第10卷 第2期 大气科学 Vol. 10, No. 2
1986年6月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA June, 1986

斜压准地转-准无辐散模式初边值问题古典解的存在唯一性

穆 穆
（复旦大学数学研究所）

提 要

本文考察斜压准地转-准无辐散模式初边值问题的适定性，结合文献[1]中证明的唯一性定理，证明了方程(1.1)—(1.3)局部古典解的存在，从而解决了其适定性问题。

一、引言与预备事项

在大气动力学理论中，斜压准地转-准无辐散模式占有重要的位置．关于这一模式的各种定解问题，很多学者致力于寻求数值解与特解，这方面已有大量的工作．曾庆存[1]从数学上研究了这一模式各种定解问题的适定性，得到了不少很好的结果，但因这类问题的难度较大，仍有很多问题没有解决．

基本沿用文献[1]第十二章中的符号，从该章中的(12.72)、(12.74)、(12.75)式与(12.90)中的第一式出发，不考虑地球曲率项与地形的影响，可令

$$\tilde{C}=\tilde{C}(\zeta)\neq 0,\ \alpha_s=\alpha_s(\zeta)>0,$$

将(12.72)、(12.74)两式改写，考察下述初边值问题

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)\tilde{\mathscr{L}}_s(\psi) \\ \qquad +J(\psi,2a^2\omega\cos\theta)=0\quad(\text{在 } M\times(0,T)\text{中}) & (1.1)\\ \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}=0\quad\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{1}{a^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right. \\ \qquad \left.-\dfrac{1}{a^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left.\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}+k_0\alpha_s\psi\right)\right|_{\zeta=1}=0 & (1.2)\\ \psi|_{t=0}=\psi_0 & (1.3)\end{cases}$$

这里 $M=S^2\times[\zeta_0,1]$，S^2 是单位球面，$0<\zeta_0<1$，$T>0$．ζ_0、T 为取定的常数．$k_0=0$ 或 1；ψ_0 是初始流函数场．

$$\tilde{\mathscr{L}}_s(\psi)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta^2\tilde{C}^{-2}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\psi+\Delta\psi,\ \Delta=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right),$$

1985年5月20日收到，9月25日收到修改稿．

$$J(f,g)=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial\lambda}-\frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right).$$

曾庆存[1]对 ϕ_0 作了较强的假定,证明了方程 (1.1)—(1.3) 局部弱解的存在性(即弱解在充分小的时间段 $[0, t_0]$ 内存在). 若 $k_1=1$, 其古典解唯一; 若 $k_0=0$ (即取整层无辐散近似假定), 方程 (1.1)—(1.3) 的任意两个古典解只相差一个仅与时间 t 有关的函数.

方程 (1.1) 的主要部分是一个一阶非线性双曲型方程与一个二阶线性椭圆型方程的复合. 在本文中,作者利用这一特点,证明了方程 (1.1)—(1.3) 局部古典解的存在性. 证明过程大致如下: 首先,将方程 (1.1) 线性化, 解一阶双曲型方程的初值问题, 并利用引理 1 得到相应的先验估计式;其次,为了克服非线性边界条件所带来的困难, 在边界流形上再解一个一阶双曲型方程的初值问题,同样利用引理 1 建立对应的先验估计;然后利用上述步骤所给出的数据,求解一个椭圆型方程的边值问题,并利用引理 2 建立相应的先验估计;最后,综合上述所有先验估计,通过选取时间段充分小,由 Schauder 不动点定理得到方程 (1.1)—(1.3) 在 Sobolev 空间中的解, 由 Sobolev 嵌入定理,最终得到了古典解.

应该指出, $\theta=0$, π 是 (1.1)—(1.2) 式由于坐标系选取而产生的假奇点. 准确地说, 将 $M=S^2\times[\zeta_0, 1]$ 看成带边紧光滑流型, 可在其上引进一组完备的局部坐标系. 这时 $J(f,g)$, Δ 是 M 上系数光滑的微分算子. 其具体作法可参见文献 [4]、[5] 或 [6]. 在下面的论证中,遇到 $\theta=0$, π 这两个假奇点时, 都可以用微分流型的语言处理. 因篇幅所限,作者略去了这一过程. 又,本文所有函数及函数空间均为实的.

