

辐射传输方程的一个改进算法

邱金桓

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文研究了散射相函数的有限项的勒让德展开对于求解辐射传输方程的误差效应,提出了一个改进算法。理论分析和数值试验的结果都表明,多次散射分量和辐射通量远比一次散射分量对相函数的展开误差敏感。只要用正确的相函数修正一次散射分量,就能在较少项的相函数勒让德展开下得到精确的辐射强度解,从而大大提高了计算速度,对于小于1的光学厚度,计算时间可减少五分之四。

一、引 言

由于大气辐射传输研究在气象学上的重要意义,也由于辐射传输问题本身的复杂性,国内外的许多学者一直致力于研究辐射传输方程的数学求解,提出了许多计算方法^[1]。在这方面,正如 Wiscobe 指出的,富氏变换在求解辐射传输方程上的应用是六十年代的一个重要研究成果^[2]。至今广泛采用的球谐函数法^[3]、间断坐标法^[4]、高斯塞德迭代法^[5]等,通常都对方程施以富氏变换以得到一组与天顶角余弦 μ 有关但与方位角无关的方程,为了论述的方便,下面称这组方程为 μ 方程。辐射传输计算的主要困难之一是相函数的高度不对称,为了保证相函数的勒让德展开具有较高的精度,往往需要很大的展开项数、甚至高达几百项^[6]。在数值计算中,勒让德展开增加一项,就要增加一个 μ 方程,所需的计算机内存和计算时间也就要相应增加。而且,为了避免数值计算的病态化,展开项数要求有一上限^[6]。当考虑云和气溶胶散射时,大气辐射传输问题的另一困难在于计算的复杂性,正如 Paltridge 和 Platt 指出的^[7],假如不存在云和气溶胶,也许大气辐射及其与气象要素的相互作用的大部分实际问题真的不需要什么复杂的公式就能够处理了。因此,许多学者多年来极力寻求简单的近似计算模式,但是,许多近似模式,如二流近似、Eddington 近似、 δ -Eddington 近似等,都较适合于计算辐射通量,而不适于计算辐射强度,而且当大气柱的光学厚度较小时,这些近似模式的精度都较差。

天空辐射强度包含着云和气溶胶光学特性的丰富信息,分析这些信息对于研究和遥感云和气溶胶的光学特性是很有意义的。为此,特别是考虑遥感的需要,要求精确求解辐射传输方程。本文分析了散射相函数的不准确勒让德展开对于确定一次散射分量和多次

散射分量的影响, 建议通过订正一次散射量以保证辐射强度解在相函数的有限展开具有很大的精度。

二、误差分析

忽略大气本身的热发射, 辐射传输方程可表为

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = & I(\tau, \mu, \phi) \\ & - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^1 d\mu' P(\mu', \phi', \mu, \phi) I(\tau, \mu', \phi') \\ & - \frac{\tilde{\omega}F}{4} e^{-\tau/\mu_0} P(\mu, \phi, -\mu_0, \phi_0), \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $I(\tau, \mu, \phi)$ 为辐射强度, τ 为光学厚度, μ 为天顶角余弦, ϕ 为方位角, μ_0 和 ϕ_0 分别为太阳的天顶角余弦和方位角, $\tilde{\omega}$ 为一次散射反照率, πF 为大气上界太阳的辐照度, P 为大气散射相函数。方程(1)中, 右边第二项和第三项是源函数, 其中第二项表示多次散射贡献, 第三项表示一次散射贡献。对相函数作 $N+1$ 项勒让德展开, 即

$$P(\cos\theta) \approx P^N(\cos\theta) = \sum_{l=0}^N C_l P_l(\cos\theta), \quad (2)$$

则可推得^[6]

$$\begin{aligned} P(\mu, \phi, \mu', \phi') = & \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{C}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi), \\ \tilde{C}_l^m = & (2 - \delta_{0,m}) C_l (l-m)! / (l+m)! \\ l = & m, \dots, N, \quad 0 \leq m \leq N; \\ \delta_{0,m} = & \begin{cases} 1, & \text{当 } m=0, \\ 0, & \text{当 } m \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

上式中, θ 为散射角, P_l^m 为缔合勒让德多项式。

再对辐射强度作如下的傅氏展开

$$I(\tau, \mu, \phi) \approx I_N(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^N I_N^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi), \quad (4)$$

