

圆锥形雹块生长方程和热平衡方程的初步研究

李子华 吴坚
(南京气象学院)

施文全
(新疆气象局)

提 要

1982年6—7月,新疆昭苏地区取得的10586个雹块样品和1013个冰雹切片中,圆锥形雹块占59%。本文分析了圆锥形雹块的结构特征,提出了它在云中的生长方式。由此推导了圆锥形雹块的生长方程和热平衡方程,并从中得出云中临界有效含水量公式和垂直气流速度的表达式。这些工作为研究圆锥形雹块的生长过程提供了理论依据。

一、引 言

Schumann、Ludlam、List 和 Macklin 等先后建立并改进了冰雹的热量平衡方程式^[1-3], Macklin、Levi 和 Prodi 等研究了撞冻冰的微结构和环境条件的关系^[4-7],这就使得冰雹微物理的分析研究工作得到进一步的发展。但上述工作多限于圆球形或椭球形雹块。

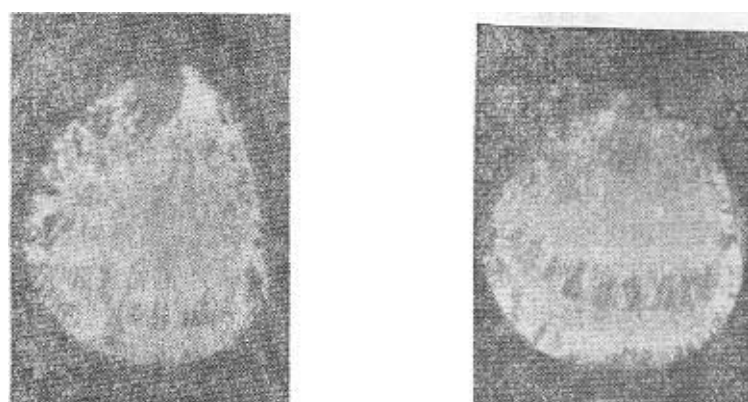
1982年6、7两个月,我们在新疆昭苏地区取得了10586个雹块样品,并对其中包含22块雹云下降的1013个冰雹做了切片分析。就做切片的雹块形状来看,圆锥形雹块最多,约占59%。由此感到,很有必要分析圆锥形雹块的生长特征,推导圆锥形雹块的生长方程和热平衡方程。这对于深入了解我国新疆地区的冰雹,研究它的形成机制,都具有一定的意义。

二、圆锥形雹块的结构特征

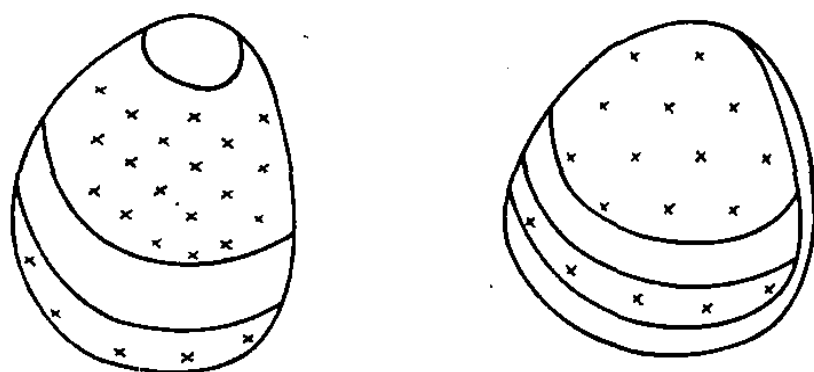
新疆昭苏地区圆锥形雹块尺度一般都比较小。统计表明,5—10毫米之间的雹块约占70%,观测到的最大圆锥形雹块为26毫米。

图1所示的雹块是最多的两种圆锥形雹块类型,其锥顶部分为胚胎,向锥底延伸,交替出现小晶体层(对应不透明层,如图中有×的层次)和大晶体层(对应透明层),雹胚性质统计表明,冻滴约占52%,雹胚占39%,难确定的占9%。雹胚形状以圆锥形最多,约占87%,其它的还有圆球形、椭球形和不定形,合起来不超过13%。这说明圆锥形雹块主要是在圆锥形雹胚的底部生长而成的。