依惯例引入 Sobolev 空间: 当 k 为非负整数时, $H^k(M)=\{u|u$ 及其直至 k 阶广义导数在 M 上平方可积$\}$. 类似地定义 $H^k(S^2)$. 当 k 为任意实数时, $H^k(M)$、$H^k(S^2)$ 的定义可参见文献 [3]. 用 $\|\cdot\|_{H^k(M)}$、$\|\cdot\|_{H^k(S^2)}$ 分别表示 $H^k(M)$、$H^k(S^2)$ 中的范数. 对任何 $u\in C^\infty(M\times[0,T])$, 定义

$$\|u(t)\|_{C^0([0,T];H^k(M))}=\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{H^k(M)} \tag{$*$}$$

$$\|u(t)\|_{C^1([0,T];H^k(M))}=\sup_{0\le t\le T}\left(\|u(t)\|_{H^k(M)}+\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|_{H^k(M)}\right) \tag{$**$}$$

用 $C^0([0,T];H^k(M))$、$C^1([0,T];H^k(M))$ 分别记 $C^\infty(M\times[0,T])$ 中函数在范数 ($*$)、($**$)下的完备化空间. 类似地定义空间 $C^0([0,T];H^k(S^2))$ 与 $C^1([0,T];H^k(S^2))$.

本文需要下述引理:

引理 1 设 $a, b, f\in C^0([0,T];H^k(M))$, $\partial M\times[0,T]$ 是双曲算子的特征曲面, $u_0\in H^k(M)$, 整数 $k\geqslant 4$. 这时双曲算子 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}+b\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=f & \text{在 } M\times[0,T] \text{ 中} \quad (1.4)\\ u|_{t=0}=u_0 & \quad (1.5)\end{cases}$$

存在唯一解 $u\in C^0([0,T];H^k(M))\cap C^1([0,T];H^{k-1}(M))$, 且成立能量估计式

$$\|u(t)\|^2_{H^k(M)}\leqslant C\left(\|u_0\|^2_{H^k(M)}+\int_0^t\|f(\tau)\|^2_{H^k(M)}d\tau\right)\cdot\exp\left\{C\int_0^t(\|a(\tau)\|_{H^k(M)}+\|b(\tau)\|_{H^k(M)}+1)d\tau\right\}\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.6}$$

这里常数 C 与 a、b、f、u_0 无关.

若换 M 为 S^2，上述结论与相应的能量估计仍然成立.

可以用能量积分结合光滑函数逼近的办法证明引理 1. 因篇幅关系，从略.

引理 2　设 $f\in C^0([0,T];H^l(S^2))$，$\beta\in C^0([0,T];H^{l+1/2}(S^2))$，$l\geqslant 0$，且对 $\forall t_0\in[0,T]$ 成立

$$\int_M f(t_0)dM-\int_{S^2}\widetilde{C}^{-2}(1)\beta(t_0)ds=0$$

这时，对 $\forall t_0\in[0,T]$，椭圆边值问题

$$\begin{cases}\widetilde{\mathscr{L}}_g\phi=f(t_0) & \text{在}M\text{中} \quad (1.7)\\ \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1}=0 \quad \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1}=\beta(t_0) & (1.8)\end{cases}$$

存在唯一解 $\phi\in C^0([0,T];H^{l+2}(M))$ 满足 $\int_M\phi(t_0)dM=0$，$\forall t_0\in[0,T]$. 且成立先验估计：

$$\|\phi(t_0)\|_{H^{l+2}(M)}\leqslant C(\|f(t_0)\|_{H^l(M)}+\|\beta(t_0)\|_{H^{l+1/2}(S^2)})\qquad 0\leqslant t_0\leqslant T \tag{1.9}$$

这里常数 C 与 ϕ、f、β、t_0 无关.

证明　容易验证边界条件 (1.8) 满足 Lopatinski 条件（参见文献[2]），边值问题 (1.7)、(1.8) 是自伴的. 设 $\phi\in C^\infty(M)$ 满足 $f=\beta=0$ 时的 (1.7)、(1.8) 式. 在 (1.7) 式两边乘以 ϕ，然后在 M 上积分. 利用分部积分与边界条件，易证这时在 M 上 $\phi\equiv$ 常数，即问题 (1.7)、(1.8) 的零空间 $N=\{u|u=\text{常数},\text{在}M\text{上}\}$. 设 f、β 满足引理 2 中的假定，由椭圆型方程边值问题的经典理论（例如参见文献[2]），存在 $\tilde{\phi}(t_0)\in H^{l+2}(M)$ 满足 (1.7)、(1.8) 式. 再令 $\phi(t_0)=\tilde{\phi}(t_0)-\dfrac{1}{\mathrm{mes}(M)}\int_M\tilde{\phi}(t_0)dM\left(\mathrm{mes}(M)=\int_M dM\right)$，则 ϕ 满足 (1.7)、(1.8) 式且 $\int_M\phi(t_0)dM=0$. 用 Peetre 引理，即得 (1.9) 式；由 (1.9) 式，易证

$$\phi(t_0)\in C^0([0,T];\ H^{l+2}(M))$$

与唯一性.

