

齐次积分方程数值求解法及在反演气溶胶谱分布上的应用

邱金桓

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文论述了一个数值求解齐次的第一类 Fredholm 积分方程的方法,并以消光系数和体积散射系数综合反演气溶胶谱分布为例,说明采用比值通道以反演气溶胶谱分布有利于消除多次散射等系统误差。本文还证明了在 Junge 谱分布下,不同波长的体积消光系数、散射相函数等 Mie 散射光学参数之比与折射率无关的特性,指出了采用比值通道能够有效地消除折射率的不确定性对于消光——小角散射法反演气溶胶谱分布的影响。

一、问题的提出

根据吕达仁等人的工作^[1],消光——小角散射法遥感气溶胶谱分布的反演方程为:

$$\begin{cases} \tau_i = \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda_i, m) n(r) dr, & i = 1, \dots, I; \\ \beta_j = \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda, m) P(r, \lambda, m, \theta_j) n(r) dr, & j = 1, \dots, J. \end{cases} \quad (1)$$

(1)式中, τ_i 和 β_j 分别为气溶胶的体积消光系数和散射函数, λ_i 为波长, r 为粒子半径, m 为气溶胶折射率, θ_j 为散射角, $Q(r, \lambda, m)$ 为消光因子, $P(r, \lambda, m, \theta_j)$ 为单个粒子的相函数, $n(r)$ 为谱分布。

积分方程(1)是大气遥感中经常涉及的非齐次的第 一类 Fredholm 积分方程。

根据 Shaw 的研究^[2],当太阳的天顶角小于 80 度时,在无云的天气下多次散射对于消光观测的影响可忽略。但当气溶胶光学厚度较大、太阳高度角较低时,多次散射对于华盖天空亮度的贡献明显增大,忽略多次散射,所算的体积散射函数系统偏大。此外,我们早先的研究表明^[3],由于消光系数和小角前向散射对于折射率的变化具有不同的敏感性,采用消光——小角散射法以反演气溶胶谱分布,在不同的折射率初值下不具有反演谱形的不变性,折射率对于小粒子的反演结果影响较大。如何消除多次散射等系统误差以及折射率的不确定性对于反演结果的影响,对于提高遥感精度是重要的。本文提出了一个新的数学处理方法,即由非齐次积分方程(1)构造一个齐次的积分方程组并加以求解,理论分

析和数值试验都表明这个方法既有助于消除系统误差, 又能有效地克服折射率的不确定对于消光——小角散射法反演气溶胶谱形的影响。

二、齐次积分方程数值求解

方程(1)可化为

$$g_i = \tau_{i+1}/\tau_1 = \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda_{i+1}, m) n(r) dr / \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda_1, m) n(r) dr, \quad (2a)$$

$$i = 1, 2, \dots, I-1;$$

$$g_{i+I-1} = \beta_{i+1}/\beta_1$$

$$= \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda, m) P(r, \lambda, m, \theta_{i+1}) n(r) dr / \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda, m) P(r, \lambda, m, \theta_1) n(r) dr,$$

$$i = 1, 2, \dots, J-1. \quad (2b)$$

这里我们采用了比值通道以利于消除系统误差。由上述方程可推得如下的齐次积分方程组:

$$\int_0^\infty \pi r^2 k_i(r, m) n(r) dr = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I+J-2, \quad (3)$$

$$k_i(r, m) = \begin{cases} Q(r, \lambda_{i+1}, m) - g_i Q(r, \lambda_1, m), & i = 1, \dots, I-1; \\ Q(r, \lambda, m) [P(r, \lambda, m, \theta_{i-I+2}) - g_i P(r, \lambda, m, \theta_1)], & i = I, \dots, I+J-2. \end{cases}$$

本文采用 Philips-Twomey 求约束光滑解的方法从方程组(3)反演出物理上有意义的解。导数光滑约束并不适于提取这个解, 因为零解本身就是方程(3)的光滑解。为此, 本文采用另一形式的约束, 即根据事先的已知信息, 假设一个初始的谱分布, 并在这个函数的邻域内, 寻求满足方程(3)的解。

