第10卷 第2期 大 气 科 学 Vol. 10, No. 2
1986 年 6 月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA June, 1986

应用里查逊数判别中尺度波动的不稳定

高守亭 孙淑清
(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文采用非地转 Eady 模式通过摄动展开，讨论了由于低空强风切变导致的里查逊数 Ri 的减小与对称斜压不稳定的关系. 证明了对中尺度扰动，在 $Ri<5.2$ 的情况下，就会发生对称斜压不稳定.

一、前 言

里查逊数 (Ri)，是表示以风速垂直切变起主要作用的无量纲参数。在低空急流发展的盛期，非地转偏差十分明显，急流轴以下低空风的垂直切变很大. 因此，在这种条件下里查逊数常常很小. 田生春[1]等分析过北京暴雨日 45 个例子的 900 hPa 以下里查逊数，临近暴雨前，因低空风的垂直切变加大，绝大多数 $Ri<10$，相当一部分出现 $Ri<5$. 这时中尺度扰动也得以发展. 孙淑清[2]也指出，低空急流的加强随之造成 Ri 的减小，这与中尺度系统的发展有密切的关系，并对此类现象做了一些分析研究.

里查逊数的减小与中尺度低值系统发展的关系，在理论上应归结为与里查逊数有关的斜压不稳定问题. 因此本文以里查逊数作为参数，从稳定性的角度来研究低空强风垂直切变对中尺度系统不稳定发展的影响.

以前斜压稳定性的大量研究，已经表明斜压大气中主要存在着两种类型的不稳定：一种是由 Charney[3]、Eady[4] 和 Arnoson[5] 等人研究过的对流斜压不稳定. 这类不稳定是假定扰动波形为 $\phi(z)e^{i(kx+\sigma t)}$ 的形式，不计扰动的 y 方向变化，其能量来源是取自基本气流的有效位能. 另一种是由 Eliassen[6]、Kleinschmidt[7] 等人研究过的对称不稳定. 这类不稳定是假定扰动波形为 $\phi(z)e^{i(ly+\sigma t)}$ 的形式，不计扰动的 x 方向变化，其能量来源是取自于基本气流的动能. 事实上，如果我们要想决定究竟扰动的哪一种类型的不稳定具有较大的增长率，就必须同时考虑扰动波形沿两个方向的变化，即认为扰动应有形式 $\phi(z)e^{i(kx+ly+\sigma t)}$. 本文在同时考虑两种斜压类型的情况下，研究中尺度系统在低空急流的作用下发展的问题.

二、非地转平衡下的 Eady 模式

在无摩擦、绝热及准不可压的条件下有如下方程组：

1983 年 9 月 24 日收到，1984 年 11 月 2 日收到再改稿.

$$\frac{du}{dt}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\frac{dv}{dt}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{ds}{dt}=0 \tag{2.5}$$

其中 s 是熵．且 $s=\frac{s^*}{c_p}$，$s^*=c_p\ln\frac{\theta}{\theta_0}$ 是惯用形式． 对 (2.1)、(2.2) 式求 z 的偏微分并利用等熵过程

$$s=\frac{1}{r}\log p-\log\rho \tag{2.6}$$

其中 $r=c_p/c_v$，可得到整理后的

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial s}{\partial z}\right)\left(\frac{du}{dt}-fv\right)=-g\frac{\partial s}{\partial x} \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial s}{\partial z}\right)\left(\frac{dv}{dt}+fu\right)=-g\frac{\partial s}{\partial y} \tag{2.8}$$

由大量的观测事实已经证明，在暴雨将发生的前期，$\frac{\partial s}{\partial z}$ 是非常小的，在低空近于零[8]．作为一种较好的近似，(2.7)、(2.8) 式可写成：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{du}{dt}-fv\right)=-g\frac{\partial s}{\partial x} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dt}+fu\right)=-g\frac{\partial s}{\partial y} \tag{2.10}$$

通过运算 $\frac{\partial}{\partial x}(2.9)+\frac{\partial}{\partial y}(2.10)$ 得：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{f_0\zeta-\frac{dD}{dt}-\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}=g\nabla_H^2 s \tag{2.11}$$

其中 $D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$，$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$，$f_0=f$，$\nabla_H^2$ 为二维算子．

同时由 (2.1)、(2.2) 式可得涡度方程

$$\frac{d}{dt}(f_0+\zeta)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+D(\zeta+f_0)=0 \tag{2.12}$$

低空急流的大量观测事实表明，急流轴以下风速垂直切变很强，风速随高度近于线性变化．鉴于这种事实，我们在着重考虑斜压作用的情况下，取基本场的风速为 $U(z)$，$U(z)$ 可认为是 z 的线性函数．其熵为 $\bar{s}=Ay+Bz$．尽管低空急流一般是超地转的，

并不一定满足热成风关系，但其基本气流 $U(z)$，可认为满足热成风关系：

$$\frac{dU(z)}{dz} = -\frac{gA}{f} \tag{2.13}$$

引进小扰动：

$$u = U(z) + u'(x, y, z, t) \qquad v = v'(x, y, z, t)$$
$$w = w'(x, y, z, t) \qquad s = \bar{s}(z) + s'(x, y, z, t)$$