对明显的透明层和不透明层的气泡大小、数密度、平均最大晶体长度等微结构特征参



(a)



(b)

图1 1982年7月19日15时36分下落的两个圆锥形雹块
(a)在偏振光下的薄切片。(b)薄切片结构的略图

表1 圆锥形雹块微结构特征

类 别	气泡面直径 (微米)	气泡面密度 (个/平方厘米)	样本数	平均最大晶体 长度(毫米)	样本数
透明层	59.1	1319	45	1.1	26
不透明层	53.8	4489	32	0.5	25

数的统计结果如表1所示。由表可见,透明层的气泡尺度大、数密度小、晶体尺度大,不透明层气泡尺度小、数密度大、晶体尺度小。圆锥形雹块的不同层次是在不同环境条件下生长而成的。就同一层来说,结构比较均匀,各处的厚度也大体相等。但锥底的一个生长层次,往往中心部位比较厚,愈接近侧边厚度愈小。

三、圆锥形雹块的碰并生长方程

通过上述分析,我们可以认为圆锥形雹块基本上是在稳定的垂直下落(或上升)中作定向生长的。在下落过程中,雹块可能作旋摆运动,但旋摆立体角度一般小于锥角。因此,我们假定,圆锥形雹块的生长主要发生在锥的底部,不考虑圆锥侧面的生长(从图1照片看,雹的侧面是有生长的,但只是很薄的一层,可以忽略);圆锥底部主要是由于捕获过冷水滴而均匀生长,不考虑凝华生长及捕获冰晶生长。

为了讨论方便,在推导生长方程之前,我们先对圆锥形雹块作一些数学描述。图2所示的是一种简单的但又常见的圆锥形雹块,它是通过中心轴线的剖面图。由图可见,圆锥形雹块实际上是由圆锥体和球冠两部分组成的。锥高 $h = OC$, 底部球冠的拱高 $b = CD$ 。因此,它的体积

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{6} \pi b(3R^2 + b^2) \quad (1)$$

球冠的外表面积

$$S = \pi(R^2 + b^2) \quad (2)$$

式中 R 为圆锥体的底半径。

现在就来推导圆锥形冰雹碰并增长方程。

圆锥形雹块碰并过冷水滴造成质量 m 的增加率

$$\frac{dm}{dt} = E \pi R^2 W u \quad (3)$$

式中 t ——时间, E ——碰并系数, W ——云中液态水含量, u ——圆锥形雹块下落末速度。又质量的增加率可以用体积的增加率来代替,并考虑到(1)式,就可以得

图2 圆锥形雹块的数学描述

到

$$\frac{dm}{dt} = \rho_i \frac{dV}{dt} = \rho_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\pi}{3} R^2 h + \frac{\pi}{6} b(3R^2 + b^2) \right] \quad (4)$$

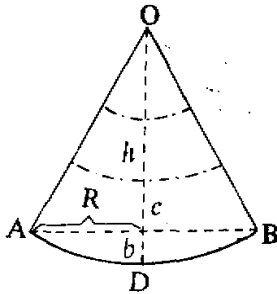
式中 ρ_i 为雹块密度。设 $n = \frac{h}{2R}$ 为锥高与锥底直径之比,在我们所考虑的模式(图2)中, n 不随雹块的增长而变(根据对实际雹块标准化后的统计, n 近乎为常数),而

$$b = \frac{1}{2n(2n + \sqrt{4n^2 + 1})} h \quad (5)$$

令 $A = 2n(2n + \sqrt{4n^2 + 1})$, 把(5)式及 $R = \frac{h}{2n}$ 代入(4)式,于是

$$\frac{dm}{dt} = 3\rho_i \left(\frac{\pi}{12n^2} + \frac{\pi}{8n^2 A} + \frac{\pi}{6A^3} \right) h^2 \frac{dh}{dt} \quad (6)$$

(6)式代入(3)式即得



$$\frac{dh}{dt} = \frac{EWu}{\left(1 + \frac{3}{2A} + \frac{2n^2}{A^2}\right)\rho_i} = \frac{EWu}{C\rho_i} \quad (7)$$

这就是圆锥形雹块增长率的基本关系式,式中常数 $C = 1 + \frac{3}{2A} + \frac{2n^2}{A^2}$.

