

大气大尺度水平运动的稳定性

李崇银

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文对大气大尺度水平(惯性)运动的稳定性进行了简单的理论分析,着重讨论非线性的影响。结果表明:与线性情况下满足惯性稳定度条件的运动为稳定态否则为不稳定态不同,在非线性条件下,即基本纬向气流的涡度随纬度有变化时(线性或非线性变化),运动会出现分岔现象,在惯性稳定区还会产生不稳定的平衡态,在惯性不稳定区还会出现稳定的平衡态。在运动的惯性不稳定区,如果基本气流的涡度随纬度非线性增加($\partial^2 u / \partial y^2 < 0$),则当初始位置的地转偏差达到某一强度时,运动可发生一种月尖形突变。

一、前 言

地球大气的大尺度运动有两种情形是时常发生却又难于弄清楚的。一种情况表现为某一时期几乎相同的环流状态,其后期形势可以完全不同;另一种情况是大气环流在其缓慢演变过程中还包含着极快的变化——突变,例如冬、夏环流型的转换,夏半年副热带高压脊线位置的变化,平流层爆发性增温等。

长期以来人们都很注意上述两个问题,却一直未得到很好解决。近来的研究已表明,上述情况都同运动的非线性影响有关。并且,根据非线性稳定性理论的广泛研究,前一情况实际上可认为是平衡态失稳后的分岔(bifurcation),而后一情形则是运动的突变(catastrophe),远离平衡态的大气运动的一种自然行为。

国内有关大气运动分岔和突变的理论研究刚刚开始,工作还不多^{[1-2], (3)}。本文试就大气水平运动的稳定性问题进行初步探讨,在简明的数学分析的同时,力图更多地联系大气运动的物理过程进行讨论。

二、数 学 模 型

不考虑粘性的影响,大气水平运动方程可写成:

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

1984年7月31日收到,11月14日收到修改稿。

1) 林杏奇,1984,水平运动分岔与暴雨形成,湖北省气象科学研究所油印材料。

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

假定气流的基本状态满足地转关系, 且

$$\begin{cases} f\bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ f\bar{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

因此可以有

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= fv = f \frac{dy}{dt} \\ u(y_0 + \delta y) &= u(y_0) + f\delta y \end{aligned} \quad (4)$$

同时

$$\frac{dv}{dt} = f(\bar{u} - u) \quad (5)$$

将基本气流 $\bar{u}$ 在 y_0 处作 Taylor 级数展开, 即取

$$\begin{aligned} \bar{u}(y_0 + \delta y) &= \bar{u}(y_0) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} (\delta y)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} (\delta y)^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

这样, (5) 式可以写成:

$$\frac{dv}{dt} = f \left[\alpha + \mu \delta y + \frac{1}{2} \beta (\delta y)^2 + \frac{1}{6} \gamma (\delta y)^3 + \dots \right] \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= \bar{u}(y_0) - u(y_0) & \mu &= - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ \beta &= \partial^2 \bar{u} / \partial y^2 & \gamma &= \partial^3 \bar{u} / \partial y^3 \end{aligned}$$

很显然, 运动在 y 方向的加速与否, 不仅同初始位置的状态有关 (α 的影响), 而且还取决于基本气流的绝对涡度 ($-\mu$), 以及基本气流相对涡度的经向分布 (β 和 γ 表示)。同时, 基本气流绝对涡度对运动的影响是线性的, 而基本气流涡度经向分布的影响是非线性的。

三、线性水平运动

如果加速度仅是 δy 的线性函数, 称其运动为线性水平运动。这时 $\beta = \gamma = 0$, 即, 在线性水平运动中, 纬向基本气流仅随 y 线性变化。

在线性水平运动情况下, (7) 式变成:

$$\frac{dv}{dt} = f(\alpha + \mu \delta y) \quad (8)$$

为了简单起见, 假定在 $y = y_0$ 处有 $u(y_0) = \bar{u}(y_0)$, $\alpha = 0$, 那么:

$$\frac{dv}{dt} = f\mu\delta y = f\mu\xi \quad (9)$$

很明显,这种情况下只有 $\xi = \delta y = 0$ 是定态点,并且

$$\mu = -\left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \begin{matrix} > & \text{不稳定} \\ = & 0 & \text{中性} \\ < & \text{稳定} \end{matrix} \quad (10)$$

