

短论

地形对低空地转气流上重力 惯性波稳定性的影响

吕克利

(南京大学大气科学系)

提 要

研究指出,对西风地转气流,地形的南坡有利于重力惯性波的不稳定,北坡不利于波动的不稳定发展;对东风气流,情况与此相反。重力惯性波不稳定的条件是 $\left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)^2 \geq g^*H$ 。

中尺度天气系统如飑线等已成为人们日益关注的对象。研究指出,它们的发生发展与重力波的不稳定有重大关系,重力波强烈发展的地区是飑线发生的可能地区。巢纪平等^[1]和曾庆存^[2]都曾指出,低空超临界气流是不稳定的,在那里可以发展大振幅重力惯性波。本文讨论在存在地形的情况下,重力惯性波不稳定发展的条件将有什么变化。

一、基本方程

为简单起见,考虑上层流体密度为 ρ_1 , 下层密度为 ρ_2 的简单两层模式,对下层流体有方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g^* \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - h)u + \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - h)v = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 $g^* = (\rho_1 - \rho_2)g/\rho_2$, h 为地形高度。

令

$$u = \bar{u} + u' \quad v = v' \quad \zeta = \bar{\zeta} + \zeta' \quad (\bar{u} = \text{常数})$$

代入(1)式进行线性化,并设低空基流 $\bar{u}$ 满足地转关系

$$g^* \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = -f\bar{u}$$

1983年11月10日收到,1984年10月29日收到再改稿。

为简单起见, 设 $h = h(y)$, 略去撇号, 得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} - f v = -g^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + f u = -g^* \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{f \bar{u}}{g^*} v + (\bar{\zeta} - h) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - A v = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中 $A = \frac{dh}{dy}$, 设为常值.

进一步设变量与 y 无关, 并设地形高度远低于 $\bar{\zeta}$, 即 $h \ll \bar{\zeta}$, 如此 $\bar{\zeta} - h \simeq \bar{\zeta} = H$, 设为常数. 这样, 方程组 (2) 变为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} - f v = -g^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + f u = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{f \bar{u}}{g^*} v + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - A v = 0 \end{cases} \quad (3)$$

取谐波解, 令

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} e^{ik(x-ct)} \quad (4)$$

代入 (3) 式, 得频率方程为:

$$(\bar{u} - c)^3 - \left(g^* H + \frac{f^2}{k^2} \right) (\bar{u} - c) + \frac{f^2}{k^2} \left(\bar{u} + \frac{g^* A}{f} \right) = 0 \quad (5)$$

二、频率方程的分析

当 $\bar{u} = 0$, $A = 0$ 时, 即没有基流, 没有地形存在的情况下, 由 (5) 式得到:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_{2,3} &= \pm \sqrt{g^* H + f^2 / k^2} \end{aligned}$$

c_1 是慢波, $c_{2,3}$ 是重力惯性波的相速.

当 $\bar{u} \approx 0$, $A \approx 0$ 时, 相速可用下面方法^[2]估计: 取零级近似

$$c_1^{(0)} = \bar{u} \quad (6)$$

$$c_{2,3}^{(0)} = \bar{u} \pm \sqrt{g^* H + \frac{f^2}{k^2}} \quad (7)$$

对一级近似, 令

$$\bar{u} - c_1^{(1)} = (\bar{u} - c_1^{(0)}) + \delta_1^{(1)}$$

代入 (5) 式, 利用 (6) 式, 得:

$$-\left(g^*H + \frac{f^2}{k^2}\right)\delta_1^{(1)} + \frac{f^2}{k^2}\left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right) \simeq 0$$

因此

$$\begin{aligned}\delta_1^{(1)} &= \frac{1}{\left(g^*H + \frac{f^2}{k^2}\right)} \frac{f^2}{k^2} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right) \\ c_1^{(1)} &= \bar{u} - \frac{1}{\left(g^*H + \frac{f^2}{k^2}\right)} \frac{f^2}{k^2} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)\end{aligned}\quad (8)$$