将上述扰动代入 (2.4)、(2.5)、(2.11) 及 (2.12) 式后得：

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{2.14}$$

$$f_0^2(aV' + bw') + \frac{D}{Dt}(gs') = 0 \tag{2.15}$$

$$f_0 D' + \frac{D\zeta'}{Dt} + f_0 a\frac{\partial w'}{\partial y} = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[f_0\zeta' - \frac{DD'}{Dt} + f_0 a\frac{\partial w'}{\partial x}\right] = \nabla_H^2(gs') \tag{2.17}$$

其中

$$a = \frac{gA}{f_0^2} \qquad b = \frac{gB}{f^2} \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \qquad D' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}$$

由方程组(2.14)—(2.17) 中消去 s'、v'、ζ'、D' 后得：

$$\frac{D}{Dt}\left(f_0^2 + \frac{D^2}{Dt^2}\right)\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + 2f_0^2 a\left(f_0\frac{\partial}{\partial x} - \frac{D}{Dt}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial w'}{\partial z}$$
$$+ f_0^2\left[b\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 2f_0 a^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]w' = 0 \tag{2.18}$$

设扰动 w' 具有波动形式

$$w' = \Phi(z)e^{i(\bar{k}x + \bar{\lambda}y + \bar{\sigma}t)} \tag{2.19}$$

并选取特征水平尺度 L，特征高度 H，特征速度 $U_0 = -\frac{gA}{f_0}H$，则有

$$(x, y) = L(x_1, y_1) \qquad z = Hz_1 \qquad U(z) = U_0 u_1 = -\frac{gA}{f_0}Hz_1$$
$$\Phi(z) = \Phi(H)\phi(z_1)$$

同样取特征频率为 f_0，特征波数为 $\frac{f_0}{U_0}$，则有

$$\bar{k} = \frac{f_0}{U_0}k \qquad \bar{\lambda} = \frac{f_0}{U_0}\lambda \qquad \bar{\sigma} = f_0\sigma$$

这里 x_1、y_1、z_1、u_1、$\phi(z_1)$、k、λ、σ 为无量纲量。

将 w' 及这些无量纲量代入方程 (2.18) 后得无量纲方程：

$$[1 - (\sigma + kz_1)^2]\frac{d^2\phi}{dz_1^2} - \left[\frac{2k}{\sigma + kz_1} - 2i\lambda\right]\frac{d\phi}{dz_1}$$

$$-\left[Ri(k^2+\lambda^2)+\frac{2ik\lambda}{\sigma+kz_1}\right]\phi=0 \tag{2.20}$$

其中 $Ri=gB\Big/\left(\frac{d\bar{U}}{dz}\right)^2$ 为里查逊数。

方程(2.20)是只含有唯一参数 Ri 的无量纲方程。它与1949年 Eady 模式形式上是一样的，只是在这里为非地转情况下求得的，可称非地转 Eady 模式。

三、与 Ri 有关的对称不稳定

从夏季次天气尺度的低空急流温、压场结构看，水平温度梯度一般是很弱的，并不具有明显的对流斜压性。急流风速超地转的原因，主要是由于变压梯度引起的变压风[9]。这就启示我们，由低空急流引起的中尺度系统的发展，其能量来源主要不应是基本气流的有效位能释放，而应是基本气流的动能。即是说，这种扰动的发展主要是由于对称不稳定。鉴于这种启示，我们主要考虑 $k\ll 1$ 的情况，这意味着扰动主要是沿纬向传播的。因此 $\phi(z_1)$ 及 σ 都可以视 k 为小参数展开：

$$\phi(z_1)=\phi_0(z_1)+k\phi_1(z_1)+k^2\phi_2(z_1)+\cdots \tag{3.1}$$

$$\sigma=\sigma_0+k\sigma_1+k^2\sigma_2+\cdots \tag{3.2}$$

若把(2.20)式写成算子形式：

$$L\phi(z_1)=0 \tag{3.3}$$

其中

$$L=[1-(\sigma+kz)^2]\frac{d^2}{dz_1^2}-\left[\frac{2k}{\sigma+kz_1}-2i\lambda\right]\frac{d}{dz_1}$$
$$-\left[Ri(k^2+\lambda^2)+\frac{2ik\lambda}{\sigma+kz_1}\right]$$

今把算子 L 同样以 k 展开

$$L=L_0+kL_1+k^2L_2+\cdots \tag{3.4}$$

把(3.1)、(3.2)及(3.4)式代入(3.3)式后，对比 k^0、k^1、k^2 次幂有：

$$k^0:\ L_0\phi_0=0 \tag{3.5}$$

$$k^1:\ L_0\phi_1=-L_1\phi_0 \tag{3.6}$$

$$k^2:\ L_0\phi_2=-L_1\phi_1-L_2\phi_0 \tag{3.7}$$

其中算子

$$L_0=(1-\sigma_0^2)\frac{d^2}{dz_1^2}+2i\lambda\frac{d}{dz_1}-Ri\lambda^2 \tag{3.8}$$

$$L_1=-2\sigma_0(\sigma_1+z_1)\frac{d^2}{dz_1^2}-\frac{2}{\sigma_0}\frac{d}{dz_1}-\frac{2i\lambda}{\sigma_0} \tag{3.9}$$

$$L_2=-(2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2+2\sigma_1z_1+z_1^2)\frac{d^2}{dz_1^2}$$
$$+\frac{2(\sigma_1+z_1)}{\sigma_0^2}\frac{d}{dz_1}-Ri+\frac{2i\lambda(\sigma_1+z_1)}{\sigma_0^2} \tag{3.10}$$