(10)式是大家熟知的惯性稳定度判据。因此,在线性水平运动情况下,只有 $\xi = 0$ 一个定态点;运动是否稳定完全依赖于参数 μ ,若 $\mu > 0$ (基本气流绝对涡度小于零),运动是惯性不稳定的,若 $\mu < 0$,则运动是惯性稳定的。简单地可以用图 1 来描绘运动性质,其中粗实线表示稳定态,粗虚线表示不稳定态。

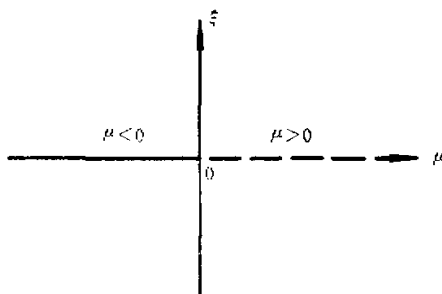


图 1 线性水平运动

粗实线表示稳定态,粗虚线表示不稳定态(以下各图同)

四、非线性水平运动(一)

如果在(7)式中 $\mu \approx 0$, $\beta \approx 0$, 而 $\gamma = 0$, 即考虑有 $(\delta y)^2$ 项的非线性影响。这相当于要考虑基本气流的涡度在经向呈线性分布时 $\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \text{常数}\right)$ 对运动的影响。为了简单起见,亦假定 $\alpha = 0$, 这样可得到方程:

$$\frac{dv}{dt} = \left[f\mu + \frac{f}{2}\beta\delta y\right]\delta y = \left(f\mu + \frac{1}{2}f\beta\xi\right)\xi \quad (11)$$

下面仅对 $\xi = \delta y > 0$ 的运动分别就 $\beta > 0$ 和 $\beta < 0$ 两种情况进行讨论:

1. $\beta > 0$ 的情况

这时,若 $\mu > 0$, 由(11)式可知,只有 $\xi = 0$ 是定态点;若 $\mu < 0$, 则 $\xi = 0$ 以及 $\xi = -\frac{2\mu}{\beta}$ 都是定态点。

同时,根据常微分方程的理论,定态的稳定性可以由雅可比 (Jacobian) 矩阵的特征值 λ 来决定。对于(11)式,特征值 λ 可写成:

$$\lambda = \frac{\partial \left(f\mu\xi + \frac{1}{2}f\beta\xi^2 \right)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\text{定态点}} = (f\mu + f\beta\xi) \Big|_{\xi=\text{定态点}} \quad (12)$$

对于 $\mu > 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu > 0$, $\xi = 0$ 为不稳定的定态点; 对于 $\mu < 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu < 0$, $\xi = 0$ 为稳定的定态点, 而 $\lambda_{\xi=-2\mu/\beta} = -f\mu > 0$, $\xi = -\frac{2\mu}{\beta}$ 为不稳定的定态点。

在现在讨论的情况下, 运动的性质可由图 2a 表示。可以看到, 在 $\mu < 0$ 的区域, 运动既有一个稳定态, 还有一个不稳定态, 而在 $\mu > 0$ 的区域, 运动只有一个不稳定态。即, 在满足惯性稳定的条件下, 由于基本气流涡度的经向分布特征 ($\beta > 0$), 大气运动仍可以出现不稳定。由图 2a 可以表明, 惯性稳定度参数 $\mu = 0$ 是分岔点, 当 μ 由负变到正时, 在 $\xi = 0$ 处出现一种亚临界分岔。

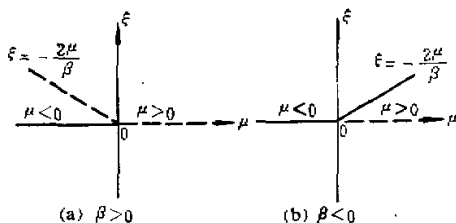


图 2 非线性水平运动 ($\gamma = 0$)

2. $\beta < 0$ 的情况

这时, 若 $\mu > 0$, 则 $\xi = 0$ 及 $\xi = -\frac{2\mu}{\beta}$ 都是定态点; 若 $\mu < 0$, 只有 $\xi = 0$ 是定态点。