由于气溶胶谱分布具有随 r 迅变的特点, 如前^[1], 把 $n(r)$ 分为快变函数 $h(r)$ 和慢变函数 $f(r)$ 的乘积, 于是方程(3)变为

$$\int_0^\infty \pi r^2 k_i(r, m) h(r) f(r) dr = 0, \quad (4)$$

如果 $h(r) \equiv n(r)$, 则 $f(r) \equiv 1$, 慢变函数解恒为常数 1。

把积分方程(4)矩阵化, 在使 $\sum_j (f(r_j) - 1)^2$ 取极小值的约束下, 不难推得最小二乘解为

$$f = (A^T A + \alpha I)^{-1} \alpha e, \quad (5)$$

(5)式中, $e = [1, 1, \dots, 1]^T$, $f = [f(r_1), \dots, f(r_m)]^T$ 是解向量, I 为单位矩阵, A 为系数矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, α 为拉格朗日乘子。

由于气溶胶谱分布在不同的条件下变化较大, 事前的较准确的估计是困难的, 为此, 方程(5)采用如下的迭代算法:

$$\begin{cases} f^{(n+1)} = (A^{(n)T} A^{(n)} + \alpha^{(n)} I)^{-1} \alpha^{(n)} e, \\ A_{ij}^{(n)} = \int_{r_j}^{r_{j+1}} \pi r^2 k_i(r, m) h^{(n)}(r) dr, \\ h^{(n)}(r) = h^{(n-1)}(r) f^{(n-1)}(r). \end{cases} \quad (6)$$

收敛判据取 $\left[\sum_{i=1}^M (f^{(n)}(r_i) - 1)^2 / M \right]^{\frac{1}{2}} < \delta$.

本文取 $\delta = 0.04$, $\alpha^{(n)} = \alpha^* \sum_{i=1}^M A_{ii}^{(n)*}$, α^* 的选取后面另作讨论.

由齐次方程组(4)求得的谱分布只是相对谱分布,记为 $n^{(R)}(r)$, 则待求的谱分布为 $n^*(r) = c n^{(R)}(r)$, 系数 c 既可通过消光系数确定如下:

$$c = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^J r_i / \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda_i, m) n^{(R)}(r) dr, \quad (7)$$

也可由体积散射函数通过下式确定:

$$c = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \beta_i / \int_0^\infty \pi r^2 Q(r, \lambda, m) P(r, \lambda, m, \theta_i) n^{(R)}(r) dr. \quad (8)$$

在一次散射的条件下,地平纬圈华盖天空亮度直接正比于体积散射函数,由(7)式确定 c 值,华盖天空亮度只作相对测量即可,无须确定仪器常数.但因前向小角散射对折射率不敏感,由(8)式确定 c 值较少受到折射率的影响.后面,若不作说明,均表示由(8)式确定 c 值.

定义解的绝对平均误差 EN 及余数 R 如下:

$$EN = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |1 - n^*(r_i) / n(r_i)| \%, \quad (9)$$

$$R = \left\{ \frac{1}{I + J - 2} \sum_{i=1}^{I+J-2} \left[\int_0^\infty \pi r^2 k_i(r, m) n^*(r) dr \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

(9)式中, $n(r)$ 为正确的谱分布, r_i 为求解点所对应的粒子半径.

根据(5)式,若 $\alpha^* = 0$, 则 $f = 0$, 解为零;若 $\alpha^* = \infty$, 则 $f^{(n)} = 1$, 解为初始的快变函数.从表1和表2可以看出解的精度及余数 R 与 α^* 值的依赖关系.在所有的数值试验中,通道的选取为

消光通道: $\lambda_i = 0.33, 0.44, 0.55, 0.7, 1.01$ 微米;

小角散射通道: $\lambda = 0.55$ 微米, $\theta_i = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 8^\circ$. m^* 和 m 分别表示用于反演的折射率初值和真值,初始快变函数均取 Junge 谱.