(4)式中, $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 的下标 N 表示相函数近似取前 $N+1$ 个勒让德展开项时相应的辐射强度解。于是方程(1)可化为如下的 $N+1$ 个 μ 方程:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_N^m(\tau, \mu)}{d\tau} = & I_N^m(\tau, \mu) - (1 + \delta_{0,m}) \\ & \cdot \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=m}^N \tilde{C}_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I_N^m(\tau, \mu') d\mu' \\ & - \frac{\tilde{\omega}F}{4} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{l=m}^N \tilde{C}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0), \quad m=0, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

显然, N 越小, μ 方程越少, 计算速度越快。但当 N 值较小时, (2) 式表示的相函数误差较

大。下面讨论有限 N 值的相函数展开对求解辐射通量和强度的影响。 μ 方程的求解采用高斯塞德迭代法^[6]。

令 $I_{1N}^m(\tau, \mu)$ 表示方程(5)中 $I_N^m(\tau, \mu)$ 的一次散射贡献, 则在相函数 $N+1$ 项勒让德展开下, 一次散射和多次散射对辐射强度解的贡献 $I_{1N}(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_{2N}(\tau, \mu, \phi)$ 可分别由如下两式计算之,

$$I_{1N}(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^N I_{1N}^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_{2N}(\tau, \mu, \phi) &= I_N(\tau, \mu, \phi) - I_{1N}(\tau, \mu, \phi) \\ &= \sum_{m=0}^N [I_N^m(\tau, \mu) - I_{1N}^m(\tau, \mu)] \cos m(\phi_0 - \phi). \end{aligned} \quad (7)$$

在相函数的展开具有小于 1% 的均方误差的条件下, 相应的辐射强度解和它的多次散射分量分别记为 $I(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_2(\tau, \mu, \phi)$, 前者作为辐射强度的精确解看待, 并令 $I_1(\tau, \mu, \phi)$ 表示由方程(1)确定的正确的一次散射强度, 则 $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 解的一次散射和多次散射分量的误差 $\varepsilon_{1N}(\tau, \mu, \phi)$ 和 $\varepsilon_{2N}(\tau, \mu, \phi)$ 可确定如下:

$$\varepsilon_{1N}(\tau, \mu, \phi) = I_1(\tau, \mu, \phi) - I_{1N}(\tau, \mu, \phi), \quad (8)$$

$$\varepsilon_{2N}(\tau, \mu, \phi) = I_2(\tau, \mu, \phi) - I_{2N}(\tau, \mu, \phi). \quad (9)$$

再令

$$\varepsilon_{1N}^*(\tau, \mu, \phi) = |\varepsilon_{1N}(\tau, \mu, \phi)| / I(\tau, \mu, \phi) \%; \quad (10)$$

$$\varepsilon_{2N}^*(\tau, \mu, \phi) = |\varepsilon_{2N}(\tau, \mu, \phi)| / I(\tau, \mu, \phi) \%; \quad (11)$$

$$R_{1N}(\tau, \mu, \phi) = I_{1N}(\tau, \mu, \phi) / I_1(\tau, \mu, \phi); \quad (12)$$

$$R_{2N}(\tau, \mu, \phi) = I_{2N}(\tau, \mu, \phi) / I_2(\tau, \mu, \phi); \quad (13)$$

$$R_{PN}(\tau, \mu, \phi) = P^N(\cos \theta) / P(\cos \theta). \quad (14)$$

上述定义表明, $\varepsilon_{1N}^*(\tau, \mu, \phi)$ 和 $\varepsilon_{2N}^*(\tau, \mu, \phi)$ 分别表示在相函数 $N+1$ 项勒让德展开下由一次散射和多次散射分量的不准确确定所导致的辐射强度的相对误差; $R_{1N}(\tau, \mu, \phi)$ 和 $R_{2N}(\tau, \mu, \phi)$ 分别表示一次散射和多次散射分量与它们的精确值的比值, 此比值为 1, 误差为零。 $R_{PN}(\theta)$ 表示勒让德展开的相函数与其真值之比。

