

再论不等距差分格式的计算紊乱问题

李荣凤

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

不等距差分格式中存在的计算紊乱问题在文章[1]中已有较好的研究,那里比较了三种构造不等距差分格式的方法,给出了“超高频”条件的表达式,并指明:当出现“超高频”条件时,波不能穿透“界面”,由细网格一侧传到粗网格一侧,而在细网格一侧产生完全的伪反射。但该文没有分析所有可能的情况,本文再用物理分析和数值试验的方法对该文未曾分析的情况进行了详细研究,主要结果有:1.在特殊情况下,即在频率等于临界值时,理论和数值试验结果都表明,不仅在细网格一侧有伪反射,而且在粗网格一侧还有放大的透射波。2.当区域中布多种网格时,不同波长的波在通过不同“界面”时,出现了各种不同的反射、透射等变化^[1]。3.采用逐渐过渡的网格能部分地消除伪反射和“超高频”条件,证实了文章[1]的见解。

一、引 言

求解偏微分方程时,常在求解区域的不同部位采用不同的网格,以节省时间而又可保证精度。在空气动力学中,在靠近实体的表面布较密的网格,以便更好地计算出边界层效应。在海洋流体力学计算中,在靠近海岸处往往加密网格,这一方面能较好地拟合不规则边界,另外计算的岸边流也会更准确些。在气象上,现代数值预报工作中更是经常采用大小网格相配套的方法。这些都涉及到用不等距网格进行计算的问题,其优点是显而易见的,它可以提高所关心部位的计算精度,同时又能大大节省计算量,节省内存。但是使用不等距网格时,差分格式具有沿空间为不均匀的属性,波在不同的网格中传速不同,从而在两种网格的交界面产生伪反射和伪折射现象,若处理不好,常会引起计算紊乱和计算不稳定。所以,不等距网格中计算紊乱的机理,以及克服紊乱的方法,无疑是应该进行研究的重要课题。本文用一种简单模式对该问题进行了一些研究,方法与文章[1]相同,但该文没有对所有情况都进行研究,本文则对该文未曾研究的情况进行了研究,从而得到更全面的结果。同时文章[1]中还建议了一些克服紊乱的方法,本文也将利用这些方法进行分析 and 数值试验,得到完全肯定的结果。

1986年10月27日收到。

二、模 式

我们仍取文章[1]中所使用的一维波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mu^2 \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

其中 μ^2 是个常数,在界面 x_0 两边布两套网格,在 $x < x_0$, 取网格距为 δs_- ;在 $x > x_0$, 取 δs_+ . 用下式逼近方程(1):

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{2\delta s_{\pm}} (\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \\ \frac{d\phi_j}{dt} = -\frac{\mu^2}{2\delta s_{\pm}} (u_{j+1} - u_{j-1}) \end{cases} \quad (j \geq 1 \text{ 或 } j \leq -1) \quad (2)$$

δs_+ 和 δs_- 为两个常数,在 x_0 点的方程由坐标变换法(或用加权平均法)得到:

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = -\frac{1}{2\delta s} (\alpha_+ \phi_1 + \alpha \phi_0 + \alpha_- \phi_{-1}) \\ \frac{d\phi_0}{dt} = -\frac{\mu^2}{2\delta s} (\alpha_+ u_1 + \alpha u_0 + \alpha_- u_{-1}) \end{cases} \quad (3)$$

δs 为另一个常数(当然,我们可以取 $\delta s = \delta s_-$, 或 $\delta s = \delta s_+$), 其中用坐标变换法时有:

$$\alpha_+ = -\alpha_- = \beta_0, \quad \alpha = 0$$

并可取 $\beta_0 = 2\delta s / (\delta s_+ + \delta s_-)$. 对加权平均法则有:

$$\alpha_+ = 2(1 - \alpha_0)\beta_+, \quad \alpha_- = -2\alpha_0\beta_-, \quad \alpha = 2[\alpha_0\beta_-(1 - \alpha_0)\beta_+]$$

其中 $\beta_+ = \delta s / \delta s_+$, $\beta_- = \delta s / \delta s_-$, α_0 为加权因子,可由经验选定,也可通过某些理论方法来原因。例如,当函数在 x_0 附近用抛物线逼近时,则 $\alpha_0 = \beta_- / (\beta_- + \beta_+)$.