对 k^3 的零级近似有方程

$$(1-\sigma_0^2)\frac{d^2\phi_0}{dz_1^2}+2i\lambda\frac{d\phi_0}{dz_1}-Ri\lambda^2\phi_0=0 \tag{3.11}$$

考虑如下的边界条件：对地面，相当于无量纲数 $z_1=0$，扰动振幅 $\phi_0(z_1)$ 应当消失。对扰动影响的上界，我们认为 $z=H$ 高度处 $\phi_0(z_1)$ 消失，这对应 $z_1=1$。故边界条件为：

$$\phi_0(z_1)\Big|_{z=\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.}=0 \tag{3.12}$$

因方程 (3.11) 是常系数二次方程，故有解：

$$\phi_0(z_1)=A_1e^{r+z_1}+B_1e^{r-z_1} \tag{3.13}$$

其中 $r_\pm=\frac{-i\lambda}{1-\sigma_0^2}\pm\left[\left(\frac{2i\lambda}{1-\sigma_0^2}\right)^2+\frac{4Ri\lambda^2}{1-\sigma_0^2}\right]^{1/2}\Big/2$ 为特征方程的根。A_1、B_1 是待定常数。利用边界条件 (3.12) 知，r_+，r_- 必满足

$$r_+-r_-=2n\pi i \tag{3.14}$$

$$A_1=-B_1 \tag{3.15}$$

由 (3.13) 及 (3.14) 式知

$$\sigma_0^2=1+\left(\frac{Ri\lambda^2}{2n^2\pi^2}\right)\left[1\pm\left(1+\frac{4n^2\pi^2}{Ri^2\lambda^2}\right)^{1/2}\right]\quad n=1,2,3,\cdots \tag{3.16}$$

若 σ_0 有虚部存在，则必有

$$\frac{Ri\lambda^2}{2n^2\pi^2}\left[1-\left(1+\frac{4n^2\pi^2}{Ri^2\lambda^2}\right)^{1/2}\right]<-1 \tag{3.17}$$

若我们只限于考虑垂直波数为 1 的中尺度扰动，即对应有 $\lambda=1$，$n=1$，则：

$$1+\frac{4\pi^2}{Ri^2\lambda^2}>\left(\frac{2\pi^2}{Ri\lambda^2}+1\right)^2 \tag{3.18}$$

即求得

$$Ri<1-\frac{\pi^2}{\lambda^2}=1-\pi^2=-8.9<0 \tag{3.19}$$

这个结果不符合观测事实，没有物理意义。因此我们必须考虑高一级近似

$$\begin{aligned}&(1-\sigma_0^2)\frac{d^2\phi_1}{dz_1^2}+2i\lambda\frac{d\phi_1}{dz_1}-Ri\lambda^2\phi_1\\&=2\sigma_0(\sigma_1+z_1)\frac{d^2\phi_0}{dz_1^2}+\frac{2}{\sigma_0}\frac{d\phi_0}{dz_1}+\frac{2i\lambda}{\sigma_0}\phi_0\end{aligned} \tag{3.20}$$

且有边界条件

$$\phi_1(z_1)\Big|_{z_1=\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.}=0 \tag{3.21}$$

设方程有特解：

$$f=(A_2z_1^2+B_2z_1)e^{r_+z_1}+(A_3z_1^2+B_3z_1)e^{r_-z_1}$$

代入方程 (3.20) 整理并利用 r_+、r_- 为特征根知

$$4(1-\sigma_0^2)r_+A_2+4i\lambda A_2=2\sigma_0r_+^2 \tag{3.22}$$

$$(1-\sigma_0^2)(2A_2+2r_+B_2)+2i\lambda B_2=2\sigma_0\sigma_1r_+^2+\frac{2}{\sigma_0}r_++\frac{2i\lambda}{\sigma_0} \tag{3.23}$$

$$4(1-\sigma_0^2)r_-A_3+4i\lambda A_3=2\sigma_0 r_-^2 \tag{3.24}$$

$$(1-\sigma_0^2)(2A_3+2r_-B_3)+2i\lambda B_3=2\sigma_0\sigma_1 r_-^2+\frac{2}{\sigma_0}r_-+\frac{2i\lambda}{\sigma_0} \tag{3.25}$$