令 $\bar{u} - c_{2,3}^{(1)} = (\bar{u} - c_{2,3}^{(0)}) + \delta_{2,3}^{(1)}$, 代入 (5) 式, 利用 (7) 式, 得:

$$\begin{aligned}\left[3(\bar{u} - c_{2,3}^{(1)})^2 - \left(g^*H + \frac{f^2}{k^2}\right)\right]\delta_{2,3}^{(1)} + \frac{f^2}{k^2}\left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right) &\simeq 0 \\ c_{2,3}^{(1)} &= \bar{u} \pm \sqrt{g^*H + \frac{f^2}{k^2} - \frac{\frac{f^2}{k^2}\left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)}{2\left(g^*H + \frac{f^2}{k^2}\right)}}\end{aligned}\quad (9)$$

如此可以得到 c_1 和 $c_{2,3}$ 的渐似解。由 (9) 式显见, $c_{2,3}$ 是重力惯性波, 这种重力惯性波在某种条件下可以是不稳定的。

频率方程 (5) 是三次代数方程, 其解(根)的性质由判别式

$$\left[\frac{g^*H + \frac{f^2}{k^2}}{3}\right]^3 \geq \left[\frac{\frac{f^2}{k^2}\left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)}{2}\right]^2 \quad (10)$$

决定。取“ $\geq$ ”号时, 方程的根是实的, 重力波是稳定的; 取“ $<$ ”号时, 方程有两个复根, 重力波是不稳定的。

为方便起见, 令

$$\xi = \frac{f^2}{k^2} \quad G(\xi) = \frac{1}{\xi^2} (g^*H + \xi)^3$$

如此, 对不稳定波的情况, (10) 式可改写为:

$$G(\xi) \leq \frac{27}{4} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)^2 \quad (11)$$

即不稳定区应在 (11) 式规定的范围内。显然, $\xi \rightarrow 0$ 时, $G(\xi) \rightarrow \infty$; $\xi \rightarrow \infty$ 时, $G(\xi) \rightarrow \infty$, 当 $\xi = 2g^*H$ 时, $G(\xi)$ 达到极小值, 这时 $G(\xi) = \frac{27}{4} g^*H$, 即不稳定区在

$\frac{27}{4} g^*H \leq G(\xi) \leq \frac{27}{4} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)^2$ 范围之内。图 1 给出了不稳定区的示意图。

由图 1 可见:

(1) 只有当条件 $\left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)^2 \geq g^*H$ 满足时, 重力惯性波才有可能不稳定, 否则波动是稳定的。

(2) 东西风基流 $|\bar{u}|$ 越大, 不稳定区范围越大, 越有利于波动的不稳定。

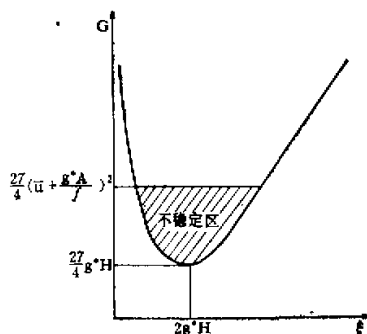


图1 不稳定的临界曲线

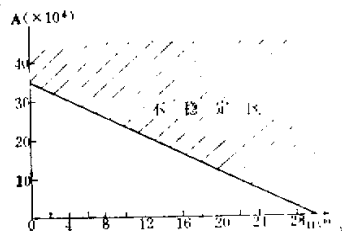


图2 不稳定的临界地形坡度

$$\sqrt{g^*H} = 30\text{m/s}, (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 = 0.086$$

(3) 当地形区域盛行西风气流时,南坡 ($A > 0$) 使不稳定区扩大,即南坡有利于西风基流上重力惯性波的不稳定;北坡 ($A < 0$) 使不稳定区缩小,不利于快波的不稳定发展。