一次散射分量 $I_1(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_N^m(\tau, \mu)$ 均可由简单解析表达式求之, 在具有 τ_T 总光学厚度的地面上, 它们可分别表为:

$$I_1(\tau_T, -\mu, \phi) = \begin{cases} \frac{\tilde{\omega} \mu_0 F}{4(\mu - \mu_0)} P(-\mu, \phi, -\mu_0, \phi_0) (e^{-\tau_T/\mu} - e^{-\tau_T/\mu_0}), & \mu \neq \mu_0; \\ \frac{\tilde{\omega} \tau_T F}{4 \mu_0} P(-\mu_0, \phi_0, -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau_T/\mu_0}, & \mu = \mu_0. \end{cases}$$

$$I_{1N}^m(\tau_T, \mu) = \begin{cases} \frac{\tilde{\omega} \mu_0 F}{4(\mu - \mu_0)} \sum_{l=m}^N \tilde{C}_l^m P_l^m(-\mu) P_l^m(-\mu_0) (e^{-\tau_T/\mu} - e^{-\tau_T/\mu_0}), & \mu \neq \mu_0; \\ \frac{\tilde{\omega} \tau_T F}{4 \mu_0} \sum_{l=m}^N \tilde{C}_l^m P_l^m(-\mu_0) P_l^m(-\mu_0) e^{-\tau_T/\mu_0}, & \mu = \mu_0. \end{cases}$$

下面从图 1 至图 5 分析相函数的不准确展开所导致的计算一次散射量和多次散射量的误差。

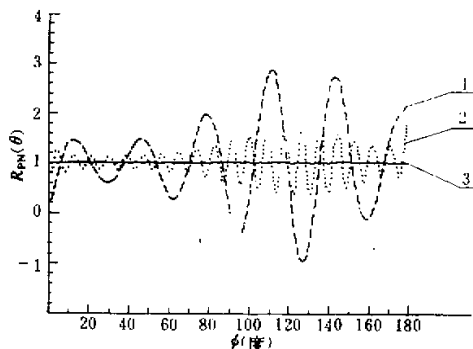


图 1 $\theta-R_{PN}(\theta)$ 曲线. $\nu^* = 2.5$ 的 Junge 谱,
 $\lambda = 0.7\mu\text{m}$, $m = 1.5 - 0.01i$,

1. $N = 10$, $R_{ms} = 86.9\%$; 2. $N = 40$, $R_{ms} = 30.4\%$;
 3. $N = 100$, $R_{ms} = 0.95\%$.

如图 1 所示,对于 $\nu^* = 2.5$ 的 Junge 谱,波长为 $0.7\mu\text{m}$, 折射率为 $m = 1.5 - 0.01i$ 的气溶胶散射相函数,当 $N = 100$ 时, $P^N(\cos\theta)$ 的均方误差 $R_{ms} = 0.95\%$, 当 $N = 10$ 时,均方误差高达 86.9% , 并出现不合理的负值,展开的相函数对于正确值的振荡是非常明显的, N 值越大,振荡频率越高,振幅越小.

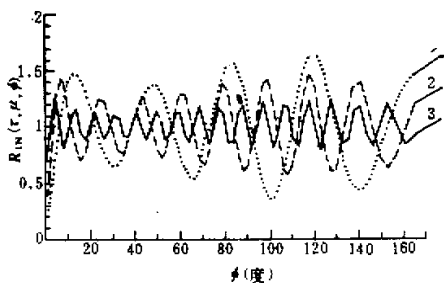


图 2 $\phi-R_{1N}(\tau, \mu, \phi)$ 曲线

1. $N = 10$, 2. $N = 20$, 3. $N = 40$.

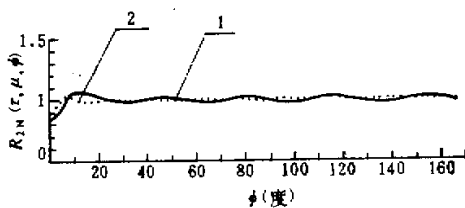
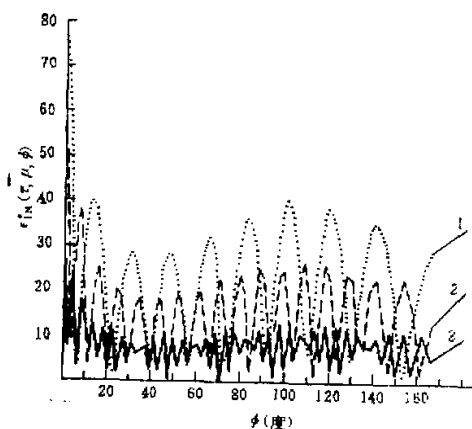
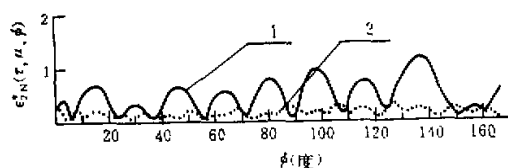