在表1和表2中,序号 No. = 1 表示 $\nu = 3$ 的 Junge 谱, No. = 2 表示如下双模式分布^[3]:

$$n(r) = 7.88 \times 10^{13} \times \left[\frac{1}{1 + (r/0.015)^{4.2}} + 9.67 \times 10^{-10} \exp(-0.831 \ln^2 r) \right],$$

δg_i 表示 g_i 值的相对误差.

如表1所示,对于 g_i 无误差的情形, α^* 值在很宽范围内选取,解的精度都很高,如对 Junge 谱,当 $10^{-8} \leq \alpha^* \leq 1$ 时,解的平均误差不超过 10%,当 $10^{-6} \leq \alpha^* \leq 0.1$ 时, $EN \leq 3\%$,精度很高.对于 g_i 具有 $\pm 5\%$ 误差的情形,选取 $0.1 \leq \alpha^* \leq 1$ 为佳, α^* 值偏小,解的误差偏大,当 α^* 小于 0.001 时,解出现负值,但从表2看,余数 R 反而变小.上述特性跟 Twomey 指出的非齐次积分方程的求解特性相吻合^[4],即最小的余数并不对应最精确的数值解,测量误差较大时,拉格朗日乘子以取大些为宜.根据数值试验,对于广泛的情形,选

表 1 绝对平均误差 EN 随 α^* 值的变化

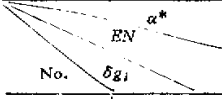
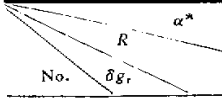
		10^3	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
No.	δg_i									
1	0	51.7	47.2	8.8	2.4	2.2	1.6	1.0	1.7	10.0
2	0	59.1	37.7	11.6	15.5	16.3	8.1	16.7	19.1	24.2
1	$\pm 5\%$	51.5	37.4	7.3	6.2	8.3	解出现负值			
2	$\pm 5\%$	50.1	39.7	11.9	20.6	59.4	解出现负值			

表 2 余数 R 随 α^* 值的变化

		10^1	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
No.	δg_r									
1	0	3.3	1.0	0.12	0.094	0.0081	0.0053	0.0060	0.0083	0.010
2	0	4.1	1.2	0.13	0.10	0.090	0.00056	0.000010	0.00047	0.028
1	$\pm 5\%$	14.0	11.2	0.85	0.30	0.047	0.025	0.030	0.048	0.19
2	$\pm 5\%$	14.8	12.0	1.18	0.56	0.052	0.0071	0.0065	0.0010	0.028

取 $0.1 \leq \alpha^* \leq 1$ 是比较合适的。

图 1 是在不同的初始谱分布下海洋性的 Deirmendjian 谱的反演结果。分别选取 $\nu = 1, 2, 3, 4$ 很宽范围内 Junge 分布作为初始快变函数, 除 $3\nu = 4$ 的情形, 解与真谱都有较好的吻合, 特别是在 $0.2 < r < 2$ 微米范围内, 解的精度更高, 采用前面提到的迭代算法对于提高遥感精度是有效的。

三、折射率效应

由于消光系数对于折射率的变化具有一定的敏感性, King 等人指出^[5], 采用消光法遥感气溶胶谱分布, 折射率的选取是一个必须考虑的实际问题。Yamamoto 和 Tanaka 在理论上研究了折射率对于反演谱分布的影响^[6], 他们根据 Van de Hulst 的有关消光系数(虚部为零情形)的一个近似表达式, 证明了对于不同的折射率, 由消光系数反演气溶胶谱分布基本上保持反演谱形的不变性。他们证明了折射率虚部为零的情形。在 Junge 谱分布下, 即使折射率虚部不为零, 也可以证明, 不仅由消光系数, 而且由不同波长相同散射角的体积散射相函数、Stokes 参数等 Mie 散射光学参数以反演气溶胶谱分布在不同的折射

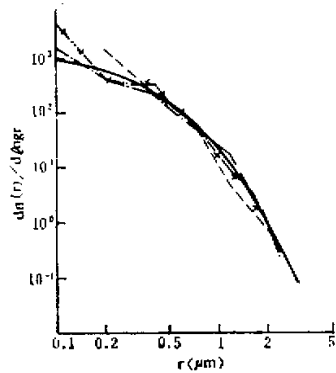


图 1 不同初始谱分布下的反演结果

$m = m^* = 1.5 - 0.01i$,
 $n(r) = c \exp(-8.9443r^{0.4})$,
 - - - $\nu = 4$,
 - - - $\nu = 1$, - - - $\nu = 2$,
 $\times \times \times \nu = 3$.