因为

$$\lambda = f\mu + f\beta\xi \Big|_{\xi=\text{定态点}}$$

对于 $\mu > 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu > 0$, $\xi = 0$ 为不稳定的定态点, $\lambda_{\xi=-2\mu/\beta} = -f\mu < 0$, $\xi = -\frac{2\mu}{\beta}$ 为稳定的定态点; 对于 $\mu < 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu < 0$, $\xi = 0$ 为稳定的定态点。

在现在讨论的情况下, 运动特征可表示如图 2b。惯性稳定度参数 $\mu = 0$ 是分岔点, 当 μ 由负变到正时, 定态在 $\xi = 0$ 处失稳, 出现超临界分岔, 也称切分岔。在 $\mu < 0$ 的区域, 运动仅出现一种稳定态; 而在 $\mu > 0$ 的区域, 运动既有一个稳定态, 还有一个不稳定态。可以看到, 在惯性不稳定的条件下, 由于基本气流涡度的经向分布特征 ($\beta < 0$), 大气运动仍可以有稳定的情况。

上面的分析讨论表明, 基本气流涡度沿经向呈线性分布时, 通过非线性作用, 可以在惯性稳定度参数的中性点 ($\mu = 0$) 产生分岔。而由于基本气流涡度的经向不均匀 (线性增加或减少), 可以使惯性稳定区出现不稳定运动 (对于 $\beta = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} > 0$), 使惯性不稳定区

出现稳定运动(对于 $\beta < 0$).

为什么 $\beta > 0$ ($\beta < 0$) 时,在惯性稳定(不稳定)区域会产生不稳定(稳定)平衡态呢? 简单的物理解释是,由于

$$\beta = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \approx \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_2} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_1} \right] / \delta y$$

则有

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_2} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_1} + \beta \delta y$$

这里 φ_2 和 φ_1 分别表示两个纬度,且 $\varphi_2 > \varphi_1$. 对于 $\mu < 0$ 的惯性稳定区域,本应有 $\left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) > 0$, 或者记着 $f - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_1} > 0$, 如果 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ 随纬度增加,即 $\beta > 0$, 那么空气向北运动某一距离 δy 之后,有可能使 $f - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_2} < 0$, 从而在 $\mu < 0$ 区域运动出现不稳定平衡态. 相反,在 $\mu > 0$ 的惯性不稳定区域,本应有 $f - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_1} < 0$, 如果 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ 随纬度减小,即 $\beta < 0$, 那么可以产生 $f - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{\varphi_2} > 0$ 的情况,从而在 $\mu > 0$ 区域运动出现稳定平衡态.

五、非线性水平运动(二)

如果在(7)式中 $\mu \approx 0$, $\gamma \approx 0$, 而 $\beta = 0$, 即有 $(\delta y)^3$ 项存在,这相当于考虑基本气流的涡度在经向呈非线性分布. 为了简单起见,仍假定 $\alpha = 0$, 这时可得到方程:

$$\frac{d\nu}{dt} = f \left[\mu + \frac{\gamma}{6} (\delta y)^2 \right] \delta y = \left(f\mu + \frac{1}{6} f\gamma \xi^2 \right) \xi \quad (13)$$

1. $\gamma > 0$ 的情况

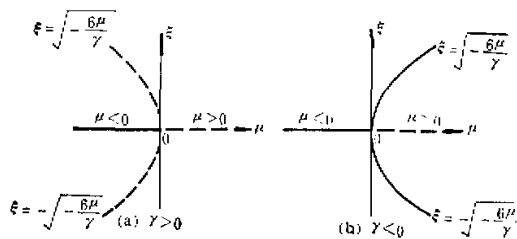
这时,若 $\mu > 0$, 只有 $\xi = 0$ 是定态点;若 $\mu < 0$, 则 $\xi = 0$ 及 $\xi = \pm(-6\mu/\gamma)^{\frac{1}{2}}$ 皆为定态点.

方程(13)的雅可比矩阵的特征值 λ 可写成:

$$\lambda = f\mu + \frac{1}{2} f\gamma \xi^2 \Big|_{\xi=\text{定态点}} \quad (14)$$

这样,对于 $\mu > 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu > 0$, $\xi = 0$ 为不稳定的定态点;对于 $\mu < 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu < 0$, $\xi = 0$ 为稳定的定态点, $\lambda_{\xi=\pm\sqrt{-6\mu/\gamma}} = -2f\mu > 0$, $\xi = \pm\sqrt{\frac{-6\mu}{\gamma}}$ 为不稳定的定态点.