(4) 当地形区域盛行东风气流时,南坡使不稳定区缩小,不利于东风基流上重力波的发展;北坡有利于重力惯性波的不稳定。

(5) 没有地形存在时,如文献 [1, 2] 中所指出的,只有超临界地转气流 ($|\bar{u}| \geq \sqrt{g^*H} \equiv c_0$) 才能发展不稳定的重力波;当存在地形时,次临界地转气流也能使重力惯性波不稳定发展。作为估计,图2给出了不同基流情况下的不稳定的临界地形坡度。

由(5)式知方程的三个根分别为:

$$c_1 = \bar{u} - (a + b)$$

$$c_2 = \bar{u} + \frac{1}{2}(a + b) - \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b)i$$

$$c_3 = \bar{u} + \frac{1}{2}(a + b) + \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b)i$$

式中

$$a = \sqrt[3]{\frac{f^2}{2k^2} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f} \right) + \sqrt{\left[\frac{f^2}{2k^2} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f} \right) \right]^2 - \frac{1}{27} \left(g^*H + \frac{f^2}{k^2} \right)^3}}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{f^2}{2k^2} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f} \right) - \sqrt{\left[\frac{f^2}{2k^2} \left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f} \right) \right]^2 - \frac{1}{27} \left(g^*H + \frac{f^2}{k^2} \right)^3}}$$

根据方程有复根的条件(11),知 a, b 都是实数,且 $a > b$,因此,相速的虚部

$$c_{2i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(a - b)$$

$$c_{3i} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b)$$

显见, c_2 是衰减波, c_3 是增长波。

参 考 文 献

- [1] 巢纪平、吴钦岳, 1964, 地转气流中的重力惯性波, 气象学报, 34 卷, 523—530.
 [2] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 科学出版社.

THE INFLUENCES OF OROGRAPHY ON THE INSTABILITY OF INERTIO-GRAVITATIONAL WAVES IN LOW-LEVEL GEOSTROPHIC FLOW

Lu Keli

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Abstract

The area of southern slope of orography is advantageous to the development of inertio-gravitational waves in the westerly geostrophic flow, and the northern slope is not advantageous to the instability of the gravity waves. For the easterly geostrophic flow, the results are just opposite to that of the westerly flow. The condition of instability of inertio-gravitational waves is $\left(\bar{u} + \frac{g^*A}{f}\right)^2 \geq g^*H$.

~~~~~

### 新的天气雷达资料处理系统研制完成

大气物理研究所最近研制成功建立在 IBM Pc/AT (或 Pc/XT) 微计算机基础上的天气雷达资料处理系统。该所为系统设计制作的专用雷达信号接口卡, 可插在微机中任一扩展槽内。在信号接口卡中, 完成对回波信号的模数转换, 数字式视频积分, 角度信号的变换等。该系统具备的成套资料处理软件, 有多种功能。除可实时显示彩色回波图象及存贮资料于磁盘中外, 还可实现多达 25 幅 PPI 图象的动画式显示。回波在分辨能力为 1 平方公里的情况下, 最大显示半径达 250 公里, 回波强度可用 16 种不同颜色表示, 图象清晰。RHI 显示功能为 250 公里 (距离) × 20 公里 (高度) × 16 色。此外, 系统还具有建立在回波单体移动矢量计算基础上的外推预报软件, 可在屏幕上显示未来时刻的回波预报图象及指示不同回波单体的移动路径。回波资料或图象均可通过普通电话线传输给远处的终端。凡已具备 IBM-Pc 系列或国产长城 0520 系列微计算机的单位, 皆可以很低的代价建立该系统。该系统还可与即将研制完成的卫星图象处理系统和常规天气资料客观分析显示系统配合使用, 达到综合分析的目的。该所欢迎国内外各单位前来参观购买专用软、硬件。

(马振骅)