由上述证明与椭圆边值问题的经典理论可知，若 $\phi\in C^0([0,T];H^{l+2}(M))$，对 $\forall t_0\in[0,T]$，满足 $\int_M\phi(t_0)dM=0$ 与 (1.7)、(1.8) 式. 这时引理 2 中的条件自动满足，因而先验估计式 (1.9) 也成立.

二、主 要 结 果

(一) $k_0=0$ 的情形

设 $\phi_0\in H^{k+1}(M)$，整数 $k\geqslant 6$. ϕ_0 满足条件：

$$\text{(i)}\ \int_M\phi_0dM=0,\quad \text{(ii)}\ \left.\frac{\partial\phi_0}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}=0.$$

任意取定 $\varphi\in C^0([0,T];\ H^{k+1/2}(M))$，考察线性化问题

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)\mathscr{L}_g(\phi) \\
\qquad +J(\varphi,2a^2\omega\cos\theta)=0 \qquad \text{在 } M\times(0,T)\text{ 中} & (2.1)\\
\dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_0}=0 & (2.2)\\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{1}{a^2\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{1}{a^2\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)\dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=1}=0 \\
\phi|_{t=0}=\phi_0 & (2.3)
\end{cases}
$$

1. 先解一阶双曲算子 Cauchy 问题($\zeta=\zeta_0$, $\zeta=1$ 皆为该算子的特征曲面，故不需提边界条件).

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)W \\
\qquad +J(\varphi,2a^2\omega\cos\theta)=0 \qquad \text{在 } M\times(0,T)\text{ 中} & (2.4)\\
W|_{t=0}=\mathscr{L}_g\phi_0 & (2.5)
\end{cases}
$$

由引理 1，存在 $W\in C^0([0,T];\ H^{k-1}(M))\pi C^1([0,T];\ H^{k-2}(M))$，满足(2.4)、(2.5)式，且成立

$$
\|W(t)\|^2_{H^{k-1}(M)}\leqslant C\left(\|\phi_0\|^2_{H^{k+1}(M)}+\int_0^t\|\varphi(\tau)\|^2_{H^k(M)}d\tau\right)
\cdot\exp\left\{C\int_0^t(\|\varphi(\tau)\|_{H^k(M)}+1)d\tau\right\}\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{2.6}
$$

2. 考察边界流形 $S^2\times[0,T]$ 上的偏微分算子，以便将非线性边界条件化简. 记

$$
\chi=\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=1},\quad \chi_0=\frac{\partial\phi_0}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=1}.
$$

这时，(2.2)、(2.3)式启发我们求解下述定解问题

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{1}{a^2\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{1}{a^2\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)\chi=0 \qquad \text{在 } S^2\times(0,T)\text{ 中} & (2.7)\\
\chi|_{t=0}=\chi_0 & (2.8)
\end{cases}
$$

由引理 1，问题(2.7)、(2.8)存在解 $\chi\in C^0([0,T];\ H^{k-1}(S^2))\pi C^1([0,T];\ H^{k-2}(S^2))$，且成立估计式

$$
\|\chi(t)\|^2_{H^{k-1}(S^2)}\leqslant C\|\chi_0\|_{H^{k-1}(S^2)}\cdot\exp\left\{C\int_0^t(\|\varphi(\tau)\|_{H^k(S^2)}+1)d\tau\right\}\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{2.9}
$$

3. 利用 1.、2. 中给出的 W、χ，对任何给定的 $t\in[0,T]$，求解椭圆型方程边值问题

$$
\begin{cases}
\mathscr{L}_g(\phi(t))=W(t) \qquad \text{在} M \text{中} & (2.10)\\
\dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_0}=0 \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=1}=\chi(t) \qquad \text{在 } S^2\text{ 中} & (2.11)
\end{cases}
$$

欲证问题(2.10)、(2.11)对任何 $t\in[0,T]$ 可解，必须验证该问题满足引理 2 条件. 将(2.4)式两边在M上积分，利用恒等式 $\int_{S^2}J(F,G)ds\equiv 0$，得到

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_M W(\lambda,\theta,\zeta,t)dM\equiv 0,\ \forall t\in[0,T].
$$