率初值下都保持相对谱形的不变性,而且不同波长的同类 Mie 散射体积光学参数之比在 Junge 分布下与折射率无关。这里提及的“同类”是指唯有波长参数不同的一类 Mie 散射参数。下面给以证明。

根据 Mie 散射理论,消光系数、体积散射函数等与波长和气溶胶谱的依赖关系均可表为

$$g_i(\lambda_i, m) = \int_0^\infty \pi r^2 k\left(\frac{2\pi r}{\lambda_i}, m\right) n(r) dr, \quad (11)$$

若 g_i 为消光系数,则 $k\left(\frac{2\pi r}{\lambda_i}, m\right)$ 为消光因子,若 g_i 为体积散射函数,则 $k\left(\frac{2\pi r}{\lambda_i}, m\right)$ 为 Mie 强度因子。

$$\text{设} \quad n(r) = cr^{-(s+1)}, \quad (12)$$

作积分变换 $x = \frac{2\pi r}{\lambda_i}$, 则在 Junge 分布下(11)式可化为

$$\begin{aligned} g_i(\lambda_i, m) &= \int_0^\infty \pi r^2 k\left(\frac{2\pi r}{\lambda_i}, m\right) cr^{-(s+1)} dr \\ &= \int_0^\infty \pi c \left(\frac{\lambda_i}{2\pi}\right)^{2-s} k(x, m) x^{1-s} dx \\ &= \pi c \left(\frac{\lambda_i}{2\pi}\right)^{2-s} \int_0^\infty k(x, m) x^{1-s} dx, \end{aligned} \quad (13)$$

根据(13)式,在相同波长下,折射率分别为 m^* 和 m 的 g_i 的比值为

$$\begin{aligned} R_i &= g_i(\lambda_i, m) / g_i(\lambda_i, m^*) \\ &= \int_0^\infty k(x, m) x^{1-s} dx / \int_0^\infty k(x, m^*) x^{1-s} dx, \end{aligned} \quad (14)$$

上式表明,在 Junge 分布下, R_i 只与折射率及其 Junge 谱参数 s 有关,而与波长无关,记为 $R(m, m^*, s)$ 。因此,在 Junge 分布下,(11)式可化为

$$\begin{aligned} g_i(\lambda_i, m) &= g_i(\lambda_i, m) / g_i(\lambda_i, m^*) \times g_i(\lambda_i, m^*) \\ &= R(m, m^*, s) \int_0^\infty \pi r^2 k\left(\frac{2\pi r}{\lambda_i}, m^*\right) n(r) dr \\ &= \int_0^\infty \pi r^2 k\left(\frac{2\pi r}{\lambda_i}, m^*\right) n^*(r) dr, \end{aligned} \quad (15)$$

$$n^*(r) = R(m, m^*, s) n(r). \quad (16)$$

(15) 式表明,若取若干不同波长的 g_i 通道,折射率初值分别为 m 和 m^* , 则反演结果分别为 $n(r)$ 和 $n^*(r)$, 两者的关系满足(16)式,相对谱分布是不变的,两者只相差一系数因子 $R(m, m^*, s)$, 若 $m^* = m$, 则 $R(m, m^*, s) = 1$ 。

下面再证不同波长的消光系数(或不同波长同样散射角的体积散射相函数等)之比在 Junge 分布下与折射率无关的特性。

根据(13)式,在 Junge 分布下同一折射率 m 、波长分别为 λ_1 和 λ_2 的 g_i 的比值为

$$\begin{aligned} T &= g_i(\lambda_1, m) / g_i(\lambda_2, m) \\ &= \pi c \left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^{2-s} \int_0^\infty k(x, m) x^{1-s} dx / \left[\pi c \left(\frac{\lambda_2}{2\pi}\right)^{2-s} \int_0^\infty k(x, m) x^{1-s} dx \right] \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2-\nu}.$$

