

波和湍流的相互作用*

刘式达 潘乃先 陈家宜

(北京大学地球物理系)

郑祖光

(北京气象学院)

提 要

利用 Burger's 和巢纪平提出的湍流发生模型计算了不同 R_α 数和 R_β 数情况下系统的状态,可能的形态有:无扰动的基本场、重力内波、湍流。找到了这三种状态相互转换的临界 R_α 和 R_β 数值。指出 $R_\beta < \frac{1}{4}$ 是出现湍流状态的必要条件。在 $R_\beta > \frac{1}{4}$ 时, $R_\alpha = 2\pi^2$ 处是发生 Hopf 分岔出现重力内波(周期解)的条件。波和湍流的能量来自基本速度场和基本温度场,一旦波和湍流形成后又影响基本场。若初始的 R_β 在 $\frac{1}{4}$ 附近(稍大于 $\frac{1}{4}$),重力内波形成后最终可能使 R_β 数反小于 $\frac{1}{4}$,进入湍流状态,这就是湍流和内波在大气中间歇发生的原因。

所计算出的相轨线和 Liapunov 特征指数验证了各种状态的确实性。

一、引 言

波、平均场和湍流三者的相互作用是大气运动的基本要素。平均流场和平均温度场为波和湍流提供能量,而波和湍流反过来又影响平均流场和温度场。同时重力内波和湍流之间的相互作用是夜间边界层内和边界层外对流层内常见的现象,并可用它解释大气和海洋中的一些观测事实,如温跃层、强湍流的窄层、大气湍流的间歇性和不均匀性。

FuA 和 chimonas^[1] 曾用较复杂的模型讨论了波和湍流的相互作用,但并未从理论上分析出波和湍流发生的条件。巢纪平^[2]推广 Burger's^[3]的一个湍流发生模型,只讨论了一种对流状态,并未讨论周期态和各种状态的时间演化。

本文以 Burger's 和巢纪平的模型为基础,讨论了波、平均场和湍流三者相互转化的判据,从分岔理论分析出波和湍流分界的临界曲线,丰富了线性的 Miles 定理^[4]所得不出结果。很多结果相当好地符合观察事实。

1986年1月11日收到,8月25日收到修改稿

* 国家自然科学基金资助项目

二、基本方程

1948年 Burger's 提出了一个湍流模型^[1], 1962年巢纪平^[2]将其推广到包括温度场来研究对流和环境的相互作用。他们用的基本方程为:

$$\begin{cases} H \frac{dU}{dt} = P - \frac{\nu U}{H} - \frac{1}{H} \int_0^H w^2 dz & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{U}{H} w + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \beta \theta & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H \frac{dT}{dt} = Q - \frac{\nu T}{H} - \frac{1}{H} \int_0^H w \theta dz & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \left(\frac{T}{H} - \gamma_s \right) w + \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} & (4) \end{cases}$$

其中 $U(t)$ 、 $T(t)$ 代表对高度平均过的平均水平速度和平均温度, $w(z, t)$ 和 $\theta(z, t)$ 代表扰动的垂直速度和温度, P 和 Q 是用于维持初始平均运动 U_0 和平均温度 T_0 所需的气压梯度力和热量, 含有粘性系数 ν 的项代表耗散, 系统 (1)–(4) 是非线性动力系统, (2) 和 (4) 式右端第一项代表平均场对扰动场的作用, (1) 和 (3) 式的右端第三项代表扰动场对平均场的作用, $\beta \theta$ 代表浮力项, $w \frac{\partial w}{\partial z}$ 和 $w \frac{\partial \theta}{\partial z}$ 代表平流项, $\beta = \frac{g}{\bar{T}}$ ($\bar{T}$ 为平均温度, 取为常数), γ_s 为绝热递减率, H 为垂直厚度。

巢纪平在讨论时忽略了平流项, 若保留温度平流项 $w \frac{\partial \theta}{\partial z}$, 令

$$w = w_m(t) \sin \frac{\pi z}{H} \quad \theta = \theta_m(t) \sin \frac{\pi z}{H} - \theta_n(t) \sin \frac{2\pi z}{H} \quad (5)$$