运动特征如图 3a 所描写,在 $\mu < 0$ 区域存在三种定态,其中两种定态是不稳定的,另一种定态是稳定的;在 $\mu > 0$ 区域,却只有一种不稳定的定态. 惯性稳定度参数 μ 由负变

图3 非线性水平运动 ($\beta = 0$)

到正,运动将在 $\xi = 0$ 处发生另一种亚临界分岔。

2. $\gamma < 0$ 的情况

由(13)式可以看到: 若 $\mu > 0$, $\xi = 0$ 及 $\xi = \pm\sqrt{\frac{-6\mu}{\gamma}}$ 均是定态点; 若 $\mu < 0$, 只有 $\xi = 0$ 是定态点。

根据(14)式, 对于 $\mu < 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu < 0$, $\xi = 0$ 为稳定的定态点; 对于 $\mu > 0$, $\lambda_{\xi=0} = f\mu > 0$, $\xi = 0$ 为不稳定的定态点, $\lambda_{\xi=\pm\sqrt{\frac{-6\mu}{\gamma}}} = -2f\mu < 0$, $\xi = \pm\sqrt{\frac{-6\mu}{\gamma}}$ 是稳定的定态点。

在此种情况下,运动特性可用图 3b 表示。在 $\mu < 0$ 区域,运动只有一个稳定的定态,而在 $\mu > 0$ 区域,运动可以有三个定态,其中两个是稳定的,另一个是不稳定的。因此,惯性稳定度参数 μ 由负变到正,运动在 $\xi = 0$ 处出现失稳,发生一种超临界分岔。这种分岔称为叉型分岔或树枝分岔,运动由一个稳定态变为两个稳定态和一个不稳定态。

这一节的分析讨论表明,基本气流涡度在南北方向呈非线性分布的情况下 ($\gamma = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \neq 0$), 通过非线性作用,也可以在惯性稳定参数的中性点 ($\mu = 0$) 产生分岔,但其分岔比基本气流涡度在南北方向为线性分布时更复杂。由于基本气流涡度在南北方向呈非线性分布,可以使惯性稳定区域出现两种不稳定性运动 (对于 $\gamma > 0$), 也可以使惯性不稳定区出现两种稳定性运动 (对于 $\gamma < 0$)。

上节和本节的分析都表明,对于定态点 $\xi = 0$,运动的稳定性完全决定于参数 μ ,当 $\mu > 0$ 时为不稳定定态,当 $\mu < 0$ 时为稳定定态。这说明,在大气水平运动中,惯性稳定度对运动稳定性具有突出的影响,而 $\xi = 0$ 的平衡(定)态是一种惯性平衡态。

六、水平运动的突变

上述讨论中均假定了 $\alpha = 0$, 即在初始位置 y_0 处纬向气流与平均(地转)纬向气流是完全一样的。下面要讨论当初始位置处有非地转纬向气流 ($\alpha \neq 0$) 时的情况。

1. 线性情况

由(8)式,此时有:

$$\frac{dv}{dt} = f\alpha + f\mu\xi \quad (15)$$

对于 $\mu < 0$, $\xi = -\frac{\alpha}{\mu}$ 是定态点, 且因 $\lambda = f\mu < 0$, 运动处于稳定态. 对于 $\mu > 0$, $\xi = -\frac{\alpha}{\mu}$ 亦是定态点, 且因 $\lambda = f\mu > 0$, 运动处于不稳定态. 图 4 中的 a 和 b 分别表示了上述两种运动状态.