解 (3.22)—(3.25) 式得:

$$A_2=\frac{\sigma_0 r_+^2}{2r_+(1-\sigma_0^2)+2i\lambda} \tag{3.26}$$

$$B_2=\frac{2\sigma_0\sigma_1 r_+^2+\frac{2}{\sigma_0}r_++\frac{2i\lambda}{\sigma_0}-2(1-\sigma_0^2)\frac{\sigma_0 r_+^2}{2r_+(1-\sigma_0^2)+2i\lambda}}{2r_+(1-\sigma_0^2)+2i\lambda} \tag{3.27}$$

$$A_3=\frac{-\sigma_0 r_-^2}{2r_-(1-\sigma_0^2)+2i\lambda} \tag{3.28}$$

$$B_3=\frac{r_-^2 2\sigma_0\sigma_1+\frac{2}{\sigma_0}r_--\frac{2i\lambda}{\sigma_0}+\frac{2(1-\sigma_0^2)\sigma_0 r_-^2}{2r-(1-\sigma_0^2)+2i\lambda}}{2r_-(1-\sigma_0^2)+2i\lambda} \tag{3.29}$$

于是方程 (3.20) 有通解

$$\begin{aligned}\phi_1(z_1)=&Ce^{r_+z_1}+De^{r_-z_1}+(A_2z_1^2+B_2z_1)e^{r_+z_1}\\&+(A_3z_1^2+B_3z_1)e^{r_-z_1}\end{aligned} \tag{3.30}$$

其中 C、D 是待定常数，A_2、B_2、A_3、B_3 由 (3.26)—(3.29) 式决定。

利用边界条件知:

$$z_1=0 \qquad C=-D \tag{3.31}$$

$$z_1=1 \qquad C(e^{r_+}-e^{r_-})+(A_2+B_2)e^{r_+}+(A_3+B_3)e^{r_-}=0$$

对上式两边同乘 e^{-r_-} 得:

$$C(e^{r_+-r_-}-1)+(A_2+B_2)e^{r_+-r_-}+(A_3+B_3)=0 \tag{3.32}$$

由 (3.4) 式知 $r_+-r_-=2n\pi i$ 得出

$$A_2+B_2+A_3+B_3=0 \tag{3.33}$$

把 (3.26)—(3.29) 式代入 (3.33) 式经整理后得:

$$\sigma_1=-\frac{1}{2} \tag{3.34}$$

由一级近似的结果知，σ_1 没有虚部存在，对所有的 Ri 扰动应是中性的。为此，有必要求其二级近似。

二级近似方程

$$\begin{aligned}(1-\sigma_0^2)\frac{d^2\phi_2}{dz_1^2}+2i\lambda\frac{d\phi_2}{dz_1}-Ri\lambda^2\phi_2=&2\sigma_0(\sigma_1+z_1)\frac{d^2\phi_1}{dz_1^2}\\&+\frac{2}{\sigma_0}\frac{d\phi_1}{dz_1}+\frac{2i\lambda}{\sigma_0}\phi_1+(2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2+2\sigma_1z_1+z_1^2)\frac{d^2\phi_0}{dz_1^2}\\&-\frac{2(\sigma_1+z_1)}{\sigma_0^2}\frac{d\phi_0}{dz_1}+Ri\phi_0-\frac{2i\lambda(\sigma_1+z_1)}{\sigma_0^2}\phi_0\end{aligned} \tag{3.35}$$

其边界条件为:

$$\phi_2(z_1)\Big|_{z_1=\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.}=0$$

因为我们主要关心在 $z_1=\frac{1}{2}$ 上下中层的扰动情况，且已知 $\sigma_1=-\frac{1}{2}$，故方程 (3.35) 中凡含有 (σ_1+z_1) 的项均可略去，于是简化为：

$$(1-\sigma_0^2)\frac{d^2\phi_2}{dz_1^2}+2i\lambda\frac{d\phi_2}{dz_1}-Ri\lambda^2\phi_2=\frac{2}{\sigma_0}\frac{d\phi_1}{dz_1}$$
$$+\frac{2i\lambda}{\sigma_0}\phi_1+(2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2+2\sigma_1z_1+z_1^2)\frac{d^2\phi_0}{dz_1^2}+Ri\phi_0 \tag{3.36}$$

但我们仍可近似地采用如下边界条件：

$$\phi_2(z_1)\Big|_{z_1=\{^0_1}=0 \tag{3.37}$$

设方程 (3.36) 有特解

$$\phi_2=(A_4z_1^3+B_4z_1^2+B_5z_1)e^{r_+z_1}+(A_4'z_1^3+B_4'z_1^2+B_5'z_1)e^{r_-z_1} \tag{3.38}$$