将 (5) 式代入 (1) (2) (3) (4) 式并无因次化, 得到:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 \\ \dot{x}_2 = (R_c x_1 - \pi^2) x_2 + x_4 \\ \dot{x}_3 = 1 - x_3 - \frac{a}{2} x_2 x_4 \\ \dot{x}_4 = c \left(x_3 - \frac{\gamma_s}{\gamma_0} \right) x_2 - \pi^2 x_4 - \pi x_2 x_5 \\ \dot{x}_5 = -4\pi^2 x_3 + \frac{\pi}{2} R_c x_2 x_4 \end{cases} \quad (6)$$

其中符号 $\cdot$ 代表对时间 τ 的微商, $x_1 = \frac{U}{U_0}$, $x_3 = \frac{T}{T_0}$ ($U_0 = \frac{PH}{\nu}$, $T_0 = \frac{QH}{\nu}$), $x_2 =$

$$\frac{w_m}{\sqrt{P}}, x_4 = \frac{\theta_m}{\nu \sqrt{P}}, x_5 = \frac{\theta_n}{\nu^2}, \tau = \frac{\nu}{H^2} t, a = \frac{\nu P}{H^2 \beta Q}, c = \frac{\gamma_0 R_c R_c^*}{\gamma_s - \gamma_0}, \gamma_0 = \frac{T_0}{H}.$$

(6)式中的控制参数

$$R_e = \frac{v_0 H}{\nu} \quad R_i = - \frac{g H^2 (\gamma_0 - \gamma_s)}{\bar{T} v_0^2} \quad (7)$$

为初始的 Reynold 数和 Richardson 数,且 $ac = R_e$.

应该指出,(6)式中若取 $x_3 = 0$,则前四式就是 Burger's-巢纪平模型;若取 $x_2 = 0$,则是著名的 Lorenz 模型^[4].所以说(6)式是比较全面的平均场(x_1 和 x_3)与扰动场(x_2 , x_4 和 x_5)相互作用的简易模型.

对(6)式求向量场 $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 的散度得:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{v} &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} + \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_5} \\ &= -2 - 6\pi^2 + R_e x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

对(8)式求时间平均:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \text{div} \vec{v} dt = \frac{1}{t} \int_0^t (-2 - 6\pi^2 + R_e x_1) dt \quad (9)$$

若(9)式小于零,则系统(6)从整体上讲就是耗散系统^[5].

本文只讨论 $x_3 = 0$ 情况,至于 $x_3 \neq 0$ 情况我们将在另文中讨论.

三、定性分析

方程组(6)有两个平衡态 O 和 T :

$$O: x_1 = x_3 = 1, \quad x_2 = x_4 = 0 \quad \text{即}(1, 0, 1, 0) \quad (10)$$

T :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{R_e} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4R_i} \\ x_2^2 = 1 - \frac{2\pi^2}{R_e} + \sqrt{1 - 4R_i} \\ x_3 = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} + \frac{a\pi^2}{2} (-1 + \sqrt{1 - 4R_i}) \\ x_4^2 = \frac{1}{4} R_e (-1 + \sqrt{1 - 4R_i})^2 \left(1 + \sqrt{1 - 4R_i} - \frac{2\pi^2}{R_e} \right) \end{cases} \quad (11)$$

平衡态 O 代表基本平均场(1, 0, 1, 0),即无扰动的状态.平衡态 T 从表面上看是常定的两个态 c_1 和 c_2 (因为 x_2 和 x_4 有两个值),但若加上合适的阻尼(因为(1)(2)(3)(4)式中 Prandtl 数 $P_r = 1$,据 Lorenz^[4]分析应无混沌)即可出现在 c_1 和 c_2 间来回跳动的混沌(chaos)即湍流状态^[13],所以 T 应叫做湍流态.

由(11)式看出,要出现 T 状态的必要条件是

$$R_i < \frac{1}{4} \quad (12)$$

这和 Miles 定理^[6]以及观测事实相一致.所以我们认为模型(6)是基本正确的湍流模型.