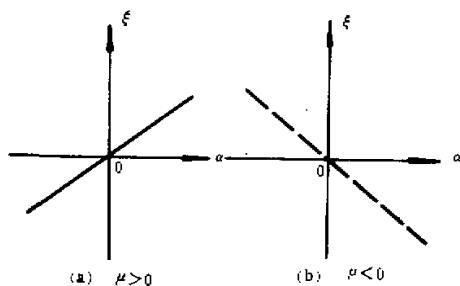


图 4 线性水平运动 ($\alpha \approx 0$)

2. 非线性情况(一)

考虑基本气流涡度在南北方向呈线性分布的情况, 由(7)式可以有:

$$\frac{dv}{dt} = f\alpha + f\mu\xi + \frac{1}{2}f\beta\xi^2 \quad (16)$$

取 $\mu = -2$, $\beta = -2$, 关于运动稳定性问题, 可以由(16)式退化为求方程

$$\alpha - 2\xi - \xi^2 = 0 \quad (17)$$

的解, 即得

$$\xi = -1 \mp \sqrt{1 + \alpha} \quad (18)$$

可见, 对于 $\alpha > -1$, 有两个实根, $\alpha = -1$ 有一个实根. 由于

$$\lambda = \left. \frac{\partial(\alpha - 2\xi - \xi^2)}{\partial\xi} \right|_{\xi=\text{定态点}} = -2 - 2\xi \quad (19)$$

则 $\xi < -1$ 时, $\lambda > 0$, 运动处于不稳定态, $\xi > -1$ 时, $\lambda < 0$, 运动处于稳定态. 运动的特性可以由图 5 中的(a)表示.

改变 μ 和 β 的取值, 令 $\mu = -2$, $\beta = 2$, 则有

$$\xi = 1 \pm \sqrt{1 - \alpha} \quad (20)$$

对于 $\alpha < 1$, 有两个实根, $\alpha = 1$, 有一个实根, 且因

$$\lambda = -2 + 2\xi \quad (21)$$

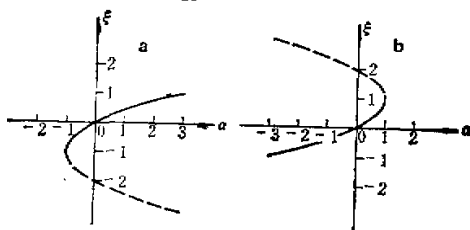


图5 非线性水平运动 ($\alpha \neq 0, \gamma = 0$)
(a) $\mu = -2, \beta = -2$; (b) $\mu = -2, \beta = 2$

故当 $\xi > 1$ 时为不稳定态, 当 $\xi < 1$ 时为稳定态。图 5b 表现了运动的特性。

3. 非线性情况(二)

考虑基本气流涡度在南北方向为非线性分布, 即 $\beta = 0$, 而 $\gamma \neq 0$ 。由 (7) 式可以有:

$$\frac{dv}{dt} = f\alpha + f\mu\xi + \frac{1}{6}f\gamma\xi^3 \quad (22)$$

为简便起见, 取 $\mu = 3, \gamma = -6$, 运动稳定性问题可以由 (22) 式退化为求解方程

$$-\xi^3 + 3\xi + \alpha = 0 \quad (23)$$

很显然, 当 $\alpha = -2$ 时, $\xi = -2$ 及 $\xi = 1$ 是定态点; $\alpha = 2$ 时, $\xi = 2$ 及 $\xi = -1$ 是定态点。在 $|\alpha| > 2$ 区域, (23) 式有一实根, 表明运动只有一种定态; 在 $|\alpha| < 2$ 区域,

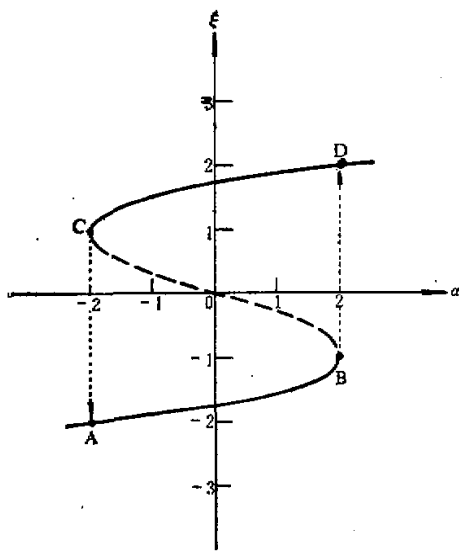


图6 非线性水平运动 ($\alpha \neq 0, \beta = 0, \mu = 3, \gamma = -6$)

(23)式有三个实根,即运动有三种定态.