再注意到恒等式 $\int_{S^2}\Delta F ds\equiv 0$，由 (2.5) 式，得：

$$\int_M W(\lambda,\theta,\zeta,0)dM=\int_M\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta^2\cdot\widetilde{C}^{-2}(\zeta)\frac{\partial\phi_0}{\partial\zeta}\right)dM$$

$$=\widetilde{C}^{-2}(1)\int_{S^2}\frac{\partial\phi_0}{\partial\zeta}(\lambda,\theta,1)ds$$

故有

$$\int_M W(\lambda,\theta,\zeta,t)dM\equiv\widetilde{C}^{-2}(1)\int_{S^2}\frac{\partial\phi_0}{\partial\zeta}(\lambda,\theta,1)ds,\ \forall t\in[0,T]$$

另一方面，利用 (2.7)、(2.8) 式，类似可证

$$\int_{S^2}\chi(t)ds\equiv\int_{S^2}\chi_0 ds,\ \ \forall t\in[0,T].$$

综上所述，即知问题 (2.10)、(2.11) 满足引理 2 的条件，故存在

$$\phi(t)\in C^0([0,T];H^{k+1/2}(M))$$

满足 (2.10)、(2.11) 式且对任何 $t\in[0,T]$，$\int_M\phi(t)dM=0$. 因为

$$\frac{\partial W}{\partial t}\in C^0([0,T];\ H^{k-1/2}(M)),$$

不难验证还有 $u\in C^1([0,T];\ H^{k-1/2}(M))$，并成立估计

$$\|\phi(t)\|^2_{H^{k+1/2}(M)}\leqslant C(\|W(t)\|^2_{H^{k-1/2}(M)}+\|\chi(t)\|^2_{H^{k-1}(S^2)})\qquad 0\leqslant t\leqslant T\qquad(2.12)$$

利用估计式 (2.6)、(2.9)、(2.12) 与迹定理不等式（参见文献 [3]），得：

$$\|\phi(t)\|^2_{H^{k+1/2}(M)}\leqslant C\left(\|\phi_0\|^2_{H^{k+1}(M)}+\int_0^t\|\varphi(\tau)\|^2_{H^k(M)}d\tau\right)$$

$$\cdot\exp\left\{C\int_0^t(\|\varphi(\tau)\|^2_{H^{k+1/2}(M)}+1)d\tau\right\}\qquad 0\leqslant t\leqslant T\qquad(2.13)$$

4. 构造集合

$$\underline{S}_{t_0}=\{\phi\in C^0([0,t_0];\ H^{k+1/2}(M))\pi C^1([0,t_0];\ H^{k-1/2}(M))\mid|\phi|_{t=0}=\phi_0,$$
$$\|\phi(t)\|^2_{H^{k+1/2}(M)}\leqslant A,\ \ 0\leqslant t\leqslant t_0\}$$

这里 $A=5C\|\phi_0\|^2_{H^{k+1}(M)}$，而常数 C 即不等式 (2.13) 中之常数 C. $t_0>0$，t_0 已取得充分小，使得不等式 $\exp\{Ct_0(A+1)\}\leqslant 2$ 与 $4Ct_0\leqslant 1$ 成立.

对任何 $\varphi\in\underline{S}_{t_0}$，在上述程序 1.—3. 中，换 T 为 t_0，即得

$$\phi\in C^0([0,t_0];\ H^{k+1/2}(M))\pi C^1([0,t_0];\ H^{k-1/2}(M)),$$

ϕ 满足 (2.1)—(2.3) 式. 由 (2.9)、(2.13) 式，有

$$\|\chi(t)\|^2_{H^{k-1}(S^2)}\leqslant C(A)\qquad 0\leqslant t\leqslant t_0\qquad(2.14)$$

$$\|\phi(t)\|^2_{H^{k+1/2}(M)}\leqslant 2C(\|\phi_0\|^2_{H^{k+1}(M)}+t_0A)\leqslant A\qquad 0\leqslant t\leqslant t_0\qquad(2.15)$$

这里 $C(A)$ 表示仅与 A 有关的常数，下文中 $C_i(A)$，$(i=1,\cdots,4)$ 均同此意义.