今设自 $x \rightarrow -\infty$ 有一入射简谐波,其波数为 m , 频率为 σ , 则偏微分方程给出解答为:

$$\begin{cases} u = A e^{i(m x - \sigma t)} \\ \phi = \mu A e^{i(m x - \sigma t)} \end{cases} \quad (4)$$

但由差分-微分方程(2)和(3)给出的近似解为:

$$\begin{cases} u_j = [A_{\pm} e^{ij\theta_{\pm}} + B_{\pm} e^{-ij\theta_{\pm}} + C_{\pm}(-1)^j e^{ij\theta_{\pm}} + D_{\pm}(-1)^j e^{-ij\theta_{\pm}}] e^{-i\sigma t} \\ \phi_j = \mu [A_{\pm} e^{ij\theta_{\pm}} - B_{\pm} e^{ij\theta_{\pm}} - C_{\pm}(-1)^j e^{ij\theta_{\pm}} + D_{\pm}(-1)^j e^{-ij\theta_{\pm}}] e^{-i\sigma t} \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\theta_{\pm}$ 满足关系式

$$\theta_{\pm} = \sin^{-1} \left(\frac{\sigma \delta s}{\mu \beta_{\pm}} \right) \quad (6)$$

σ 就是给定的频率,很明显,带系数 $C_{\pm}$ 和 $D_{\pm}$ 的项为伪波(计算波)。

在文章[1]中已指出:

$$\left| \frac{\sigma \delta s}{\mu \beta_+} \right| > 1 \quad (7)$$

为“超高频”条件,此时会出现严重的伪反射现象。显然,

$$\left| \frac{\sigma \delta s}{\mu \beta_+} \right| = 1 \quad (8)$$

为临界条件。这在文章[1]中没有讨论到。

若入射波的频率满足(8)式,在 $x < x_0$ 区域,解仍为(5)式(相应于 θ_- 的部分);但在 $x > x_0$, 解退化为更简单的形式,不难推出,它是:

$$\begin{cases} u_j = [(i)^j A_+ + (-i)^j D_+] e^{-i\sigma t} \\ \phi_j = \mu [(i)^j A_+ + (-i)^j D_+] e^{-i\sigma t} \end{cases} \quad (9)$$

其中 $i \equiv \sqrt{-1}$, j 为格点序号。不妨取 $\mu = A_+ = D_+ = 1$, 则振幅与格点的关系如表 1。

表 1 振幅随格点的变化

格 点	1	2	3	4	5	6	7	8
振 幅	0	-2	0	2	0	-2	0	2

可以看到,解为四倍格距振幅放大的波。

三、几种不等距网格下的数值积分结果

仍采用文章[1]中所用的差分格式、边值和初值条件。取 $\delta s = \delta s_- = 0.1$; δs_+ 分别取 $\frac{6}{2\pi} \delta s$, $\frac{10}{2\pi} \delta s$ 和 $\frac{14}{2\pi} \delta s$ 。图 1 为初始入射波。

1. $\delta s_- < \delta s_+$ 的情况

我们取 $\delta s = \delta s_- = 0.1$ (为 $x < x_0$ 一侧的网格距); 在 $x > x_0$, 对三种频率的波 ($L = 6\delta s$, $L = 10\delta s$, $L = 14\delta s$), 分别取 δs_+ 为 $\frac{6}{2\pi} \delta s$, $\frac{10}{2\pi} \delta s$ 和 $\frac{14}{2\pi} \delta s$, 这样三种波在界面 x_0 点恰好都处于临界状况。

图 2A 给出 $L = 6\delta s$, $\delta s_+ = \frac{6}{2\pi} \delta s$ 的情况, 其中 $T = 400\delta t$, 初始入射波为图 1A。因为 $\delta s_+ = \frac{6}{2\pi} \delta s \approx 0.095 < 0.1$, 所以这种波是从较稀网格传到较密网格, 两种网格比较相近, 可以看到波通过界面传得很好, 在入射波区域, 波形有轻微改变, 说明在界面 x_0 点有较弱的伪反射。

图 2B 给出 $L = 10\delta s$, $\delta s_+ = \frac{10}{2\pi} \delta s$ 的情况, 其中 $T = 400\delta t$ 。图 2C 给出 $L = 14\delta s$, $\delta s_+ = \frac{14}{2\pi} \delta s$ 的情况, 其中 $T = 400\delta t$ 。和它们相对应的初始状态分别为图 1 中的 B 和 C。这两种波是从等密网格传入等稀网格。积分 400 步后, 波在密网格一侧变形严重, 此时不仅有伪反射, 还有放大(这种放大, 是由伪反射与入射波相干涉所致); 而在粗网格一侧则