下面分析平衡态 O 的稳定性. O 点的稳定性由(6)式的 Jacobi 矩阵^[8]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_e - \pi^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -R_i R_e^2 & 0 & -\pi^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

的特征值决定. 矩阵(13)的特征值为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_{3,4} &= \frac{(R_e - 2\pi^2) \pm R_e \sqrt{1 - 4R_i}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

我们分几种情况进行讨论:

(1) 当 $R_i > \frac{1}{4}$ 时, 则 $\lambda_{3,4}$ 为共轭复根.

而且当 $R_e < 2\pi^2$ 时, 其实部为负, 平衡态 O 稳定. $R_e > 2\pi^2$ 时, 则其实部为正, 平衡态 O 失去稳定性.

在 $R_e = 2\pi^2$ 处发生 Hopf 分岔^[9], 会出现周期解 P , 这个周期解就代表重力内波.

(2) 当 $R_i < \frac{1}{4}$ 时, 则 $\lambda_{3,4}$ 为实根. 而

且

a) 当 $R_e > 2\pi^2$ 时, $\lambda_{3,4}$ 中至少有一根为正, 故平衡态 O 失去稳定性, 此时平衡态 T 存在.

b) 当 $R_e < 2\pi^2$ 时, 若 $R_i > \frac{\pi^2}{R_e^2}(R_e - \pi^2)$, $\lambda_{3,4}$ 为两负根, O 点稳定; 若 $R_i < \frac{\pi^2}{R_e^2}$.

($R_e - \pi^2$), $\lambda_{3,4}$ 为一正一负, O 点不稳定.

我们以 R_e 数和 R_i 数作为参数, 三种状态 O 、 T 和 P 的区域以及 λ 值如图 1.

显然, 当 $R_e < 2\pi^2$, 在 $R_i = \frac{\pi^2}{R_e^2}(R_e - \pi^2)$ 处(图 1 曲线, 它总小于 $\frac{1}{4}$) 发生叉型分岔^[8]. 从图 1 看出:

(1) 白天, 边界层以内, 温度层结使 $R_i < \frac{\pi^2}{R_e^2}(R_e - \pi^2)$, 此时平均场 O 和湍流场 T 相互作用——尤其在 $R_i = \frac{\pi^2}{R_e^2}(R_e - \pi^2)$ 附近. 当 R_i 数甚小甚至为负值时, 主要为湍流场 T .

(2) 白天, 边界层以外, 温度层结使 $R_i > \frac{\pi^2}{R_e^2}(R_e - \pi^2)$, 平均场 O , 湍流场 T 和内波 P 三者相互作用.

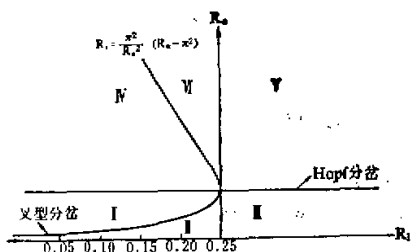


图 1 参数平面 (R_i, R_e) 上运动形态的分类

(I) 区 $\lambda_3 < 0, \lambda_4 > 0$, O 点失稳, T 点稳定; (II) 区 $\lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$, O 点稳定, T 点不存在; (III) 区 $\lambda_{3,4}$ 共轭, 实部为负, O 点稳定, T 点不存在; (IV) 区 $\lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$, O 点失稳, T 点稳定; (V) 区 $\lambda_{3,4}$ 共轭, 实部为正, O 点失稳, T 点不存在, P 点稳定; (VI) 区 $\lambda_3 < 0, \lambda_4 > 0$, O 点失稳. (II)(III) 区为 O 态, (IV) 区是 T 态, (V) 区是 P 态存在.

(3) 晚上, 边界层内 $R_i > \frac{\pi^2}{R_e}(R_e - \pi^2)$, 且 $R_e > 2\pi^2$, 造成内波 P 和湍流场 T 相互作用, 出现湍流的间歇性^[9,10].

这三点结论和 Chimonas 等人^[11]的分析一致.

