第10卷 第3期　　大 气 科 学　　Vol. 10, No. 3
1986 年 9 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　Sept., 1986

短论

大地形对切变基流上罗斯贝波稳定性的影响

吕克利
(南京大学大气科学系)

提　　要

利用WKB近似讨论大地形对切变基流上 Rossby 波稳定性的影响。北半球东西走向地形有利导式长波槽辐合能量于地形北坡附近，对曳式长波槽有使能量从地形南坡区域辐散的趋势。南半球地形的影响正好相反。散度项有利于导式长波槽在东西风带过渡区域的能量辐射，有利于曳式长波槽能量在这里辐合。

一、基本方程

当考虑地形时，可用如下准地转正压涡度方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi+\beta y-\frac{f^2}{C_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{gf}{C_0^2}(h,\psi)\right)=0 \tag{1}$$

式中 ψ 是流函数，$C_0^2=gH$，f，β 取为常数，$h=h(x,y)$ 为地形高度。

令 $\psi=\bar{\Phi}+\psi'$，并定义基流 $\bar{u}=-\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}$，如此得线性涡度方程为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi'+\beta_0\frac{\partial\psi'}{\partial x}-s^2\frac{\partial\psi'}{\partial t}=0 \tag{2}$$

式中

$$\beta_0=\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{gf}{C_0^2}\frac{dh}{dy},\ s^2=\frac{f^2}{C_0^2},\ h=h(y).$$

应用 WKB 近似，设波动振幅、频率和波数为时间空间的缓变函数，引入缓变量 X，Y，T：

$$x=X/\varepsilon\quad y=Y/\varepsilon\quad t=T/\varepsilon \tag{3}$$

式中 $\varepsilon\ll 1$，是度量变量时空变化快慢程度的小参数。

令

$$\psi'=\Psi(X,Y,T)e^{i\varphi} \tag{4}$$

φ 是位相，与频率 ω，纬向波数 m，经向波数 n 的关系式为：

$$\omega=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\quad m=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad n=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{5}$$

1984 年 4 月 23 日收到，1985 年 1 月 7 日收到再改稿。

(4)式代入(2)式，利用(5)式，得：

$$\left[\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial T}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)-i(\omega-\bar{u}m)\right]\left[\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}\right)\right.$$
$$\left.+2i\varepsilon\left(m\frac{\partial\Psi}{\partial X}+n\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\right)+i\varepsilon\left(\frac{\partial m}{\partial X}+\frac{\partial n}{\partial Y}\right)\Psi-(m^2+n^2)\Psi\right]$$
$$+\beta_0\left(\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial X}+im\Psi\right)-s^2\left(\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial T}-i\omega\Psi\right)=0 \tag{6}$$

Ψ 用 ε 展开，即设

$$\Psi=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\Psi_j \tag{7}$$

代入(6)式，对零级近似有

$$\omega=\bar{u}m-\frac{(\beta_0+s^2\bar{u})}{m^2+n^2+s^2}m=\Omega(m,n,X,Y,T) \tag{8}$$

对一级近似，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)[(m^2+n^2+s^2)\Psi_0]+\frac{\bar{\beta}m}{m^2+n^2+s^2}\left[2\left(m\frac{\partial\Psi_0}{\partial X}\right.\right.$$
$$\left.\left.+n\frac{\partial\Psi_0}{\partial T}\right)+\left(\frac{\partial m}{\partial X}+\frac{\partial n}{\partial Y}\right)\Psi_0\right]-\bar{\beta}\frac{\partial\Psi_0}{\partial X}=0 \tag{9}$$

式中 $\bar{\beta}=\beta_0+s^2\bar{u}$。

二、波作用密度守恒

定义

$$E=(m^2+n^2+s^2)\Psi_0^2/2 \tag{10}$$

表示能量，Ψ_0 乘(9)式，利用(8)式得：

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}E)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}E)$$
$$=-\frac{\bar{\beta}E}{m^2+n^2+s^2}\left[\frac{2m}{\bar{\beta}}\left(\frac{\partial m}{\partial T}+C_{gx}\frac{\partial m}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial m}{\partial Y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2n}{\bar{\beta}}\left(\frac{\partial n}{\partial T}+C_{gx}\frac{\partial n}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial n}{\partial Y}\right)\right]+\frac{2mnE}{(m^2+n^2+\zeta^2)^2}\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial Y} \tag{11}$$