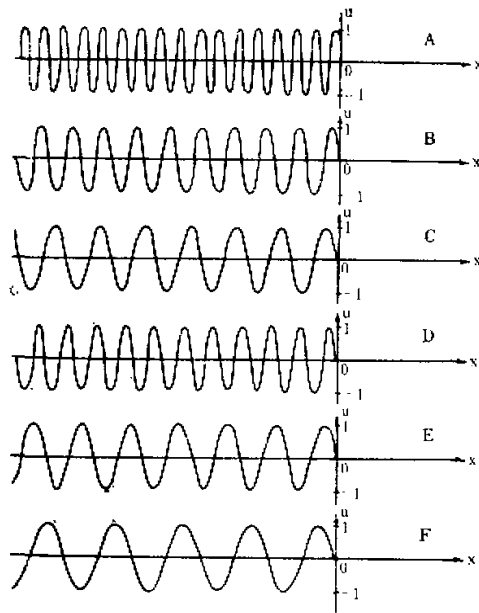


图 1 几种初始入射波

$$T=0, \delta s = \delta s_- = 0.1, \delta s_+ = \frac{10}{2\pi} \delta s, A: L = 6\delta s_-, B: L = 10\delta s_-, C: L = 14\delta s_-, \\ D: L = 6\delta s_+, E: L = 10\delta s_+, F: L = 14\delta s_+.$$

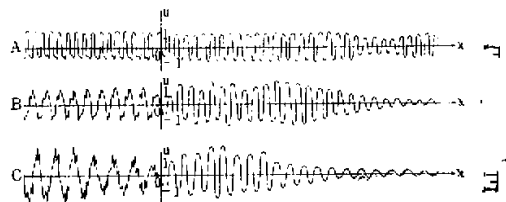


图 2 三种波在不同网格中的传播

都出现增幅的四倍格距的透射波,和理论分析完全一致。

2. 波由稀网格传到密网格再传到稀网格情况

把区域分成 I. II. III 三部分,布设三套网格,其中在 II 区域中总是取 $\delta s = \delta s_- = 0.1$ (密网格),在 I 和 III 区域总是取 $\delta s_+ = \frac{10}{2\pi} \delta s$ (稀网格),这样一来,就有两个界面。(竖坐标和竖虚线),我们仍可以采用坐标变换和加权平均两种方法写出差分格式,而且总是在 I 区(粗网格)给定入射波,如图 1D、E、F 所示。

图 3A 表示 $L = 6\delta s_+$ 和 $T = 400\delta t$ 的波形。可见,在粗网格 I 区,波形放大变形

严重;在密网格 II 区,用坐标变换法时,波有些变形,而用加权平均法时,波没有多大变化;在区域 III,两种计算方法都使波动传播得很好。说明对这种波,在两个界面都有伪反射,但在第一个界面比在第二个界面伪反射严重,另外,可以看到用加权平均法比用坐标变换法好些。

图 3B 为 $L = 10\delta s_+$ 和 $T = 400\delta t$ 的情况。在 I 和 II 区,都有波动变形,说明在两个界面都存在伪反射;在 III 区波幅放大严重,这是因为在右边界,格式的取法虽然消除了伪反射,但存在着波的反射(其波长与入射波相同)。

图 3C 为 $L = 14\delta s_+$ 和 $T = 400\delta t$ 的情况,对这种波,在两个界面伪反射都不明显,但波长却有变化。当时间步长一样时,由于波在粗网格比在细网格传得慢,所以,当波由粗网格通过第一个界面传到细网格时,波被稍微拉长;在第二个界面,波由细网格传到

粗网格又被稍微压缩了。至于在 III 区波幅比原来小,可能是由于在右边界产生的反射波与入射波相干涉而造成的结果。

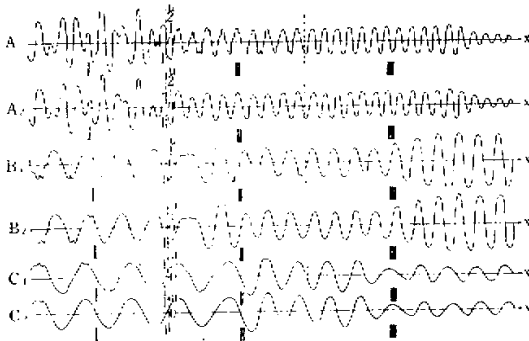


图 3 波从粗网格传到密网格再传到粗网格情况

注:每种情况,上图采用坐标变换法,下图采用加权平均法

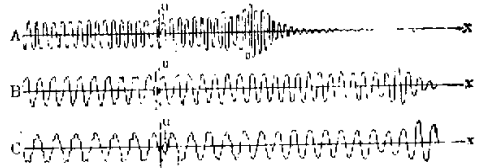


图 4 网格逐渐变化时的情况

3. 网格逐渐变化的情况

在 $x < x_0$, 取 $\delta s = \delta s_- = 0.1$, 在 $x > x_0$, 取 $\delta s_+ = \delta s_- + \lambda K$, K 为格点序号, λ 为一个较小的正数。这种情况下,在 $x < x_0$ 为等距网格,在 $x > x_0$ 为逐渐增大的网格。也就是说,从 x_0 点开始,在右边是一个近似于不均匀的但连续的介质。三种初始入射波分别如图 1A、B、C 所示。