把特解 (3.38) 代入方程 (3.36)，通过对比方程两边关于 z_1 相同幂次项的系数可求得：

$$A_4=\frac{\frac{2}{\sigma_0}(r_++i\lambda)A_3+r_+^2}{6[(1-\sigma_0^2)r_++i\lambda]}$$

$$B_4=\frac{1}{1-\sigma_0^2}\left\{(B_2+r_+)\frac{1}{\sigma_0}+\frac{i\lambda}{\sigma_0}+\frac{(2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2)r_+^2}{2}+\frac{Ri}{2}\right\}$$
$$-\frac{(1-\sigma_0^2)r_++i\lambda}{(1-\sigma_0^2)\{[(1-\sigma_0^2)-2i\lambda][Ri\lambda^2-i\lambda r_+]-[Ri\lambda^2-\lambda^2-i\lambda r_+\sigma_0^2][(1-\sigma_0^2)r_++i\lambda]\}}$$
$$\times\left\{[(1-\sigma_0^2)r_++i\lambda]\left[\frac{4}{\sigma_0}A_3+\frac{2}{\sigma_0}(r_++i\lambda)B_2+2\sigma_1r_+^2\right]-\left[\frac{2}{\sigma_0}(r_++i\lambda)A_3\right.\right.$$
$$\left.+r_+^2\right](1-\sigma_0^2)-2(Ri\lambda^2-\lambda^2-i\lambda r_+\sigma_0^2)\left[\frac{2}{\sigma_0}(B_2+r_+)+\frac{2i\lambda}{\sigma_0}\right.$$
$$\left.\left.+(2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2)r_+^2+Ri\right]\right\}$$

$$B_5=\frac{1}{[(1-\sigma_0^2)-2i\lambda](Ri\lambda^2-i\lambda r_+)-(Ri\lambda^2-\lambda^2-i\lambda r_+\sigma_0^2)[(1-\sigma_0^2)r_++i\lambda]}$$
$$\times\left\{[(1-r_0^2)r_++i\lambda]\left[\frac{4A_3}{\sigma_0}+\frac{2}{\sigma_0}(r_++i\lambda)B_2+2\sigma_1r_+^2\right]-\left[\frac{2}{\sigma_0}(r_++i\lambda)A_3\right.\right.$$
$$\left.+r_+^2\right](1-\sigma_0^2)-2[Ri\lambda^2-\lambda^2-i\lambda r_+\sigma_0^2]\left[\frac{2}{\sigma_0}(B_2+r_+)+\frac{2i\lambda}{\sigma_0}\right.$$
$$\left.\left.+(2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2)r_+^2+Ri\right]\right\}$$

$$A_4'=\frac{\frac{2}{\sigma_0}(r_-+i\lambda)A_3+(-r_-^2)}{6[(1-\sigma_0^2)r_-+i\lambda]}$$

$$B_4'=\frac{1}{1-\sigma_0^2}\left[\frac{B_3-r_-}{\sigma_0}+\frac{i\lambda(-1)}{\sigma_0}+\frac{(2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2)(-r_-^2)}{2}+\frac{Ri(-1)}{2}\right]$$
$$-\frac{(1-\sigma_0^2)r_-+i\lambda}{(1-\sigma_0^2)\{[(1-\sigma_0^2)-2i\lambda](Ri\lambda^2-i\lambda r_-)-(Ri\lambda^2-\lambda^2-i\lambda r_-\sigma_0^2)[(1-\sigma_0^2)r_-+i\lambda]\}}$$

$$\times \left\{[(1-\sigma_0^2)r_- + i\lambda]\left[\frac{4A_3}{\sigma_0} + \frac{2}{\sigma_0}(r_- + i\lambda)B_3 + 2\sigma_1(-r_-^2)\right]\right.$$

$$-\left[\frac{2(r_- + i\lambda)A_3}{\sigma_0} + (-r_-^2)\right](1-\sigma_0^2) - 2(Ri\lambda^2 - \lambda^2 - i\lambda r_-\sigma_0^2)$$

$$\left.\times\left[\frac{2}{\sigma_0}(B_3 - r_-) + \frac{2i\lambda(-1)}{\sigma_0} + (2\sigma_0\sigma_2 + \sigma_1^2)(-r_-^2) + Ri(-1)\right]\right\}$$

$$B_5' = \frac{1}{(1-\sigma_0^2-2i\lambda)(Ri\lambda^2 - i\lambda r_-) - (Ri\lambda^2 - \lambda^2 - i\lambda r_-\sigma_0^2)[(1-\sigma_0^2)r_- + i\lambda]}$$

$$\times\left\{[(1-r_0^2)r_- + i\lambda]\left[\frac{4A_3}{\sigma_0} + \frac{2(r_- + i\lambda)B_3}{\sigma_0} + 2\sigma_1(-r_-^2)\right]\right.$$

$$-\left[\frac{2}{\sigma_0}\times(r_- + i\lambda)A_3 + (-r_-^2)\right](1-\sigma_0^2) - 2(Ri\lambda^2 - \lambda^2 - i\lambda r_-\sigma_0^2)$$

$$\left.\times\left[\frac{2(B_3 - r_-)}{\sigma_0} + \frac{2i\lambda(-1)}{\sigma_0} + (2\sigma_0\sigma_2 + \sigma_1^2)(-r_-^2) + Ri(-1)\right]\right\}$$

