fL} \left(u' \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \theta'}{\partial y'} \right) + \frac{\sigma UD}{fL\delta\theta} w' &= 0 \\ \frac{\partial \rho_i u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho_i v'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho_i w'}{\partial z'} &= 0\end{aligned}\quad (1.3)$$

以上已假定 $D \sim H$. 由于(1.3)第四式左端第二项一般较小^[2], 故有:

$$\delta\theta \sim \frac{\sigma UD}{fL}\quad (1.4)$$

根据文[1]所给定的特征尺度, $\frac{U}{fL} \sim 0(1)$, 又引入参数 $\varepsilon = f^2/N^2$, 其中 $N^2 = g\sigma/\theta_0$

是 Brunt-Väisälä 频率, 显然 $\varepsilon \ll 1$. 此时(1.3)式成为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'}{\partial y'} - u' \\ \frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} &= \varepsilon^{-1} \left(-\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \theta' \right) \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \theta'}{\partial y'} + w' &= 0 \\ \frac{\partial \rho_i u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho_i v'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho_i w'}{\partial z'} &= 0\end{aligned}\quad (1.5)$$

引入多尺度变量:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(-c \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.6)$$

(这里 t, x, y, z 均已用来表示新引入的多尺度变量, 今后对这种变量符号重新定义的情况不再特别说明). 将 u', v', w', p', θ' 按参数 ϵ 展开:

$$\begin{aligned} u' &= U(y, z) + \epsilon(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \cdots) \\ v' &= \epsilon^{\frac{1}{2}} v_0 + \epsilon^{\frac{3}{2}} v_1 + \epsilon^{\frac{5}{2}} v_2 + \cdots \\ w' &= \epsilon^{\frac{1}{2}} w_0 + \epsilon^{\frac{3}{2}} w_1 + \epsilon^{\frac{5}{2}} w_2 + \cdots \\ \theta' &= \Theta(y, z) + \epsilon(\theta_0 + \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \cdots) \\ p' &= P(y, z) + \epsilon(p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \cdots) \end{aligned} \quad (1.7)$$

这里 U, P, Θ 分别是基本气流的速度、气压与位温场, 它们只是 y, z 的函数. 将 (1.6)、(1.7) 式代入 (1.5) 式, 取 ϵ 的 0 级近似, 我们有:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial y} - U &= 0 \\ -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial z} + \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

上式表明基本气流是地转平衡与静力平衡的. 对基本气流我们还可以进一步假定

$$\left| \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial y} \right| \ll 1, \quad \text{即} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Theta}{\partial y}.$$

取 ϵ 的一级近似, 我们有:

$$\begin{aligned} (U - c) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (U_y - 1) v_0 + U_z w_0 + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_0}{\partial y} + u_0 &= 0 \\ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_0}{\partial z} - \theta_0 &= 0 \\ (U - c) \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \theta_0 v_0 + w_0 &= 0 \\ \frac{\partial \rho_s u_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v_0}{\partial y} + \frac{\partial \rho_s w_0}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

取 ϵ 的二级近似, 我们有:

$$\begin{aligned} (U - c) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (U_y - 1) v_1 + U_z w_1 + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ = - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \\ u_1 + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_1}{\partial y} = -(U - c) \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_1}{\partial z} - \theta_1 = -(U - c) \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(U - c) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \Theta_1 v_1 + w_1 = - \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_1 w_1)}{\partial z} = 0$$

以上两式中 $U_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $U_z = \frac{\partial U}{\partial z}$, $\Theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial y}$.

二、K-dV 方程的导出

引入新变量:

$$\rho_1 u_0 = u'_0, \quad \rho_1 v_0 = v'_0, \quad \rho_1 w_0 = w'_0, \quad \rho_1 \theta_0 = \theta'_0, \quad p = p'_0 \quad (2.1)$$

$$\rho_1 u_1 = u'_1, \quad \rho_1 v_1 = v'_1, \quad \rho_1 w_1 = w'_1, \quad \rho_1 \theta_1 = \theta'_1, \quad p_1 = p'_1 \quad (2.2)$$