四、相空间轨线和 LE 指数

对方程组 (6) 给定初条件 $x_{10} = 1, x_{20}, x_{30} = 1, x_{40}$, 以后对不同的 R_e 数和 R_i 数值, 用 Runge-Kutta 法进行时间积分. 长时间积分后即可得到相空间的轨线. 图 2 是 O 、 P 、 T 三态典型的轨线在 (x_2, x_4) 平面上的投影. 计算结果和图 1 中的定性分析很一致.

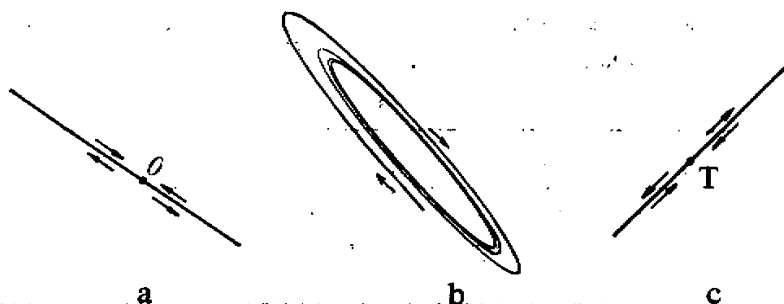


图 2 O 、 P 、 T 三态典型轨线

- (a) $R_e = 18, R_i = 0.249, (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$
 (b) $R_e = 20, R_i = 0.261, (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow$ 周期态
 (c) $R_e = 15, R_i = -0.726, (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (0, 121, 1.283, 0.752, 9.386)$

为了定量说明这些状态的确实性, 我们又计算了相应的 Liapunov 特征指数 $LE^{[11,12]}$. 计算表明对稳定的平衡态 O 或 T , 其相应的特征指数谱是

$$(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4) = (-, -, -, -)$$

对周期解 P , 其相应的特征指数谱是

$$(LE_1, LE_2, LE_3, LE_4) = (0, -, -, -)$$

例如图 1 (I) (II) (IV) (V) 区域中的状态, 其 Liapunov 特征指数如表 1.

表 1 Liapunov 特征指数

区域	R_e	R_i	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	状态
(I)	15	-0.726	-0.49	-0.51	-1.80	-16.40	T
(II)	18	0.249	-0.43	-0.85	-1.00	-1.46	O
(IV)	20	0.245	-0.44	-0.50	-1.12	-1.23	T
(V)	20	0.261	0	-0.13	-0.80	-0.94	P

五、内波强度和周期的演变

在周期 P 的区域内,分析了内波的周期和强度,发现:

(1) 当 R_e 固定时,随 R_i 数加大,扰动周期变短.例如 $R_e = 20$ 时,不同 R_i 数时内波周期如表 2.

表 2

R_i	0.251	0.261	0.343	0.408	0.817	1.633	≥ 6.125
周期(秒)	4500	2950	1000	800	420	250	平衡态 ^①

(2) 而当 R_i 数固定时,随 R_e 加大,内波周期变短,且振幅加大.例如 $R_i = 0.261$ 时,不同 R_e 数时内波周期和振幅的变化如表 3.

表 3

R_e	25.0	33.3	40.0	50.0	66.7
周期(秒)	2000	1333	1100	1000	833
振幅/初始振幅	0.95	1.30	1.45	1.56	1.65

夜间边界层内,从声雷达的记录上看,常有大振幅的波动出现,这可能就是 R_e 增大、粘性减小时发生的现象.

六、湍流可以在稳定层结中发生

大家知道,白天大气层结不稳定, $R_i < 0$, 可以产生湍流.例如 $R_e = 15$ 时, $R_i = -0.726$, 湍流发展的强度为 $x_2 = 1.28$, $x_4 = 9.38$; 而 $R_i = -2.359$ 时强度增强为 $x_2 = 1.71$, $x_4 = 28.56$.

湍流的能量取自平均动能和平均内能.例如 $R_e = 15$, $R_i = -0.726$ 时,终态 T 为 $v = 0.17v_0$, $\frac{\gamma}{\gamma_0} = 0.75$ (即温度递减率由 $1.8\text{K}/100$ 米变到 $1.35\text{K}/100$ 米).