改写 (2.1)、(2.2) 式，得：

$$\widetilde{\mathscr{L}}_g\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-J(\varphi,\widetilde{\mathscr{L}}_g(\phi))-J(\phi,2a^2\omega\cos\theta)\qquad(2.16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\Big|_{\zeta=\zeta_0}=0 \qquad \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta\partial t}\right)\Big|_{\zeta=1}=-\frac{1}{a^2}J\left(\varphi,\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)\Big|_{\zeta=1} \tag{2.17}$$

利用对 $\forall t\in[0,t_0]$, $\int_{S^2}\chi(t)ds=0$, $\int_M\phi(t)dM=0$, 易证 (2.16)、(2.17) 式满足引理 2 中的条件,用该引理,并注意到 $l\geqslant 2$ 时, $H^l(M)$、$H^l(S^2)$ 为 Banach 代数,得:

$$\left\|\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}\right\|^2_{H^{k-1/2}(M)}\leqslant C(\|\varphi(t)\|_{H^{k-3/2}(M)}\|\phi(t)\|^2_{H^{k+1/2}(M)}$$

$$+\|\varphi(t)\|^2_{H^{k-1}(S^2)}\|\chi(t)\|^2_{H^{k-1}(S^2)})\leqslant C_1(A)=A_1 \qquad 0\leqslant t\leqslant t_0 \tag{2.18}$$

现在,用 (2.18) 式给出的常数 A_1, 构造函数集合

$$S_{t_0}=\left\{\varphi\in\underline{S}_{t_0}\ \Big|\ \left\|\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right\|_{H^{k-1/2}(M)}\leqslant A_1,\ 0\leqslant t\leqslant t_0\right\}.$$

由上述论证,我们已经构造了一个从集合 S_{t_0} 到其自身的映射 $L:L(\varphi)=\phi$. 易见 S_{t_0} 在 Banach 空间 $C^0([0,t_0];H^{k-1/2}(M))$ 中的闭包 $\bar{S}_{t_0}$ 是 Banach 空间 $C^0([0,t_0];H^{k-1/2}(M))$ 中的紧凸集.

5. 将 L 的定义域扩充到 $\bar{S}_{t_0}$ 上. 设 $\varphi_i\in S_{t_0}$, $L(\varphi_i)=\phi_i$, $W_i=\mathscr{L}_g(\phi_i)$,

$$\chi_i=\frac{\partial\phi_i}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=1}\quad(i=1,2).$$

将 W_i、φ_i 满足的 (2.4)、(2.5) 式相减,对所得到的方程用引理 1. 得:

$$\|(W_1-W_2)(t)\|^2_{H^{k-1}(M)}\leqslant C_2(A)\int_0^t\|(\varphi_1-\varphi_2)(\tau)\|^2_{H^{k-1}(M)}d\tau \tag{2.19}$$

将 φ_i、χ_i 满足的 (2.7)、(2.8) 式相减,对所得到的方程用引理 1, 得:

$$\|\chi_1(t)-\chi_2(t)\|^2_{H^{k-2}(S^2)}\leqslant C_3(A)\int_0^t\|(\varphi_1-\varphi_2)(\tau)\|^2_{H^{k-1/2}(M)}\cdot d\tau \qquad 0\leqslant t\leqslant t_0 \tag{2.20}$$

再将 ϕ_i、W_i、χ_i 满足的 (2.10)、(2.11) 式相减,对所得到的方程用引理 2, 得:

$$\|(\phi_1-\phi_2)(t)\|^2_{H^{k-1/2}(M)}\leqslant C(\|(W_1-W_2)(t)\|^2_{H^{k-5/2}(M)}+\|(\chi_1-\chi_2)(t)\|^2_{H^{k-2}(S^2)}) \tag{2.21}$$

综合 (2.19)—(2.21) 式,得:

$$\|(\phi_1-\phi_2)(t)\|^2_{H^{k-1/2}(M)}\leqslant C_4(A)\int_0^t\|(\varphi_1-\varphi_2)(\tau)\|^2_{H^{k-1/2}(M)}d\tau \qquad 0\leqslant t\leqslant t_0 \tag{2.22}$$

因 S_{t_0} 在 $\bar{S}_{t_0}$ 中稠密,利用(2.22)式,可将 L 延拓为从 $\bar{S}_{t_0}$ 到 $\bar{S}_{t_0}$ 的连续映射. 由 Schauder 不动点定理, 存在 $\phi\in\bar{S}_{t_0}$, 使 $L(\phi)=\phi$, 此 ϕ 即为 (1.1)—(1.3) 式在 $M\times(0,t_0)$ 上的解. 利用方程 (1.1), 知 $\phi\in C^0([0,t_0];H^{k-1/2}(M))\pi C^1([0,t_0];H^{k-3/2}(M))$. 由 Sobolev 嵌入定理(参见 文献 [3]), 即知 ϕ 为古典解.