于是可将方程(1.9)与(1.10)写成(已将右上角的一撇省去):

$$(U - c) \frac{\partial u_i}{\partial x} + (U_y - 1) v_i + U_z w_i + \frac{\partial p_i}{\partial x} = A_{u_i}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial y} + u_i = A_{v_i}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial z} - \theta_i = A_{w_i} \quad (2.3)$$

$$(U - c) \frac{\partial \theta_i}{\partial x} + \Theta_1 v_i + w_i = A_{\theta_i}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0 \quad i = 0, 1.$$

其中:

$$A_{u_0} = A_{v_0} = A_{w_0} = A_{\theta_0} = 0 \quad (2.4)$$

$$A_{u_1} = - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_1} \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - w_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_0}{\rho_1} \right)$$

$$A_{v_1} = - (U - c) \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$A_{w_1} = - (U - c) \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$A_{\theta_1} = - \frac{\partial \theta_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_1} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right)$$

由(2.3)式消去其他变量后可得关于 p_i 的方程。关于 p_0 的方程是:

$$\mathcal{L}_{y,z} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.6)$$

其中

$$\mathcal{L}_{y,z} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(U_y - D \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2U_z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \left[U_{zz} - \frac{\Delta_y}{\Delta} - U_z \frac{\Delta_z}{\Delta} \right] \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.7)$$

$$+ \left[-U_z \frac{\Delta_y}{\Delta} + (U_y - 1) \frac{\Delta_z}{\Delta} \right] \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{U-c} \left[-U_{zz} + \frac{\Delta_y}{\Delta} + U_z \frac{\Delta_z}{\Delta} \right]$$

$$\Delta = U_y - 1 + U_z^2 \quad \Delta_y = \frac{\partial \Delta}{\partial y} \quad \Delta_z = \frac{\partial \Delta}{\partial z}$$

关于 p_1 的方程是:

$$\mathcal{L}_{y,z} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = \mathcal{F}_{1y,z} \left(\frac{\partial A_{v1}}{\partial x} \right) + \mathcal{F}_{2y,z} (A_{u1})$$

$$+ \mathcal{F}_{3y,z} (A_{\theta 1}) + \mathcal{F}_{4y,z} \left(\frac{\partial A_{w1}}{\partial x} \right) \quad (2.8)$$

其中

$$\mathcal{F}_{1y,z} = - \left[-\frac{\partial}{\partial y} - U_{zz} - U_z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{U-c} - \frac{1}{\Delta} (\Delta_y + U_z \Delta_z) \right]$$

$$\mathcal{F}_{2y,z} = \frac{-1}{U-c} \left[\frac{\partial}{\partial y} + U_{zz} + U_z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\Delta} (\Delta_y + U_z \Delta_z) \right] \quad (2.9)$$

$$\mathcal{F}_{3y,z} = \frac{-1}{U-c} \left[-U_z \frac{\partial}{\partial y} + (U_y - 1) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\Delta} (U_z \Delta_y + (U_y - 1) \Delta_z) \right]$$

$$\mathcal{F}_{4y,z} = - \left[-U_z \frac{\partial}{\partial y} - \frac{U_z}{U-c} + (U_y - 1) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\Delta_y}{\Delta} U_z + \frac{U_y - 1}{U-c} \frac{\Delta_z}{\Delta} \right]$$

(2.6)式是一个变量可分离的方程, 设其解为:

$$p_0 = \tilde{p}_0(y, z) n_0(\tau, x) \quad (2.10)$$

从而

$$\mathcal{L}_{y,z}(\tilde{p}_0) = 0 \quad (2.11)$$

在一定的定解条件下可以解出 $\tilde{p}_0$ 与特征值 c , 并进而求得全部解:

$$u_0 = \tilde{u}_0(y, z) n_0 \quad v_0 = \tilde{v}_0(y, z) n_{0x} \quad (2.12)$$

$$w_0 = \tilde{w}_0(y, z) n_{0x} \quad \theta_0 = \tilde{\theta}_0(y, z) n_0$$

其中 $n_0(\tau, x)$ 未确定. 将(2.12)式代入(2.5)式得:

$$A_{u1} = -\tilde{u}_0 n_{0x} - \left(\frac{1}{\rho_r} \tilde{u}_0^2 + \frac{1}{\rho_s} \tilde{u}_{0y} \tilde{v}_0 + \tilde{w}_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{u}_0}{\rho_r} \right) \right) n_0 n_{0x}$$

$$A_{v1} = -(U-c) \tilde{v}_0 n_{0xx}$$

$$A_{w1} = -(U-c) \tilde{w}_0 n_{0xx} \quad (2.13)$$

$$A_{\theta 1} = -\tilde{\theta}_0 n_{0x} - \frac{1}{\rho_r} (\tilde{u}_0 \tilde{\theta}_0 + \tilde{v}_0 \tilde{\theta}_{0y}) n_0 n_{0x}$$

由于(2.8)式的齐次部分与(2.11)式相同, 故(2.8)式有解的条件可归结为:

$$\left\{ \tilde{p}_0^* \left\{ \left\{ \mathcal{F}_1 [(U-c) \tilde{v}_0] + \mathcal{F}_4 [(U-c) \tilde{w}_0] \right\} n_{0xx} \right. \right.$$

$$+ \left. \left\{ \mathcal{F}_2(\tilde{u}_0) + \mathcal{F}_3(\tilde{\theta}_0) \right\} n_{0x} \right.$$

$$+ \left. \left\{ \mathcal{F}_1 \left(\frac{1}{\rho_r} \tilde{u}_0^2 + \frac{1}{\rho_s} \tilde{u}_{0y} \tilde{v}_0 + \tilde{w}_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\tilde{u}_0}{\rho_r} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. \mathcal{F}_3 \left(\frac{1}{\rho_r} \tilde{u}_0 \tilde{\theta}_0 + \frac{1}{\rho_s} \tilde{v}_0 \tilde{\theta}_{0y} \right) \right\} n_0 n_{0x} \right\} dy dz = 0 \quad (2.14)$$

或写成:

$$A_1 n_{0y} + A_2 n_{0x} + A_3 n_{0xx} = 0 \quad (2.15)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \iint \{ \mathcal{F}_2(\tilde{u}_0) + \mathcal{F}_3(\tilde{\theta}_0) \} \tilde{p}_0^* dy dz \\ A_2 &\equiv \iint \left\{ \mathcal{F}_2 \left(\frac{1}{\rho_i} \tilde{u}_0^2 + \frac{1}{\rho_i} \tilde{u}_{0y} \tilde{v}_0 + \tilde{w}_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{u}_0}{\rho_i} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}_3 \left(\frac{1}{\rho_i} \tilde{u}_0 \tilde{\theta}_0 + \frac{1}{\rho_i} \tilde{v}_0 \tilde{\theta}_{0y} \right) \right\} \tilde{p}_0^* dy dz \\ A_3 &\equiv \iint \{ \mathcal{F}_1[(U-c)\tilde{v}_0] + \mathcal{F}_4[(U-c)\tilde{w}_0] \} \tilde{p}_0^* dy dz \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中 $\tilde{p}_0^*$ 是 $\mathcal{L}(\tilde{p}_0) = 0$ 的共轭方程的解, 由下式定义:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{y,z}^*(\tilde{p}_0^*) &= 0 \\ \mathcal{L}_{y,z}^* &\equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (U_y - 1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2U_z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(U_{xz} - \frac{\Delta_y}{\Delta} - U_z \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left[-U_z \frac{\Delta_y}{\Delta} + (U_y - 1) \frac{\Delta_z}{\Delta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{U-c} \left[-U_{xz} + \frac{\Delta_y}{\Delta} + U_z \frac{\Delta_z}{\Delta} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.15) 式即为著名的 K - dV 方程。它包含两类过程, 即频散过程与非线性过程。(2.12) 式表明, 在斜压非静力平衡大气中频散过程与非线性过程仍是飚线形成的主要过程。飚线形成开始阶段, 重力波的非线性集中占优势, 波被压缩, 并引起了频散过程的加强。两者达到平衡时出现飚线的平衡阶段, 从而使飚线具有“孤波”的特点。(2.16) 式中的各项系数与垂直速度、温度场的结构以及基本气流的垂直切变有关, 从而与正压大气中的情况不同。