(17)

比值 T 与折射率无关。如果 Junge 分布的粒子半径区间有限,上述特性并不严格成立。从表 3 可以看出有限区间的影响。表中 τ_λ 和 $\beta_{\pi\lambda}$ 分别为消光系数和后向散射系数,谱分布为 $\nu = 3$ 的 Junge 谱,其区间为 $0.05 \leq r \leq 5$ 微米, δ_{Mm} 为在不同的折射率下,同行参数的最大值与最小值之比。

表 3 $\nu = 3, 0.05 \leq r \leq 5$ 微米, $\lambda_1 = 0.5$ 微米, $\lambda_2 = 0.7$ 微米

m	$1.5-0.01i$	$1.5-0.05i$	$1.4-0.01i$	δ_{Mm}
τ_{λ_1}	0.7155	0.7435	0.5918	1.256
$\tau_{\lambda_2}/\tau_{\lambda_1}$	0.716	0.728	0.716	1.017
$\beta_{\pi\lambda_1}$	0.0178	0.00797	0.00866	2.237
$\beta_{\pi\lambda_1}/\beta_{\pi\lambda_2}$	0.730	0.759	0.743	1.040

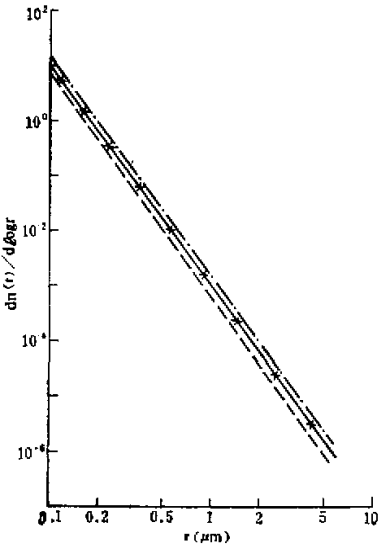


图 2 折射率对于齐次方程解的效应
 $m = 1.5-0.01i, -\nu = 3$ 的 Junge 谱
- - - $m^* = 1.33 - 0i$, c 值由(7)式确定。
- · - $m^* = 1.8 - 0i$, c 值由(7)式确定。
× - × $m^* = 1.33 - 0i$, c 值由(8)式确定。

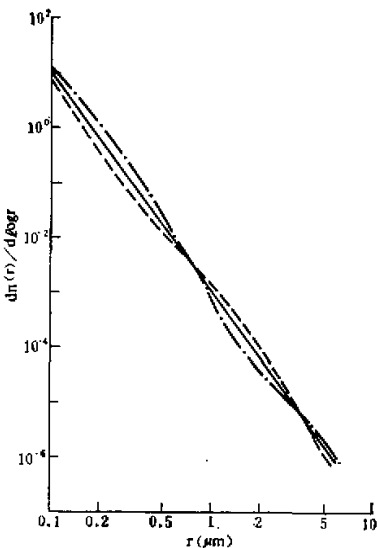


图 3 折射率对于非齐次积分方程解的效应
 $m = 1.5-0.01i$ 。
—— $\nu = 3$ 的 Junge 谱,
- - - $m^* = 1.8-0.1i$,
· · · $m^* = 1.33-0i$ 。

在如表所示的折射率变化范围内,消光系数和后向散射系数的变化分别为 25.6% 和 123.7%,但是双波长的消光系数比和后向散射系数比的变化分别只有 1.7% 和 4%,可见,即使粒子半径区间有限,比值通道对于气溶胶折射率的变化也并不敏感。