现在说明如何去掉本节开头关于 ϕ_0 的假定 (i). 事实上,若 $\int_M\phi_0dM\neq 0$, 取

$$\tilde{\phi}_0=\phi_0-\frac{1}{\mathrm{mes}(M)}\cdot\int_M\phi_0dM,$$

则 $\tilde{\phi}_0$ 满足假定 (i). 以 $\tilde{\phi}_0$ 为初值解方程 (1.1)—(1.3), 得解 ϕ_1. 再令

$$\phi = \phi_1 + \frac{1}{\operatorname{mes}(M)} \int_M \phi_0 dM,$$

易证这时 $\phi|_{t=0} = \phi_0$，且 ϕ 满足 (1.1)、(1.2) 式.

（二）$k_0 = 1$ 的情形

这时容易验证椭圆型方程边值问题

$$\left\{\mathscr{L}_z(\phi) = 0,\ 在M中;\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_0} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha_s\right)\phi|_{\zeta=1} = 0\right\}$$

只有零解. 因而可用椭圆型方程边值问题的经典估计代替引理 2，几乎完全重复(一)的推导，可证明方程 (1.1)—(1.3) 局部古典解的存在性.

综合(一)、(二)，并注意到[1]唯一性定理(参见本文一)，得到本文的主要结果：

定理　设正整数 $k \geq 6$，$\phi_0 \in H^{k+1}(M)$，$\frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_0} = 0$. 这时存在只与 $\|\phi_0\|_{H^{k+1}(M)}$ 有关的 t_0，使方程 (1.1)—(1.3) 在 $M \times (0, t_0)$ 中存在古典解

$$\phi \in C^0([0, t_0];\ H^{k-1/2}(M)) \cap C^1([0, t_0];\ H^{k-3/2}(M)).$$

若 $k_0 = 1$，古典解唯一；若 $k_0 = 0$，古典解在相差一个仅与时间 t 有关的函数意义下唯一.

两个流函数，若仅仅相差一个只与时间 t 有关的函数，对应于同一速度场. 因此，上述定理解决了方程 (1.1)—(1.3) 局部古典解的适定性.

我们指出，将边界条件 (1.2) 的后一式线性化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + k_0 \alpha_s\right)\phi|_{\zeta=1} = 0$$

后，作者在文献 [6] 中证明了相应的初边值问题整体古典解的存在性. 但在非线性边界条件下，本文只证明了局部古典解的存在性. 该差别是否具有本质性，这是一个需要探讨的重要问题.

本文是作者在导师谷超豪、李大潜教授指导下完成的. 写作过程中得到了中国科学院大气物理研究所曾庆存研究员的热情鼓励与支持，并与该所张学洪老师作了有益的讨论. 作者向他们表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] 曾庆存，1979，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，科学出版社.
[2] Schechter M., 1977, Modern Methods in Partial Differential Equations, McGraw-Hill (有中译本).
[3] Adams, R. A., 1975, Sobolev Spaces, New York, Academic Press (有中译本).
[4] 穆　穆，非线性涡度方程初边值问题的整体光滑解及其应用(待发表).
[5] 穆　穆，非线性涡度方程 Cauchy 问题的整体光滑解及其应用(待发表).
[6] 穆　穆 1985，非线性涡度方程的一些定解问题，复旦大学博士学位论文.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF CLASSICAL SOLUTION TO AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM IN BAROCLINIC QUASIGEOSTROPHIC-QUASINONDIVERGENT MODEL

Mu Mu

(*Mathematical Institute of Fudan University*)

Abstract

In this paper, the author considers an initial-boundary value problem in baroclinic quasigeostrophic-quasinondivergent model (see Eqs. (1.1)—(1.3)). The main result obtained is the following theorem:

Let integer $K \geqslant G$, $\phi_0 \in H^{k+1}(M)$, $\left.\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0} = 0$. Then there exists a classical solution $\phi \in C^0([0, t_0]; H^{k-1/2}(M))\pi C^1([0, t_0]; H^{k-3/2}(M))$, which satisfies Eqs. (1.1)—(1.3) in $M \times (0, t_0)$, The constant t_0 satisfies $0 < t_0 \leqslant T$ and depends on $\|\phi_0\|_{H^{k+1}(M)}$ only.

Because the uniqueness of Eqs. (1.1)—(1.3) has been given in Ref. [1], the well-posedness of Eqs. (1.1)—(1.3) has been proved.