利用边界条件 (3.37) 可得:

$$A_4 + B_4 + B_5 + A_4' + B_4' + B_5' = 0$$

分别将 A_4、B_4、B_5 及 A_4'、B_4' 和 B_5' 代入并就 σ_2 解之可得:

$$\sigma_2 = \frac{1}{32\sigma_0^3\left(\frac{1}{1-\sigma_0^2} - Ri\right)}\left\{-2m\sigma_0^2\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right)\left[2 + \frac{4(1-\sigma_0^2)}{m}\right]\right.$$

$$\times[2 + (Ri-1)(1-\sigma_0^2) - \sigma_0^2] - 32[Ri(1-\sigma_0^2) - 1]\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right)$$

$$\times\sigma_0^2 - (2-\sigma_0^2)[-2m + m(Ri-1)(1-\sigma_0^2)]\left[4\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right)\right]$$

$$\left.-32(2-\sigma_0^2)[Ri(1-\sigma_0^2) - 1]\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right)\right\} + \frac{1}{32\sigma_0^3\left(\frac{1}{1-\sigma_0^2} - Ri\right)}$$

$$\times\left\{8\sigma_0^2[Ri(1-\sigma_0^2) - 1]\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right)[2 + 4(1-\sigma_0^2)] - 8\sigma_0^2\right.$$

$$\times\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right)[2m + m(Ri-1)(1-\sigma_0^2) - m\sigma_0^2] + 16(2-\sigma_0^2)$$

$$\times[Ri(1-\sigma_0^2) - 1]\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right) - 8(2-\sigma_0^2)[-2m + m(Ri-1)$$

$$\left.\times(1-\sigma_0^2)]\times\left(Ri - 1 - \frac{\sigma_0^2}{1-\sigma_0^2}\right)\right\}i \tag{3.39}$$

其中 $m = \sqrt{-4\lambda^2 + 4Ri\lambda^2(1-\sigma_0^2)} = 2\lambda\sqrt{Ri(1-\sigma_0^2) - 1}$. 由于取 $\lambda = 1$, 则 $m = 2\sqrt{Ri(1-\sigma_0^2) - 1}$.

下面根据 m 是实数或虚数,对 σ_2 进行讨论.

I. m 为实数,则由 (3.39) 式可知 σ_2 的虚部为:

$$\sigma_{2i} = -\frac{1}{4\sigma_0^3}\{[Ri(1-\sigma_0^2)-1][4\sigma_0^2(1-\sigma_0^2)+1]$$
$$+m(2-\sigma_0^2)(4-\sigma_0^2)-2m[Ri(1-\sigma_0^2)+1]\} \quad (3.40)$$

只要注意到 σ_0 取负值，从 (3.40) 式可求得在 $Ri > 7.3$ 时，有

$$\sigma_{2i} < 0 \quad (3.41)$$

此情况与观测事实不符，没有实际意义。

II. 当 m 为虚数，则由 (3.39) 式可知 σ_2 的虚部为：

$$\sigma_{2i}^* = -\frac{1}{32\sigma_0^3}\{-2m^*\sigma_0^2[Ri(1-\sigma_0^2)+1]$$
$$-(2-\sigma_0^2)[-2+(Ri-1)(1-\sigma_0^2)]4m^*+8\sigma_0^2[Ri(1-\sigma_0^2)-1]$$
$$\times[2+4(1-\sigma_0^2)]+16(2-\sigma_0^2)[Ri(1-\sigma_0^2)-1]\} \quad (3.42)$$

其中 $m = m^* i$，即 $m^* = 2\sqrt{1-Ri(1-\sigma_0^2)}$ 是实数。

同样，σ_0 取负值，从 (3.42) 中可求得在 $Ri < 5.2$ 时有：

$$\sigma_{2i}^* < 0 \quad (3.43)$$

由此可见，在 $Ri < 5.2$ 时，就会发生对称斜压不稳定，促使中尺度扰动发展。

以上着重讨论了中尺度扰动系统发生对称斜压不稳定时对 Ri 的要求。下面考查在 $\lambda \ll 1$ 的情况下，即主要考虑对流斜压不稳定时对 Ri 的要求。

因为设 $\lambda \ll 1$，则可以使 λ 作为小参数对 σ、ϕ 及算子 L 进行展开：

$$\sigma = \sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \lambda^2\sigma_2 + \cdots \quad (3.44)$$

$$\phi = \phi_0 + \lambda\phi_1 + \lambda^2\phi_2 + \cdots \quad (3.45)$$

$$L = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2 + \cdots \quad (3.46)$$

将方程 (3.24)、(3.25) 及 (3.26) 代人方程 (3.3) 后有

$$L_0\phi_0 = 0 \quad (3.47)$$

$$L_0\phi_1 = -L_1\phi_0 \quad (3.48)$$

$$L_0\phi_2 = -L_1\phi_1 - L_2\phi_2 \quad (3.49)$$

其中

$$L_0 = [1-(\sigma_0+kz_1)^2]\frac{d^2}{dz_1^2} - \frac{2k}{\sigma_0+kz_1}\frac{d}{dz_1} - Rik^2$$

$$L_1 = 2\sigma_1(\sigma_0+kz_1)\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \left[\frac{2k\sigma_1}{(\sigma_0+kz_1)^2}+2i\right]\frac{d}{dz_1} - \frac{2ik}{\sigma_0+kz_1}$$

$$L_2 = (2\sigma_0\sigma_2+\sigma_1^2+2\sigma_2 kz_1)\frac{d^2}{dz_1^2} + \frac{2\sigma_2 k}{(\sigma_0+kz_1)}\frac{d}{dz_1} - Ri + \frac{2ik\sigma_1}{(\sigma_0+kz_1)^2}$$