由于微分算式 $\mathcal{L}_{y,z}$ 对于变量 y, z 一般是不可分离的, 因而我们不能给出关于解的一般解析形式。下面着重讨论在具有垂直切变的基本气流中这类孤波的空间结构与孤波的激发问题。

三、具有垂直切变的基本气流中孤波的结构

根据关于 K - dV 方程的理论, 方程(2.15)具有孤波解:

$$\begin{aligned} n_0 &= a \operatorname{sech}^2(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta) \\ a &= 2k^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) 式代表一个以与振幅成比例的波速移动的孤立波。以(3.1)式代入(2.10)、(2.12) 式得到扰动的全部解:

$$\begin{aligned} p_0 &= \tilde{p}_0 a \operatorname{sech}^2(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta) \\ u_0 &= \tilde{u}_0 a \operatorname{sech}^2(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta) \\ v_0 &= -2\tilde{v}_0 a k \operatorname{sech}^2(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta) \operatorname{th}(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\omega_0 = -2\tilde{\omega}_0 a k \operatorname{sech}^2(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta) \operatorname{th}(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta)$$

$$\theta_0 = \tilde{\theta}_0 a \operatorname{sech}^2(A_1/A_3 kx - 4k^3\tau + \delta)$$

考虑到文[1]已讨论过水平切变基本气流中的孤波, 本文将只讨论具有垂直切变的基本气流中上述波动的空间结构。为使问题简化, 我们假定基本气流是水平均匀的, 即 $U_y = 0$ 。图 1 给出用数值方法求解方程(2.6)并代入(3.2)式后得到的结果, 计算中 U_x 取为 -1.2 , 即基本气流的风速随高度而减小。图 1a 是垂直速度与涡度、散度随高度的分布。垂直

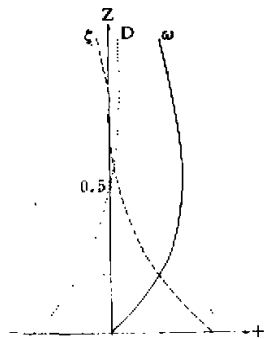


图 1a 反气旋扰动前部涡度、散度、垂直速度随高度的分布

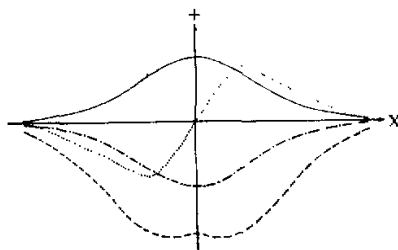


图 1b 高压扰动区气压(实线)、涡度(虚线)、散度(点线)、温度(点划线)沿 x 方向的分布

速度在无量纲高度 $0.4-0.5$ 之间达到最大值, 而散度值与涡度值则在近地面处达到最大。高层的涡度与散度场与低层符号相反, 并且在同一高度上涡度与散度的符号几乎总是相反的, 即正涡度区有辐合, 负涡度区有辐散。但这只是扰动中心前部的情况, 如后面提到的, 在扰动的不同部位, 涡度与散度会有不同的配置。扰动随高度而衰减, 这显然是由于负的垂直切变的影响。图 1b 是气压、温度、涡度、散度沿横坐标方向即基本气流方向的分布。首先, 气压扰动呈孤波状, 它代表了一个中尺度高压(或低压)扰动。气压扰动量的符号与温度扰动量的符号相反, 即地面高压是冷性的, 低压则是暖性的。在一个孤波范围内涡度符号一致, 但散度的符号在扰动中心两侧却是相反的。这表明围绕中心存在一个垂直环流圈。纬向风速的扰动量也呈孤波状分布(图略)。这表明上述扰动也表现为基本气流中的一个风速中心。

为了验证上述理论推断, 我们与实测资料作一对比。图 2 是丁一汇等根据著名的河南 75.8 暴雨期间的实测资料计算得出的结果^[3]。其中图 2a 是涡度、散度与垂直速度随高度的分布。低层气旋区有辐合上升, 高层反气旋有辐散。上升运动在对流层中层达到最大, 而涡度与散度绝对值却在对流层低层达到最大。这些主要方面与我们的理论计算相一致。涡度与散度的最大值离地面有一定距离, 显然与摩擦作用以及在边界层中基本气流风速随高度而增加有关系。而在我们的模式中这些因素都没有包含在内。图 2b 是这次暴雨期间沿低空急流轴垂直剖面上的垂直环流^[3]。在低空急流中心前后也存在一圈垂直环流。暴雨发生在强垂直运动区。这与我们的计算结果是相似的。在我们的计算中没有暴雨区以西的垂直环流。这是因为我们只分析了 $K-dV$ 方程的单个孤立波解的结