图 4A 为 $L = 6\delta s$, $T = 300\delta t$ 的情况,对这种波在离 x_0 第 75 点上,达到临界条件,可以看到,在达到临界条件以前,波形没有多大变化,但在达到临界条件附近波被放大,之后迅速衰减。

图 4B 为 $L = 10\delta s$ 和 $T = 300\delta t$ 的情况;图 4C 为 $L = 14\delta s$ 和 $T = 300\delta t$ 的情况。对这两种波,在整个传播区域都不会出现“超高频”和“临界”条件。可以看到,虽然存在着伪反射,但是,伪反射的程度随着网格的逐渐过渡而削弱。

四、结 束 语

从以上的分析表明,在不等距网格的计算中,波长大于 6 倍格距的波,对于一种网格,

如在界面恰好为临界状况 ($\sigma\delta s/\mu\beta_+ = 1$), 则入射波从细网格进入粗网格时, 不仅在细网格有伪反射和放大, 而且波能通过界面传过去, 只是变成振幅放大了的四倍格距的透射波, 这种放大的波也能引起计算紊乱和计算不稳定。因此, 在设计计算格式和布设不等距网格时, 不仅要避免形成“超高频”条件, 而且也要避免“临界”条件的出现。

此外, 若布设多种网格, 当采用同一时间步长, 由于波在不同的网格中传播的速度不同, 即使不出现“超高频”和“临界”条件, 波在通过不同界面时, 也可能存在伪反射现象, 而且还会出现被压缩和被拉长的变化。所有这些都提醒我们, 在进行不等距差分计算时, 不仅对网格的布设和差分格式的构造要注意, 而且对计算结果的解释也要很小心。

另外, 从(7)和(8)式可看到, “超高频”或“临界”条件是频率和变网格的函数, 就是说, 当网格取定时, 只能是某一频率范围内的波达到或接近“超高频”(或“临界”)条件。因此, 我们最好针对我们所关心的波来确定网格布设, 或者说, 想法取合适的格距 δs_- 、 δs_+ 和格点数, 使得所关心的 σ 范围内的波不仅不会出现“超高频”, 而且可使得二倍格距的寄生波的振幅尽可能地小。这样可以使得求解的问题和预报场继续保持原来的物理性质。

从图3的计算结果又一次看到, 构造不等距网格差分格式时, 加权平均法要比坐标变换法好些。还有, 采用网格距逐渐变化总是比较好的。

致谢: 孙燕斌同志帮助计算和绘图。王婉文同志帮助绘图。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存、李荣凤, 1982, 不等距差分格式的计算紊乱问题, 大气科学, Vol. 6, No. 4.
- [2] Arne Sundström and Torbjörn Elvius, 1979, Computational Problems Related to limited-area modeling. NUMERICAL METHODS USED IN ATMOSPHERIC MODELS, Vol. 11, GARP PUBLICATIONS SERIES NO. 17.

REVIEW ON COMPUTATIONAL CHAOS IN NON-UNIFORM GRIDS

Li Rongfeng

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

The problems of computational chaos in non-uniform grids have been discussed by Zeng and Li (1982). They compared the three scheme methods for the design of non-uniform grid differencing and derived a formula for “the ultra-high-frequency condition” (i.e. the frequency of incident wave exceeds a critical value). The analyses show that as the incident wave transfers from fine grids to coarse grids, and full false reflection occurs in the fine grids if “the ultra-high-frequency condition” is satisfied. However, they did not analyse all possible cases. In this paper, those cases have been investigated by using a physical analytic method and some numerical experiments. We have concluded that: 1. When the frequency of incident wave exactly equals the critical value, either theoretical analyses or experiments show that in addition to false reflection in the fine grids, there is an amplified penetrating wave on the side of coarse grids; 2. In an area with variable grids, when waves with difference wavelength pass through certain “interfaces” between two set of grids, different reflecting and penetrating may occur; 3. False reflection and “the ultra-high-frequency condition” can be partly removed by using gradually varying grids. The suggestions proposed by Zeng et al. (1982) have thus been verified.