对零级近似有

$$[1-(\sigma_0+kz_1)^2]\frac{d^2\phi_0}{dz_1^2} - \frac{2k}{\sigma_0+kz_1}\frac{d\phi_0}{dz_1} - Rik^2\phi_0 = 0 \quad (3.50)$$

同样对应地面及 H 高度应有边界条件

$$\phi_0(z_1)\Big|_{z_1=\{^0_1} = 0 \quad (3.51)$$

对 $k \gg 1$，方程 (3.50) 有解：

$$\phi_0(z_1)=A_4\exp\left\{\frac{1}{2}(\sigma_0+kz_1)^{-2}+\left[\frac{3k^2}{(\sigma_0+kz_1)^4}-\frac{Rik^2}{(\sigma_0+kz_1)^2}\right]^{1/2}\right\}$$
$$+B_4\exp\left\{\frac{1}{2}(\sigma_0+kz_1)^{-2}-\left[\frac{3k^2}{(\sigma_0+kz_1)^4}-\frac{Rik^2}{(\sigma_0+kz_1)^2}\right]^{1/2}\right\} \tag{3.52}$$

A_4、B_4 是由 (3.51) 式确定的常数．利用边界条件知

$$2k^3Ri\sigma_0^5+5Rik^4\sigma_0^4+(4Rik^5-12k^3)\sigma_0^3+(Rik^2-18k^4)\sigma_0^2-12k^5\sigma_0-3k^6=0 \tag{3.53}$$

方程 (3.53) 是关于 σ_0 的高次代数方程，直接求解有些困难．但可以估计其增长率与 Ri 的关系．因为 σ_0 可表示成 $\sigma_0=kC_x$，对于 $C_x\sim 1$，则 σ_0 应有 $\sigma_0\sim k$ 的量级．

事实上，对 $k\gg 1$，方程 (3.53) 就可以略去含有 k^6 的项，而保留更高阶的含 k^8 的项．有

$$2k^3Ri\sigma_0^5+5Rik^4\sigma_0^4+4Rik^5\sigma_0^3=0 \tag{3.54}$$

从方程 (3.53) 便知，在 Ri 的量级为 0.1 时，方程 (3.54) 能够成立．对 (3.54) 式就 σ_0 解之得：

$$\sigma_0\doteq\frac{(-5\pm i\sqrt{7})}{4}k \tag{3.55}$$

由 (3.55) 式即可看出，以上假定 $\sigma_0\sim k$ 还是合理的．因为在此前提下简化方程，所得的结果确是 k 的量级．

还应注意到，在 $Ri\sim 0.1$ 量级时，σ_0 的虚部与 Ri 没有关系，这一点从 (3.48) 式中可以明显看出．这说明对流斜压不稳定的产生对 Ri 的要求远远不如对称斜压不稳定那样严格．

四、结果与讨论

通过求解非地转 Eady 模式方程的零级、一级和二级近似，得出了对垂直波数为 1 的中尺度扰动，在 $Ri<5.2$ 时会发生对称不稳定，而对流斜压不稳定与 Ri 的关系却不够紧密．

Stone[10] 曾证明过在 $Ri<0.95$ 时，即可发生以对称斜压为主的不稳定．他在求解模式的零级近似时，运用了 $\lambda\to\infty$ 的条件，在这个条件下，得出 $Ri<1$．显然，$\lambda\to\infty$ 相应是波长 $L\to 0$，这种极微小的尺度运动早已失去气象上的意义．

另一点特别值得指出的是，他在假定 $k\gg 1$ 时得到方程

$$(\sigma+kz_1)^2\frac{d^2\phi}{dz_1^2}+Ri(k^2+\lambda^2)\phi=0 \tag{4.1}$$

用此方程求出了 $Ri<\frac{1}{4}$ 时会发生 Kelvin-Helmholtz 不稳定．这个结论是不恰当的．问题在于 (4.1) 式是一个不合理的方程．在 $k\gg 1$ 时，简化方程应为 (3.50) 式而得不到 (4.1) 式．对 (3.50) 式，在已给边界条件下，我们已经估计出，扰动增长率与 $Ri\sim 0.1$ 量级的值无关．$Ri=\frac{1}{4}$ 仍属 $Ri\sim 0.1$ 的范围．因此 (3.50) 式所得的结果是适用的．

或者说，即使 $Ri<\frac{1}{4}$，本模式还不能推断出是 Kelvin-Hehnholtz 不稳定.