图 3 $\phi-R_{2N}(\tau, \mu, \phi)$ 曲线

1. $N = 10$, 2. $N = 20$

图 2、图 3、图 4 和图 5 分别表示在上述的气溶胶散射函数以及 $\tau_T = 0.13538$ (其中分子光学厚度为 0.03538), $\phi_0 = 0$, $\mu = \mu_0 = 0.3131$ 的情形下 $\phi-R_{1N}(\tau, \mu, \phi)$, $\phi-R_{2N}(\tau, \mu, \phi)$, $\phi-\varepsilon_{1N}^*(\tau, \mu, \phi)$ 和 $\phi-\varepsilon_{2N}^*(\tau, \mu, \phi)$ 4 类曲线. 一次散射分量直接正比于相函数, 从图 2 看, 对于 $N = 10, 20$ 和 40 三种情形, 在 $\mu = \mu_0$ 的地平纬圈内, 随着方位角的增大, 即散射角的增大, 一次散射分量对于正确值的偏差呈现明显的振荡, 且振荡特性与前面谈到的相函数 $P^N(\cos\theta)$ 的振荡完全一样, N 越小, 振荡频率越小, 振幅越大, 解的误差越大. 正如图 4 所示, 当 $N = 10$ 时, 由一次散射分量的不精确所导致的辐射强度误差可高达 78% , 即使当 $N = 40$ 时, 也会引起辐射强度具有 31% 的误差. 多次散射分量的情形就不一样了. 从图 3 看, N 值有限时, 随着方位角的增大, 多次散射分量

图 4 $\phi - e_{1N}^*(\tau, \mu, \phi)$ 曲线1. $N = 10$, 2. $N = 20$, 3. $N = 40$.图 5 $\phi - e_{2N}^*(\tau, \mu, \phi)$ 曲线1. $N = 10$, 2. $N = 20$.

对精确值的偏差也呈振荡状态,但振荡振幅较小,且对不同的 N 值,振幅的变化较小,即使 N 值很小时,多次散射分量的误差也较小。因此,正如图5所示,较小 N 值的多次散射分量的误差对辐射强度的效应是小的,当 $N = 10$ 时,由此引起的误差小于1.3%,而当 $N = 20$ 时,误差小于0.4%。根据源函数的特性,上述结果不难得到定性解释。一次散射源函数直接正比于相函数,因此,一次散射分量对于相函数的误差是很敏感的。从方程(1)看,多次散射源函数要对相函数与辐射强度之积作 4π 立体角的球面积分。由于有限 N 值的相函数展开具有如图1所示的振荡误差,由此引起的多次散射源函数的积分表达

表 1 不同 N 值下辐射通量误差, $\nu^* = 2.5$,
 $\mu_0 = 0.3131$, $\tau = 0.13538$, $\lambda = 0.7\mu\text{m}$.

N	0	1	10	20
E_r	42.30	11.96	1.20	0.62
E_T	23.72	7.12	0.32	0.07

表 2 辐射通量误差, $\mu_0 = 0.7$, $\tilde{\omega} = 1$, $g = 0.75$

τ_r	N	1	5	10	20
0.25	E_r	13.10	1.26	0.19	0.007
	E_T	1.92	0.18	0.04	0.000
1	E_r	9.58	0.34	0.01	0.002
	E_T	2.03	0.07	0.005	0.000
4	E_r	2.43	0.10	0.008	0.006
	E_T	0.03	0.01	0.003	0.000