构,气压扰动、风速扰动等都只有一个极值。同时,我们也没有将云与降水的物理过程包括在内。

在天气分析^[4]中常发现有与中尺度扰动相联系的低空急流上的强风速中心存在,它沿着低空急流向前传播,其长度为几百公里,宽度为几十公里。在华南前汛期暴雨的研究中也发现对流层低层有尺度较小的强风速中心向前传播,它们会使降水增大。根据前面的分析,这类强风速中心正是我们这里提到的孤立波在流场上的一个反映。

上面所讨论的是 $K-dV$ 方程的单个孤波解。根据 $K-dV$ 方程的理论,这个解只在很特殊的初始条件下才能得到。一般情况下,它还包含一个波动形式的波尾,这正对应了与中尺度高压相伴随的尾随低压等现象,从而使波与真实的中尺度系统更加接近。

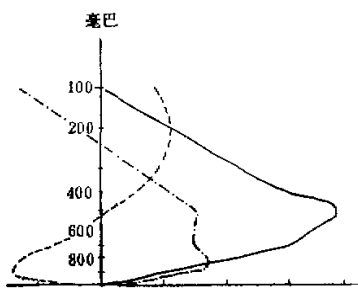


图 2a 暴雨区垂直速度(实线)、相对涡度(点划线)和散度(虚线)的垂直分布图(引自文献[3])

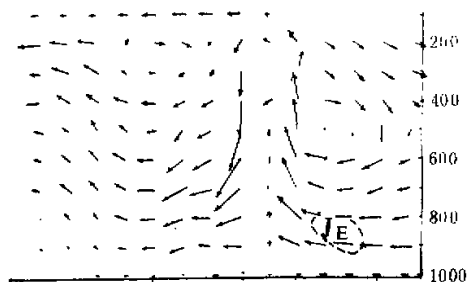


图 2b 沿急流轴的垂直环流剖面图(引自文献[3])

四、大气中孤波的激发

前面已经提到 $K-dV$ 方程最引人瞩目的特点是具有稳定的孤波解。这种孤波的移速与振幅成正比,而与宽度平方成反比,并且在相互作用时象“粒子”一样。关于飑线的天气学研究所揭示的许多现象都与这类孤波特点相象。但 $K-dV$ 方程并不是在任何情况下都能得到孤波解。根据 $K-dV$ 方程的理论,(2.12)式的解取决于初始条件。对于一般的初始条件,(2.12)式的解由若干个稳定的孤波与振荡形式的波列(尾)及其相互作用部分所组成。由于振荡形式的波列的能量是频散的,时间充分长以后,孤波将居于主导地位。讨论初始扰动对这类孤波的激发,不论在理论上或实践上都有重大意义。

为了讨论方便,先作自变量与因变量的变换,把(2.12)式化为:

$$u_\tau - 6uu_\eta + u_{\eta\eta} = 0 \quad (4.1)$$

$$u = -\frac{1}{6} A_1^{-2/3} A_2 A_3^{-1/3} n_0(\tau, x) \quad (4.2)$$

$$\eta = (A_1/A_3)^{1/3} x \quad (4.3)$$

我们这里只讨论 A_1 、 A_2 、 A_3 同号的情况(这并不意味着它们必定同号,它们的符号将决定孤波振幅的符号,我们拟另文作专门讨论了。如果初始时刻沿着低空急流的方向,宽度为 l 的范围内出现了风或气压、温度扰动。不妨认为扰动强度 A 在扰动范围内是均匀的。这