Gambo[11] 1970 年用两层模式及里查逊数去研究扰动的稳定性问题. 模式本身的主要缺陷是：在运动方程中取了 $\frac{\partial \phi}{\partial y}=0$. 这种过强的限制使得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)v+fu=0 \tag{4.2}$$

方程(4.2)意味着科氏力分量 fu 是与 $\frac{dv}{dt}$ 这种加速度分量相平衡而不是气压梯度力. 基本场的 U 值应当比较小. 因为自始至终这种关系成立，就导出 $\frac{\partial U}{\partial p}$ 也是一个小量. 故采取这种模式就没法很好研究急流或强风中心附近的对称斜压不稳定. 在这种模式下，如果 Ri 比较小，主要是由于层结效应造成的，而不是强风切变. 大气的层结效应与大气对流斜压性有密切关系，故此模式比较适合研究对流斜压不稳定问题. 的确，Gambo 采用 u, v 等量有形如 $e^{ik(x-ct)}$ 类型的波动，这种波动型也就表明了是研究对流斜压性问题. Gambo 在引入热成罗斯贝数之后，在零级近似下得出 $Ri\leqslant 1$ 会发生对流斜压不稳定. 这个结果的实质是反映热力层结效应. 而本文指出的一些结果主要是反映强风切变. 这说明在形式上可能有类似的结果，但模式本身有很大差别，同样结果却反映完全不同的物理意义. 因此，对一个具体天气过程，在计算里查逊数时，我们不能只简单地看它本身数字的大小，而要着重于引起 Ri 变小的物理原因. 否则，我们就会对斜压不稳定的性质作出错误的判断.

由于低空急流风速的加强造成 Ri 的减小，从而引起中尺度扰动的不稳定发展，这种天气现象已有大量天气事实可以证明. 近些年来，从湖南湘中暴雨试验基地所得资料分析看，1976—1980年的 14 次加密观测的低空急流过程中，发现低空急流风速的脉动变化与中低压和强雨团关系十分密切. 谢光德[12]等人分析指出，当南岳高山站风速值达 ≥8 米/秒时，湘中气压滤波 $\Delta p_s=p-\frac{1}{5}\sum_{1}^{5}p_i$ 的扰动值可达≥0.4hPa. 特别指出，当南岳山上风的 u, v 分量廓线出现≥12 米/秒，且维持两个小时以上时，约其后 5—8 小时左右，在湘中至少出现一次强雨团活动. 这种强雨团的雨量达 ≥40 毫米/小时.

十分有趣的是，这种中低压、强雨团等系统，主要呈南北方向运动，而不同于气旋及长波槽以东西向运动为主. 这从理论上看，是由于对称斜压不稳定引起的. 尤其是在南北方向温度梯度不明显，低层大气斜压性不强的情况下，这种中尺度系统的移动往往带有很强的南北分量. 而且这种系统发生的层次多在 700hPa 以下，比较浅薄，与低空急流有很好的配合. 这些都说明了由对称斜压不稳定发展起来的系统与由对流斜压不稳定发展起来的系统之间的差异. 值得指出，用 R_i 值大小判别的不稳定条件与扰动波的垂直结构(即 n 值)有关，对不同的 n 值其结果是不一样的.

本文承陶诗言先生的指导和鼓励，特此致谢.

参 考 文 献

[1] 田生春等，1983，北京地区暴雨时各层温、湿、风的统计特征，大气科学，第7卷第1期，68—77.
[2] 孙淑清、翟国庆，1980 低空急流的不稳定性及其对暴雨的触发作用．大气科学第4卷，第4期.
[3] Charney, J, G, 1947, The dynamics of long waves in barodinic westerly Current, *J. Met.* Vol. 4. No. 5.
[4] Eady. E. T, 1949. long waves and cyclone waves *Tellus*, Vol. 1, No. 3.
[5] Arnason, G, 1963, The stability of nongeostrophic perturbations in a baroclinic zonal flow., *Tellus*, Vol 15, No. 3.
[6] Eliassen, A, 1949, The quasi-static equations of motion with pressure as indenpendent variable. *Geofys Publ.* Vol. 17, no. 3, 43.
[7] Kleinschmidt, E., 1957, Handbuch der physik. 48. Berlin, 1—154.
[8] 寿绍文，1981，强对流天气前期的层结特征．南京气象学院学报，第1期.
[9] 高守亭、孙淑清，1984，次天气尺度低空急流的形成，大气科学，8卷2期.
[10] Stone, P. H. 1966, On non-Geotrophic Baroclinic Stability, *J. Atmos, Sci.*, Vol. 23, No. 4, 390—400.
[11] Gambo, K., 1970, The characteristics feature of Medium-Scal disturbemces in the atmosphere(1)* J, Met. Soci. Japan Vol. 48 173—184.
[12] 谢光德、王鹏新等，1982，低空急流与湖南暴雨，江淮暴雨文摘.

DETERMINING THE INSTABILITY OF MESOSCALE PERTURBATIONS WITH RICHARDSON NUMBER

Gao Shouting Sun Shuqing
(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

The ageostrophic Eady model is adopted. Expanding the equations with the small parameters, we have obtained the relation between Richardson number and symmetrically baroclinic instability. If the latter is developed, the Richardson number should be decreased with increasing low-level winds. Meanwhile, it is proved that under the condition of Ri<5.2, the symmetrically baroclinic instability will be developed in mesoscale perturbations.