而当层结稳定时,只要 $R_i < \frac{1}{4}$, 湍流仍可以发生,从而使平均动能减小,平均内能增加.例如 $R_e = 20$, $R_i = 0.245$ 时,湍流出现后使 $v = 0.92v_0$, $\gamma = 1.004\gamma_0$ (即 $\frac{T}{H} = 1.004 \frac{T_0}{H}$).这一点和巢纪平^[2]的分析一致,不过巢纪平把状态 T 看成对流,实际上应理解为湍流, Burger's^[3] 就叫它为 Turbulencl.

七、内波-湍流相互作用

在 $R_i = \frac{1}{4}$ 附近时,内波和湍流可以间歇性地出现。例如 $R_e = 20$, $R_i = 0.254$ (稍大于 0.25), 这时内波从平均场中取得能量而形成强度为 10^{-2} 量级的速度场, 但到 $R_i = 0.245$ 时, 内波就消失, 形成强度为 0.39 的湍流速度场。

而且当层结稳定时, 内波形成后平均内能增加 $\gamma > \gamma_0$, 因而 $\gamma - \gamma_s > \gamma_0 - \gamma_s$, 即

$$-(\gamma - \gamma_s) < -(\gamma_0 - \gamma_s) \quad (15)$$

或

$$(R_i)_n < (R_i)_0 \quad (16)$$

这就是说, 重力内波形成后使 R_i 数减小。若最初 $(R_i)_0$ 在 $\frac{1}{4}$ 附近且稍大于 $\frac{1}{4}$, 则最终

可能使 $(R_i)_n < \frac{1}{4}$, 而达到湍流状态。例如初始 $R_i = 0.2548$, $\gamma_0 = 0.9688K/100$ 米,

只要终态 $\gamma > 1.000607\gamma_0$, 则 $(R_i)_n$ 就会小于 $\frac{1}{4}$ 。

我们认为这正是夜间边界层内湍流-内波相互作用而产生间歇性的原因。

八、初始条件不同进入不同湍流状态

由于本模型的湍流状态解 x_1^* 、 x_4^* 中, x_2 和 x_4 各有两种解状态 (即不同的吸引域)。当初始条件不同时, 系统状态可以进入不同的吸引域。例如 $R_e = 20$, $R_i = 0.245$ 时, 若初始值取为 $(1, 0.3, 1, 0.2)$ 时, 解趋向于 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.92, -0.38, 1.00, 3.28)$ 。而当初值取为 $(1, 0.1, 1, 0.1)$ 时, 解就趋向于另一吸引域 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.92, 0.38, 1.00, -3.28)$ 。这种情况正是湍流的非线性作用和敏感初条件的一种反应^[8]。

参 考 文 献

- [1] Fua, D., Chimonas, C., 1982, *J. Atmos. Sci.*, **39**, p. 2451—2463.
- [2] 巢纪平, 1962, *气象学报*, **32**, p. 11—18.
- [3] Burger's, J. M., 1948, *Adv. Appl. Mech.*, **1**, p. 171—201.
- [4] Lorenz, E. M., 1963, *J. Atmos. Sci.*, **20**, p. 134—141.
- [5] Arnold, V. I., 1978, *Mathematical Method of Classical Mechanics*, Section 16, Springer.
- [6] 易家川, 1983, 分层流, 流体力学和应用数学讲座 (1), 科学出版社.
- [7] Van Zandt, 1978, *Radio Sci.*, **13**, p. 819—829.
- [8] Guckenheimer, J., Holmes, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. Springer.
- [9] Frish, U., 1978, *J. of Fluid Mech.*, **87**, p. 719—736.
- [10] 邵庆秋、陈家宜、刘式达, 1987, 大气湍流的间歇性, *大气科学*, Vol. 11, No. 3.
- [11] Shimada, I., 1976, *Progress of Theoretical Physics*, **61**, p. 1605—1616.
- [12] Haken, H., 1984, *Advanced Synergetics*, Springer.
- [13] 刘式达, 1986, *中国科学 (B)*, 5 期, p. 542.