样的初始扰动将激发出若干个孤波。根据对 $K-dV$ 方程解析求解的结果^[5], 足够长时间以后, 它们是互相分离的, 且每个波均可以表示成:

$$-u = d_n \operatorname{sech}^2(k_n(A_1/A_3)^{1/2}x - 4k_n^3\tau + \text{const}) \quad (4.4)$$

$$d_n = 2k_n^2 \quad (4.5)$$

被激发的孤波数目与初始扰动的强度以及伸展范围有关。引入如下参数:

$$s = \left(\sqrt{\frac{1}{6}} A_1^{1/2} A_3^{-1/2} \right) Al \quad (4.6)$$

当 s 较小时, 只有一个孤波出现, 且

$$k_1 = - \left(\frac{1}{12} A_1^{-1/3} A_2 A_3^{-2/3} \right) Al \quad (4.7)$$

孤波振幅为:

$$a_1 = \left(\frac{1}{72} A_1^{-1} A_2^2 A_3^{-1} \right) A^2 l^2 \quad (4.8)$$

孤波在 x 方向的移速为:

$$c_{g1} = \left(\frac{1}{36} A_1^{-1} A_2^2 A_3^{-1} \right) A^2 l^2 \quad (4.9)$$

随着 s 的增加, 被激发的孤波数目增加, 其数目 N 是满足 $N \leq \frac{s}{\pi} + 1$ 的最大整数。并且

孤波的振幅在 0 与 $2A$ 的范围内。由于大振幅的孤波移动快, 经过初始时间的相互作用后, 某一特定时刻 τ , 振幅为 a 的孤波将出现在 $\eta = 2a\tau$ 的位置上。因而孤波解按其强度而排成阵列。以上讨论说明大气中有限范围内的扰动可以形成若干个孤波组成的孤波阵列。而且不论是初始扰动的宽度还是强度的增加, 都可以使孤波阵列由孤波数目以及个别孤波的强度、移速加大。

初始扰动的宽度对孤波的激发具有与初始扰动强度相当的地位, 这一点有现实意义。因为初始扰动总是具有一定宽度的。即使初始扰动不十分强, 只要宽度与强度结合起来仍达到足够的数值, 同样可以产生出孤波。

五、小 结

在斜压非静力平衡大气中, 飚线的发生与演变本质上是在非线性过程与频散过程共同作用下形成的一类大气孤波, 可由 $K-dV$ 方程来描述。

大气的三维运动、非静力平衡以及环境风场的垂直切变都对孤波的结构有影响。理论计算的扰动结构与天气观测事实在不少重要方面是一致的。

当大气中沿着低空急流, 在有限范围内出现风或气压扰动时, 就可以激发出若干个沿着低空急流传播的孤波, 无论是初始扰动的范围或是强度增加, 都可以使孤波的数目与强度、移速增大, 并且它们将形成一个为首孤波最强, 移速最快, 逐个递减的孤波队列。在大气中观测到的飚线或雷雨列队现象, 可以解释为一个扰源地区激发出来的孤波队列。

参 考 文 献

- [1] 李麦村, 中国科学, 341—350, 1981.
[2] 叶笃正、李麦村, 大气运动中的适应问题, 94—95, 科学出版社, 1965.
[3] 丁一汇等, 1975年8月上旬河南特大暴雨的研究, 大气科学, 276—289, 1978.
[4] 陶诗言等, 中国之暴雨, 55—56, 科学出版社, 1980.
[5] Whitham, G. B. Linear and Nonlinear Waves, 595—599, 1974.

NON-LINEAR EVOLUTION PROCESS OF SQUALL LINES IN BAROCLINIC ATMOSPHERE AND K - dV EQUATION

Li Maicun

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Xue Jishan

(Institute of Tropical and Oceanic Meteorology, Guangdong Province)

Abstract

This paper theoretically proves that the formation and the evolution of squall lines in the baroclinic, non-static atmosphere, as in the barotropic atmosphere, may be referred to a kind of atmospheric solitary wave described by the K - dV equation. The baroclinity and the non-static state of the atmosphere as well as the vertical shear of basic flow have influences on the characteristics and the structure of the solitary wave. When an initial disturbance with limited width occurs along the lower jet, this kind of solitary wave may be excited. If the strength and the width of the disturbance reach definite values, a train of solitary waves lined up forms. This is just the arrangement phenomenon of squall lines or thunderstorm complex observed in the atmosphere.