式的误差可期望是较小的。同理,也由于向上或向下的辐射通量是对半球辐射能流的积分结果以及在有限 N 值下辐射强度解具有振荡特性,辐射通量解对于 N 值的变化较不敏

感。表 1 和表 2 展示了两个例证, 表中 E_r 和 E_T 分别表示大气上界向上的通量和地面上向下的漫射通量的百分比误差。表 1 对应于上述的气溶胶相函数的情形, 当 $N \geq 10$ 时, 向上和向下的漫射通量的误差都小于 1.2%, 即使当 $N = 1$ 时, 两者的误差也分别不超过 11.96% 和 7.12%, 但当 $N = 10$ 时, 辐射强度的最大误差可超过 80%, 当 $N = 1$ 时, 在太阳的华盖区域内, 辐射强度可偏小近一个数量级。表 2 对应于 Henyey-Greenstein 相函数的情形, 即

$$P(\theta) = (1 - g^2)/(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}, \quad g = 0.75.$$

正确的通量值采用 Liou 的结果, 它具有大约 5 位小数的精度^[4]。如表所示, 对于 $\tilde{\omega} = 1$ 和 $\mu_0 = 0.7$ 情形, 当 $N \geq 5$ 时, 辐射通量的误差不超过 1.26%, 光学厚度越大, 误差越小, 当光学厚度为 4 时, 即使 $N = 1$ 时 (Eddington 近似情形), 向上和向下的漫射通量的误差分别不超过 2.43% 和 0.03%。但如后面还要谈到的, 对于 $g = 0.75$ 的云相函数情形, 当 N 值较小时, 辐射强度的误差是很大的。

上述两个例子表明, 在很小 N 值的相函数展开下, 辐射通量解就具有很高的精度, 特别是对光学厚度较大的情形, 这也是许多简单的辐射通量模式广为采用的原因。

三、一个改进的算法

如上所述, 当 N 值较小时, 辐射强度解的误差主要来自一次散射分量的不准确上。因此, 本文建议采用正确的相函数以修正一次散射分量, 从而得到了比较精确的辐射强度解, 记为 $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 。于是有

$$I_N^*(\tau, \mu, \phi) = I_N(\tau, \mu, \phi) - I_{1N}(\tau, \mu, \phi) + I_1(\tau, \mu, \phi). \quad (15)$$

(15) 式中, $I_1(\tau, \mu, \phi)$ 即方程 (1) 的正确的一次散射分量, 可用正确的相函数由简单的一次散射公式求之。表 3 和表 4 比较了 $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 的精度。

表 3 表示 $\nu^* = 2.5$ 的 Junge 谱的情形。表中, E_N^* 和 E_N 分别表示在地面上向下的辐射强度解 $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 的最大百分比误差。取 $N = 100$ 的解作为精确解, 它与 Weinman 在同样条件下所计算的精确结果在 $\phi = 0-50^\circ$ 的地平纬圈内相差小于 1%。如表所示, 当 $N \leq 40$ 时, E_N 比 E_N^* 偏大 50 倍以上。当 $N \geq 10$ 时, $E_N^* \leq 1.4$, $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 解具有很高的精度, 但当 $N = 10$ 时, $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 解的最大误差可达 218.5%, 即使当 $N = 40$ 时, $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 解的最大误差可达 30.6%。图 6 表示 $N = 5$ 时, $\mu = \mu_0$ 的地平纬圈内辐射强度曲线 $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 。如图所示, 在 $\phi \approx 0^\circ$ 的华盖区域内, $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 可比正确值偏小半个数量级左右, 在 0° 至 180° 的地平纬圈内, $I_N(\tau, \mu_0, \phi)$ 对于正确值的偏差呈明显的振荡特性。但在 $\phi = 0^\circ - 180^\circ$ 内, $I_N^*(\tau, \mu_0, \phi)$

表 3 $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 的精度比较, $\nu^* = 2.5$, $\mu = \mu_0 = 0.423$,
 $\tau_a = 0.5$, $\tau_m = 0.145$, $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, $m = 1.55 - 0i$

N	5	10	15	20	40	80
E_N^*	6.1	1.4	0.81	0.97	0.42	0.33
E_N	545.6	218.5	68.4	57.6	30.6	1.45

解具有较高的精度,最大误差小于4.5%.