公式(17)还表明,在 Junge 分布下,所有的 Mic 体积散射参数均可表为

表 4 $m = 1.5 - 0.01i$

m^*	$1.33 - 0i$	$1.4 - 0i$	$1.6 - 0.04i$	$1.8 - 0.1i$
RN	1.486	1.225	0.845	0.622
RC	1.471	1.256	0.819	0.660

$$g_i = A\lambda^{2-\nu} \quad (18)$$

A 是与波长无关但与折射率以及散射角有关的参数。根据表 3 中 $m = 1.5 - 0.01i$ 的资料,通过公式(18)由消光系数确定的 Junge 谱参数为 2.993,由后向散射系数确定的 ν 值为 2.935,都接似于正确值 3。

由于不同波长的消光系数比在 Junge 分布下与折射率无关以及前向小角散射对折射率的敏感性较弱,由公式(2a)和(2b)所构造的比值通道对折射率的变化并不敏感,由齐次积分方程(3)反演得到的相对谱分布较少受到折射率的影响,从图 2 至图 4 可以清楚地看出这一特性。图中, $n_1^*(r)$ 为由齐次积分方程(5)反演得到的结果, $n_2^*(r)$ 为由非齐次积分方程(1)反演得到的结果, m 和 m^* 分别为折射率真值和初值。

如图 2 所示,对于 $\nu = 3$ 的 Junge 谱, $m = 1.5 - 0.01i$ 、 m^* 分别为 $1.33 - 0i$ 和 $1.8 - 0.1i$,由(7)式确定 c 值的齐次积分方程解与正确谱相比较,就相对谱形而言是非常一致的,两者只差一系数因子,这是由于(7)式确定的 c 值与折射率有关的缘故,从表 4 可以看出这一点,表中 RN 和 RC 的定义为

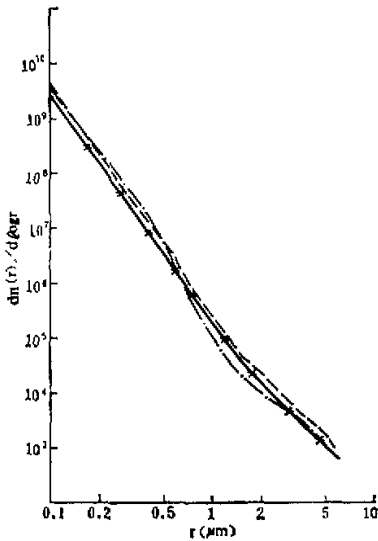


图 4 折射率对于双模式谱反演结果的影响

$m = 1.5 - 0.01i$, $m^* = 1.33 - 0i$.
 ——向表 1 的双模式谱, --- $n_1^*(r)$, c 值由(7)式确定,
 - - - $n_2^*(r) \times - \times - n_1^*(r)$, c 值由(8)式确定。

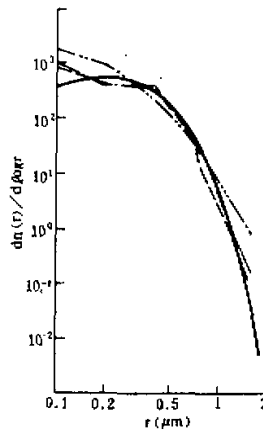


图 5 多次散射对于反演结果的效应

$m = m^* = 1.55 - 0i$, —— $n(r) = \sigma^{-1}e^{-10r}$,
 - - - $n_1^*(r)$, 有多次散射误差,
 - · - $n_1^*(r)$, 无多次散射误差,
 - · - - $n_2^*(r)$, 有多次散射误差。

$$RN = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_i^*(r_i)/n(r_i);$$

$$RC = c(m^*)/c(m) \quad (c \text{ 值由(7)式确定}).$$

如表, $RN \approx RC$, 反演谱和正确谱相差的系数因子约等于 RC , 如果以正确的折射率计算 c 值, 两者将非常吻合。由于小角散射通道对折射率不敏感, 由(8)式确定 c 值的反演谱(标以“×”号)与真谱非常一致(见图 2), 平均误差只有 3.2%。

再看图 3, 由非齐次积分方程(1)在如上一样条件下, 反演谱与正确谱的形状不太一致, 即由原来单模式的 Junge 谱变为多模式的谱, 折射率对反演结果的影响是明显的。