设云中的上升气流速度为 U ,高度为 z ,则雹块在云中的垂直速度

$$\frac{dz}{dt} = U - u \quad (8)$$

所以

$$\frac{dh}{dz} = \frac{dh}{dt} / \frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt} / (U - u) \quad (9)$$

将(9)式代入(7)式,即可得

$$U = \left(1 + \frac{EW}{C\rho_i \frac{dh}{dz}}\right) u \quad (10)$$

式中 $\frac{dh}{dz}$ 为锥高随高度的变化率,它可由雹块的生长路径求出,上升增长为正,下降增长为负.

四、圆锥形雹块的热平衡方程

一个表面光滑的圆锥形雹块,以相对于过冷水滴的速度 u 下降,这时雹块在单位时间内兼并云内水分质量为 $E\pi R^2 W u$. 若这些水全部冻结,则单位时间内所释放的热量

$$\frac{dQ_1}{dt} = E\pi R^2 W u [L_f + C_w(T_a - T_m) + C_i(T_m - T_d)] \quad (11)$$

式中 T_a 、 T_m 和 T_d 分别为环境温度、融化温度和雹块表面温度, L_f 为冻结潜热, C_w 、 C_i 分别为水和冰的比热.

过冷水冻结所释放的热量,一方面通过传导和强迫对流作用向环境输送(设输送率为 $\frac{dQ_2}{dt}$),另一方面水分蒸发也带走一部分热量(设输送率为 $\frac{dQ_3}{dt}$). 由于捕获过冷水滴发生在圆锥体的底表面上,圆锥体的上部早已冻结,而且冰的传热性能不好,因此可以假定,以上两部分热量主要是通过锥底表面向四周扩散的. 在建立这两种扩散过程的扩散方程时,由于扩散场不象圆球形雹块那样四周均匀定常,这给数学处理带来了困难. 可设想一个表面积与锥底圆弧面面积相等的面积等效小球(设半径为 R_*),圆锥形雹块扩散结果与之等效. 在这种情况下,

$$\begin{aligned} \pi(R^2 + b^2) &= 4\pi R_*^2 \\ R_* &= \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + b^2} \end{aligned} \quad (12)$$

于是

$$\frac{dQ_2}{dt} = 2\pi K R_* (T_d - T_a) N_u \quad (13)$$

$$\frac{dQ_3}{dt} = 2\pi R_* L_v D_v \Delta \rho_v S_h \quad (14)$$

式中 K 为空气的热传导率, D_v 为水汽在空气中的扩散系数, L_v 为蒸发潜热, $\Delta \rho_v$ 为雪块底面和环境空气的饱和水汽密度差。 N_u 、 S_h 分别为努赛尔数、肖伍德数, 它们均为雷诺数 Re 的函数, 理论上求解复杂, 对球形雪块由实验得出^[2]

$$N_u = \chi P_r^{1/3} Re^{1/2} \quad (0 < Re < 10^5) \quad (15)$$

$$S_h = \chi S_c^{1/3} Re^{1/2} \quad (0 < Re < 10^5) \quad (16)$$

其中热交换系数 χ 取常数 0.6, 普朗特数 P_r 取 0.71, 施密特数 S_c 取 0.66, $Re = 2R_* u_a \rho_a / \mu$, μ 为空气动力学粘滞系数, ρ_a 为空气密度。为了建立与圆锥形雪块相应的 N_u 、 S_h 数学表达式, 不妨引进一个体积与圆锥形雪块体积相等的等效球形雪块。设体积等效球半径为 R_{**} , 则

$$\frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{6} \pi b(3R^2 + b^2) = \frac{4}{3} \pi R_{**}^3$$

$$R_{**} = \sqrt[3]{\frac{1}{4} R^2 h + \frac{1}{8} b(3R^2 + b^2)} \quad (17)$$

这时应用(15)、(16)式于圆锥形雪块, 则得

$$N_u = \chi P_r^{1/3} \left(\frac{2R_{**} u_a \rho_a}{\mu} \right)^{1/2} \quad (18)$$

$$S_h = \chi S_c^{1/3} \left(\frac{2R_{**} u_a \rho_a}{\mu} \right)^{1/2} \quad (19)$$