由于

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi} (-\xi^3 + 3\xi + \alpha) = -3\xi^2 + 3 \quad (24)$$

可见,当 $|\xi| > 1$ 时, $\lambda < 0$, 其运动为稳定态;当 $|\xi| < 1$ 时, $\lambda > 0$, 其运动为不稳定态.

对于上面讨论的情况,运动的特性可由图 6 表示,曲线 BC 表示不稳定的定态, AB 和 CD 都是稳定的定态. 图 6 的曲线虽然是 $\mu = 3$ 和 $\gamma = -6$ 的情况,但也能反映 μ 为正值而 γ 为负值的一般特征. 当参数 α 由负值逐渐变为正值时,运动处于稳定的定态(曲线 AB 表示),但当 α 为某一特殊值时(图 6 中 $\alpha = 2$),运动发生突变,由定态点 B 跃变到定态点 D ;相反,当 α 由正值逐渐变为负值时,运动亦有突变,由定态点 C 跃变到定态点 A . 因此可以认为,在满足惯性不稳定条件下 ($\mu > 0$),如果基本气流分布满足 $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^3} < 0$, 则扰动初始位置的地转偏差达到某一强度时,运动可由一种定态跳到另一种定态,出现如图 6 所示的月尖形突变.

七、结 语

分岔和突变已被证明是自然界中广泛存在的复杂现象之一,但它们不能用线性理论给予解释,因为它们是由非线性物理过程所引起的. 地球大气的运动也一样,在非线性作用下,运动可出现分岔和突变. 本文对大气非线性水平(惯性)运动进行的初步讨论表明:

(1) 在线性情况下,运动既不发生分岔,也不出现突变现象. 即是说,如果纬向基本气流只随纬度线性变化 ($\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{常数}$), 运动只有惯性稳定和惯性不稳定两种定态(平衡态).

(2) 在纬向基本气流的涡度随纬度线性增加或减小的非线性条件下,运动可以出现分岔现象. 对于 $\partial y > 0$ 的向北运动而言在惯性稳定区还可以出现一个不稳定的平衡态;而在惯性不稳定区还可以存在一个稳定的平衡态.

(3) 当纬向基本气流的涡度随纬度呈非线性变化的情况下,通过非线性作用,运动会出现更为复杂的分岔现象. 在惯性稳定区还可以出现两个不稳定的平衡态,而在惯性不稳定区还可以存在两个稳定的平衡态.

(4) 在初始位置处于无地转偏差时 ($\alpha = 0$), 运动仅可出现分岔而无突变现象. 因此,相对于分岔,突变现象是更难出现的,它对起始状态有依赖性.

(5) 在满足惯性不稳定条件下,如果基本气流的涡度随纬度非线性增加 ($\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^3} < 0$), 则当扰动在初始位置的地转偏差达到某一强度时,运动可由一种稳定平衡态跳到另一种稳定平衡态,出现一种月尖形突变.

本文所作的简单分析,其结果是初步的,有些问题尚待进一步深入研究. 但本文的研究已表明,同线性相比较,非线性作用使运动具有完全不同的特性,需要很好考虑.

参 考 文 献

- [1] 柳崇健, 陶诗言, 1983, 副高北跳与月尖突变, 中国科学 (B), 第 5 期, 474—483.
[2] 李麦村, 罗哲贤, 1983, 6 月和 10 月大气环流突变的非线性机制, 中国科学 (B), 第 2 期, 187—197.

THE STABILITY OF LARGE-SCALE HORIZONTAL
MOTION IN THE ATMOSPHERE

Li Chongyin

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

A simple theoretical analysis on the stability of large-scale horizontal (inertial) motion in the atmosphere is completed in this paper. The nonlinear effect is the major subject in the research. The study shows that, under the nonlinear condition, i.e. the vorticity of basic zonal flow linearly or nonlinearly varies with latitude, the motion will bifurcate and there exist instable equilibrium states in the inertial stable region and stable equilibrium states in the inertial instable region, which differ from such case under the linear condition that the motion belongs to steady state while the inertial stability condition is met, otherwise to unsteady state. In inertial instable region, if the vorticity of basic zonal flow nonlinearly increases with the latitude (i.e., $\partial^2 \bar{u} / \partial y^2 < 0$), the motion should generate a cup-shaped catastrophe when the geostrophic departure at initial location enhances to some critical intensity.