式中

$$\begin{cases} C_{gx}=\bar{u}-\dfrac{\bar{\beta}}{m^2+n^2+s^2}+\dfrac{2m^2\bar{\beta}}{(m^2+n^2+s^2)^2} \\ C_{gy}=\dfrac{2mn\bar{\beta}}{(m^2+n^2+s^2)^2} \end{cases} \tag{12}$$

分别为纬向和经向群速分量。

由(8)式及频率、波数之间的运动学关系式[1,2]，即得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m}{\partial T}+C_{gx}\dfrac{\partial m}{\partial X}+C_{gy}\dfrac{\partial m}{\partial Y}=-\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial X}\right)_{m,n,Y,T}=0\\ \dfrac{\partial n}{\partial T}+C_{gx}\dfrac{\partial n}{\partial X}+C_{gy}\dfrac{\partial n}{\partial Y}=-\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)_{m,n,X,T}=-m\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial Y}-\dfrac{1}{m^2+n^2+s^2}\dfrac{\partial \bar{\beta}}{\partial Y}\right)\end{cases}\tag{13}$$

代入(11)式，得能量方程：

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}E)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}E)=\Psi_0^2 mn\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}\tag{14}$$

由此可见，对正压大气，只要基流 $\bar{u}$ 的空间分布是均匀的(不管是否定常)，(10)式定义的能量是守恒的，就是说，均匀基流与 Rossby 波之间没有能量交换；当基流不均匀时，它们之间就有能量交换。基流空间分布的不均匀性是正压 Rossby 波发展的能量源或汇。具有南北坡的地形和散度项对正压 Rossby 波的能量变化没有关系，它们可能只是正压 Rossby 波的激发机制。

在固定区域 σ 内对(14)式积分，在边界扰动为零的情况下，有

$$\frac{\partial}{\partial T}\iint_\sigma E\,d\sigma=\iint_\sigma \Psi_0^2 mn\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}d\sigma\tag{15}$$

按照陈英仪、巢纪平[4]，$m>0$，对 $n>0$(即导式波槽)，西风急流轴南侧，波动从基流得到能量，系统发展，西风急流轴北侧，波动向基流输送能量，系统减弱，即西风急流轴南侧是导式波槽发展区。对 $n<0$(即曳式波槽)，西风急流轴南侧，波动向基流输送能量，系统减弱，急流轴北侧，波动从基流获得能量，系统发展，即西风急流轴北侧是曳式波槽的发展地区。

对存在基流的情形，波作用密度 I 可定为波包能量除以相对于基流的频率[3]：$I=E/(\omega-\bar{u}m)$，考虑到 s^2 为常数，$\bar{\beta}$ 与 X 无关，由(11)式除以 m，利用(13)式和(8)式，经过一些运算得到波作用密度方程：

$$\frac{\partial I}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}I)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}I)=-\frac{I}{\bar{\beta}}\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial T}\tag{16}$$

不难发现，当基流定常时，有

$$\frac{\partial I}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}I)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}I)=0\tag{17}$$

即波作用密度守恒。

对(16)式在所考虑区域 σ 内积分，设边界上扰动为零，则

$$\iint_\sigma \frac{1}{\bar{\beta}}\frac{\partial}{\partial T}(\bar{\beta}I)d\sigma=0\tag{18}$$

利用 E 的定义式，I 可写为 $I=-\dfrac{(m^2+n^2+s^2)^2}{m\bar{\beta}}\dfrac{\Psi_0^2}{2}$，代入(18)式，得：

$$\iint_\sigma \frac{\bar{\beta}}{(c-\bar{u})^2(m^2+n^2+s^2)^2}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{(m^2+n^2+s^2)^2}{m}\frac{\Psi_0^2}{2}\right]d\sigma=0\tag{19}$$

可见，对波振幅和波长随时间变化的扰动，由(19)式可得到扰动不稳定的必要条件是 $\bar{\beta}$ 在区域中至少在某一 y 上为零，即

$$\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{fg}{C_0^2}\frac{dh}{dy}+\frac{f^2}{C_0^2}\bar{u}=0\quad(y=y_k)\tag{20}$$

由上式可见，对均匀西风基流，当没有地形存在时，叠加基流上的扰动是稳定的，对均匀东风基流，扰动仍然是稳定的，但散度项 $s^2\bar{u}$ 的加入，增加西风基流上扰动的稳定性，减小东风基流上扰动的稳定性．地形北坡（北半球）有利于西风基流上扰动的不稳定，南坡则相反．