将(18)、(19)式代入(13)、(14)式, 并将(11)、(13)、(14)式代入热平衡方程

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} + \frac{dQ_3}{dt} \quad (20)$$

就可以得到

$$EW = \frac{2R_* \chi}{R^2} \left(\frac{2R_{**} \rho_a}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\beta}{\alpha} \quad (21)$$

其中

$$\alpha = L_f + C_w(T_d - T_m) + C_i(T_m - T_d)$$

$$\beta = P_r^{1/3} K(T_d - T_a) + S_c^{1/3} L_v D_v \Delta \rho_v$$

(21)式即是圆锥形雪块生长的临界有效含水量公式。计算时, 只要给出雪块的尺度参数 h 、 R 、 b 及雪面温度 T_d 、环境温度 T_a , 就可以求出临界有效含水量 EW 。

五、结 语

本文根据圆锥形雪块的结构特征, 建立了圆锥形雪块的生长方程和热平衡方程, 为研究圆锥形雪块的生长过程提供了理论依据。利用晶体和气泡分析法或者同位素分析法, 可以确定雪块各层次生长时的环境温度 T_a 和雪面温度 T_d , 再由探空资料将 T_d 转换为高度 z , 从而得出雪块大小(h)与高度(z)的关系。以后利用本文的(21)式, 就可以求出临

界有效含水量 EW 。如果雹块属于生长,则可以把 EW 视为云中实际有效含水量,这样又可以求出在生长状态下的云中垂直气流速度 U 及雹块生长时间 Δt 。作者计算了图 1 所示的两块冰雹的生长条件,结果是:它们是在 7.5—8.5 公里 ($-22^{\circ}\text{C} \sim -28^{\circ}\text{C}$) 之间两次升降运动中生长的, EW 在 2.0~5.0 克/米³ 之间, U 的范围为 7.7~22.9 米/秒,生长时间为 4.0 和 4.2 分钟。

应该指出,本文中有些问题的处理方法是初步的,比如有关圆锥形冰雹的努赛尔数,肖伍德数,有待今后进一步实验研究。

致谢:本文得到王鹏飞教授的热情帮助,宋乃会和郑国光同志对本文提出了有益的意见,在此一并感谢。

参 考 文 献

- [1] 梅森,《云物理学》中译本,第六章,科学出版社,1978。
- [2] 徐家骥,冰雹微物理与成雹机制,第四章,农业出版社,1979。
- [3] Macklin, W. C., The Characteristics of Natural Hailstones and Their Interpretation, *Meteorological Monographs*, Vol. 16, No. 38, 1977。
- [4] Levi, L. and Prodi, F. Crystal Size in Ice Grown by Droplet Accretion, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 35, No. 11, 1978。
- [5] Prodi, F., Levi, L., Franzini, A., and Scarani, C., Crystal Size and Orientation in Ice Grown by Droplet Accretion in Wet and Spongy Regimes, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 39, No. 10, 1982。

PRELIMINARY RESEARCH ON EQUATIONS OF GROWTH AND HEAT BALANCE OF CONICAL HAILSTONE

Li Zihua Wu Jian

(Nanjing Institute of Meteorology)

Shi Wenquan

(Meteorological Institute of Xinjiang)

Abstract

During June and July of 1982 the 10586 hailstone samples and 1013 hail sections were collected in the area of Zhaosu, Uygur Autonomous Region of Xinjiang. The conical hailstones account for about 59% of the total samples. In this paper, some microstructural features and patterns of growth of the conical hailstones are analyzed. Then, the equations of growth and heat balance are derived. The critical effective liquid water content and the vertical velocity equations are also given. All these have provided a theoretical basis for studying the growth of conical hailstones.