对于非 Junge 谱, 如图 4 所示, 采用本文提出的算法, 也能有效地克服折射率的不确定对于反演谱形的影响。图中的正确谱即表 1 的双模式谱。对于 $m = 1.5 - 0.01i$, 当取 $m^* = 1.33 - 0i$ 时, 由(7)式消光系数确定 c 值的 $n_i^*(r)$ 解与正确谱相比, 就相对谱形而言, 两者基本一致, 但解系统偏大, 而由(8)式确定 c 值的 $n_i^*(r)$ 解非常吻合于正确谱, 平均误差为 6.7%。反之, 由非齐次积分方程(1)反演的 $n_i^*(r)$ 解对于正确谱的偏差呈明显的振荡状态。

根据上述分析, 如果只考虑相对谱分布, 由(7)式或(8)式确定 c 值均可, 若考虑谱分布的绝对值, 由(8)式确定 c 值更少受到折射率不确定的影响, 但必须确定天空亮度观测的仪器常数。

四、多次散射效应

当光学厚度较大、太阳高度角较低时, 齐次散射对华盖天空亮度的贡献变大。由于本文采用比值通道以反演气溶胶谱分布, 有利于消除多次散射等系统误差, 图 5 是一例证。图中资料(包括多次散射信息)均取自 Box 等人的论文^[7]。如图, 齐次方程解 $n_i^*(r)$ 在扣除和不扣除多次散射贡献的情况下都比较符合于正确谱, 但在不扣除多次散射贡献的情况下由非齐次积分方程(1)反演的结果具有较大误差。

五、结 论

(1) 本文采用比值通道以反演气溶胶谱分布具有两个明显的好处: 一是能够消除系统误差; 二是对于某些通道只需相对观测即可。在许多情况下, 仪器常数的准确确定是困难的, 只需相对观测而无需确定仪器常数是有好处的。

(2) 对于齐次积分方程, 把待求的函数分为快变函数和慢变函数之积, 并采用本文论述的约束求解方法是可行的。

(3) 在遥感气溶胶谱分布方面, 折射率的选取和多次散射效应是两个必须考虑的重要问题。本文论述了在 Junge 分布下, 不同波长的消光系数等体积散射参数之比与折射率无关的特性, 理论分析和数值试验都表明了采用本文提出的求解算法能够有效地消除折射率的不确定对于消光——小角散射法反演气溶胶谱形的影响。

致谢: 本文是在周秀骥先生的指导下完成的, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] 吕达仁、周秀骥、邱金桓, 中国科学, No. 12, 1516—1524, 1981.
- [2] Shaw, G. E., *Pure and Applied Geophysics*, 114, 1—14, 1976.
- [3] 邱金桓、汪宏七、周秀骥、吕达仁, 大气科学, 7, 33—41, 1983.
- [4] Twomey, S., *J. Comp. Phys.*, 18, 188—200, 1975.
- [5] King, M. D., *J. Atmos. Sci.*, 35, 2153—2167, 1978.
- [6] Yamamoto, G. and Tanaka, M., *Appl. Opt.*, 8, 447—453, 1969.
- [7] Box, M. A. and Deepak, A., *J. Atmos. Sci.*, 38, 1037—1048, 1981.

A METHOD NUMERICALLY RESOLVING HOMOGENEOUS INTEGRAL EQUATION AND ITS APPLICATION IN RETRIEVING AEROSOL SIZE DISTRIBUTION

Qiu Jinhuan

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

This paper presents a method for resolving homogeneous Fredholm integral equations of the first kind, and it is expounded that the method to adopt the ratio channels for retrieving aerosol size distribution from combined extinction and forward scattering data is available to eliminate the effect of systematic error (e.g., the error due to multiple scattering and so on). Furthermore, this paper proves that the ratio of Mie scattering parameters of different wavelengths (e.g., extinction coefficient and scattering phase function and so on) is independent of refractive index under the assumption of Junge distribution and that the method of retrieving aerosol size distribution from ratio channels can effectively eliminate the effect of refractive index on retrieved results.