三、能量的径向传播

由 (12)式，群速的南北分量为

$$C_{gy}=\frac{2mn}{(m^2+n^2+s^2)^2}\left(\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{gf}{C_0^2}\frac{dh}{dy}+s^2\bar{u}\right)$$

因纬向波数 $m>0$，一般 $\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}>0$，若没有地形，不考虑散度项，对 $n>0$（导式槽）有 $C_{gy}>0$，有能量向北输送，对 $n<0$（曳式槽）有 $C_{gy}<0$，有能量向南输送，这是文献[4]的工作．

当不考虑基流的切变、地形及散度项时，则 $C_{gy}=2mn\beta(m^2+n^2)^2$，可见，对固定的 m、n，群速在南北方向没有变化，即能量是匀速地向北（导波）或向南（曳波）传播的，当有地形存在时，对导波，在北半球，地形南坡区域由地形造成的群速增量

$$\Delta C_{gy}=2mn\frac{gf}{C_0^2}\frac{dh}{dy}\Big/(m^2+n^2)^2>0,$$

即地形加速导波向北的能量输送；在北坡区域，地形引起的群速增量

$$\Delta C_{gy}=-2mn\frac{gf}{C_0^2}\left|\frac{dh}{dy}\right|\Big/(m^2+n^2)^2<0,$$

即地形减慢导波向北的能量输送，甚至造成导波向南输送能量$\left(\text{如果地形坡度足够大，使 }\beta+\frac{gf}{C_0^2}\frac{dh}{dy}<0\text{ 的话}\right)$，可见，对导式长波，南北坡度地形的存在，有利于能量在地形北坡地区的辐合．对曳式波槽，在地形北坡地区，地形造成的群速增量为 $\Delta C_{gy}=2mn\frac{gf}{C_0^2}\cdot\frac{dh}{dy}\Big/(m^2+n^2)^2>0$，减慢曳波向南输送能量，甚至造成能量的向北输送，在地形的南坡区域，地形造成的群速增量为 $\Delta C_{gy}=2mn\frac{gf}{C_0^2}\frac{dh}{dy}\Big/(m^2+n^2)^2<0$，加速曳波向南输送能量，可见，对曳式长波槽，南北坡度地形的存在，有利于能量在地形南坡地区辐散．对南半球，地形的作用正好相反．对导式波槽，南北坡度地形有利于地形地区的能量辐散，对曳式波槽，则有利于能量辐合．

散度项（$s^2\bar{u}$ 项）对 Rossby 波的能量南北传播也有重要影响．为讨论简便，考虑无地形的均匀基流，这时群速的南北分量为

$$C_{gy}=2mn(\beta+s^2\bar{u})/(m^2+n^2+s^2)^2$$

可见，散度项的加入，使东西风带过渡区域的群速不同．对导波，西风带区域西风基流加

速能量的向北输送，东风带区域东风基流减慢向北的能量输送，因此，在东西风带的过渡区域，有南北向的能量辐散；对曳波，西风带区域西风基流加速能量的向南输送，东风带区域东风基流减慢能量的向南输送，因此，在东西风带的过渡区域，将出现能量辐合。

参考文献

[1] Bretherton, F. P., 1971, Mathematical Problems in the geophysical Sciences, 61—102.
[2] 曾庆存，1979，数值预报的数学物理基础，科学出版社.
[3] Whitham, G. B., 1974, Linear and Nonlinear Wave.
[4] 陈英仪、巢纪平，1983，螺旋 Rossby 波的波作用守恒和稳定性，中国科学，7，663—672.

THE INFLUENCES OF LARGE OROGRAPHY ON INSTABILIYT OF ROSSBY WAVES IN SHEAR CURRENTS

Lü Keli

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Abstract

The influences of orography on the instability of Rossby waves in shear flows are discussed by WKB approximation. The results show that in the Northern Hemisphere the orography with west-east direction slope is advantageous to the convergence of energy of long wave with northwest-southeast direction trough line, and is advantageous to the divergence of energy of long-wave with northeast-southwest direction trough line. In the Southern Hemisphere, the contrary is the case, i.e. the long-wave with northwest-southeast direction trough line is advantageous to the divergence of the energy in the transitional area between the easterlies and westerlies, and is advantageous to the convergence of the energy in the transitional area when the lowg-wave trough line is in northeast-southwest.