表4就 $g = 0.75$ 的 Henyey-Greestein 相函数情形比较了 $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_N(\tau, \mu, \phi)$

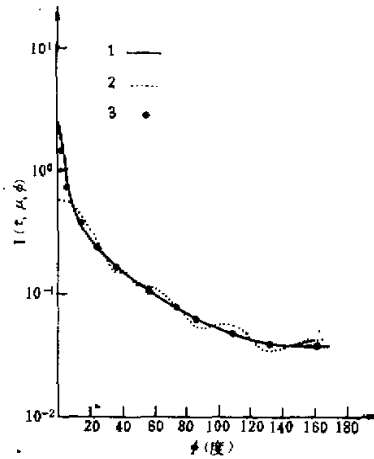


图6 地平纬圈内辐射强度, $\nu^* = 2.5$, $\tau_s = 0.5$, $\tau_m = 0.145$,

$\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, $\mu = \mu_0 = 0.423$, $m = 1.55 - 0i$.

1. $I_N(\tau, \mu_0, \phi)$, $N = 100$, 2. $I_N(\tau, \mu_0, \phi)$, $N = 5$,

3. $I_N^*(\tau, \mu_0, \phi)$, $N = 5$.

解的精度.如表所示,光学厚度越大, $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 解的精度越差,这是由于光学厚度较小时,辐射强度更加取决于一次散射分量,后者的不准确导致较大的辐射强度误差.对于 $\tau_T = 1$,当 $N = 20$ 时,辐射强度的最大误差可达11.3%,但当 $N \geq 10$ 时, $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 解的误差已小于2%,且与 $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 解的情形相反,光学厚度越大, $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 解的精度一般越差.

表4 $I_N^*(\tau, \mu, \phi)$ 和 $I_N(\tau, \mu, \phi)$ 的精度比较, $\mu_0 = 0.6869$, $\bar{\omega} = 1$, $g = 0.75$

τ_T	N	5	10	20	30
0.25	E_N^*	5.42	1.08	0.65	0.23
	E_N	84.8	79.5	31.8	1.54
1	E_N^*	7.50	1.91	0.74	0.44
	E_N	61.1	35.8	11.3	1.01

四、结 语

当 N 值有限,相函数的勒让德展开具有较大误差时,辐射强度解的误差主要来自一次散射分量的不准确上,当云或气溶胶光学厚度较大时,由于多次散射的主导地位,可允许较小 N 值的相函数展开.本文采用正确的相函数以订正一次散射分量,允许较小的勒让德

展开项数, 在较小 N 值下得到了比较精确的辐射强度解。对于小于 1 的光学厚度以及 2% 的精度要求, N 值可在 5 至 15 范围内选取, 相函数的不对称因子越大, N 值应取大些, 对于气溶胶情形, $N \geq 10$ 一般都是可行的, 采用本文建议的算法, μ 方程的个数以及相应的计算时间可减少 5 倍左右。对于中等云光学厚度的情形, 由于云的相函数的高度不对称, 较小 N 值的相函数展开具有很大的误差, 可高达 1 个数量级以上, 采用我们建议的改进算法对于减少 N 值, 提高求解精度也是行之有效的。

参 考 文 献

- [1] Iring W. M., 1975, *Icarus*, **25**, 175—201.
- [2] Wiscobe W., 1983, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **21**, 997—1021.
- [3] Dave J., 1975, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 790—800.
- [4] Liou K., *An Introduction to Atmospheric Radiation*, Academic Press, 1980.
- [5] Box M. A. and Deepak A., 1979, *Appl. Opt.*, **18**, 1376—1382.
- [6] Wiscobe W., 1977, *J. Atmos. Sci.*, **34**, 1408—1422.
- [7] Paltridge G. W. et al., *Radiative Processes in Meteorology and Climatology*, Academic Press, 1977.
- [8] Herman B. M. and Browning S. R., 1965, *J. Atmos. Sci.*, **22**, 559—566.
- [9] Weinman, J. A. and Twitty J. T., 1975, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 577—583.

AN IMPROVED ALGORITHM FOR SOLVING RADIATIVE TRANSFER EQUATION

Qiu Jinhuan

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, the effect of Legendre expansion of scattering phase function with a finite number of terms on solving radiative transfer equation is studied and an improved algorithm suggested.

Both theoretical analysis and numerical experiments have shown that the multiple-scattering component of radiance and radiative flux are not much more sensitive to the expansion error of phase function than the single-scattering component, and through correcting the single-scattering component by the exact phase function, an accurate radiance solution can be obtained under Legendre expansion of phase function with less terms, thus the computing time can be down by a factor of about 5 for the optical depth less than unity.