

数值积分水滴碰并、破碎方程 的一种精确的快速计算方法

曾西平 章澄昌

(南京气象学院)

提 要

本文改进了数值积分随机碰并方程的 Bleck 方法, 当变量更换函数采用 $g'(m) = Am^N + B/m^M$ 的形式时, 适当选取 M, N 值可使数值积分水滴碰并方程的精确度大为提高, 达到了 Berry 方法的水平, 甚至在某些方面超过了它, 在计算速度上也令人满意. 文中对各种计算方法进行了仔细的比较和检验.

一、引 言

为了了解对流云中云滴转化为雨滴的微物理过程的作用, 详细地研究云中粒子群(包括水滴、冰晶等)的演变是很重要的, 但是, 数值求解粒子群谱演变的随机碰并方程极其花费时间, 怎样提高随机碰并方程的计算精度和计算速度对详细微物理云模式, 以及研究碰并增长对成云致雨的作用是很有必要的. 为此, 许多学者在这方面进行了长期不懈的努力. Berry^[1]提出的数值求解水滴碰并方程的方法, 为定量分析云水转化为雨水做了开创性的工作, 1974年, Berry 和 Reinhardt^[2]对此方法进行了改进, 采用六点対数 Lagrange 插值公式, 使得该方法的精度大为提高(该方法以下简称 Berry 方法), 成为目前研究水滴碰并方程的重要方法之一; Bleck^[3]从另一个角度出发, 提出了数值求解水滴碰并方程的有限元方法, 不少学者对该方法进行了改进^[4-6]. List 和 Gillespie^[7]将该方法成功地推广到由碰撞引起破碎的方程中, 它是目前研究水滴碰撞破碎的重要方法. Berry 方法和 Bleck 方法相比, 各有所长, 正如 Almeida 等^[8]指出的那样, Berry 方法侧重于计算精度, 而 Bleck 方法则着眼于计算速度. 水滴碰并方程的求解还有其它几种方法, Ochs 和 Yao^[9]分析了 Egan 和 Mahoney 提出的方法, 将它推广到随机碰并方程中, 并就其精度把它同 Kovetz 和 Olund 的方法进行了比较. 随着计算机能力的提高, 用 Monte-Carlo 方法研究水滴碰并的试验越来越多^[10], 该方法不仅能描述云滴之间的碰并、破碎作用, 还能描述云滴并合数的扰动, 然而, Monte-Carlo 方法要耗费大量的计算机机时, 因此, 它往往局限于其它方法不能奏效的场合.

在实际应用中, 大量使用的仍然是 Bleck 方法和 Berry 方法. Berry 方法精度比较高, 但计算速度比 Bleck 方法慢得多, 不仅如此, 在考虑水滴破碎过程之后, 它的精度

高的优点受到了威胁。List 等人的实验^[11, 12]表明, 在水滴破碎过程中, 破碎的几率分布有时变化很大, 存在窄的尖峰及间断点, 对于 Bleck 方法, 若采用 Brown^[13]介绍的计算技术, 就可以克服因几率分布变化很大而造成的问题, 而 Berry 方法无法处理这种情况。因此, 如果能提高目前 Bleck 方法的计算精度, 那么, 对研究粒子群谱的演变以及详细微物理云模式是很有意义的。Enukashvily 在这方面进行了努力^[6], 他将滴谱用正交多项式展开, 通过计算其系数来研究滴谱的变化, 虽然改进的结果使得精度有所提高, 但该方法占用的空间比较大, 也比较耗费机时, 不能充分体现 Bleck 方法快速计算的优点。

本文通过改进 Bleck 方法, 在计算量增加不大的情况下, 使其计算精度达到了 Berry 方法的水平, 成为一种精度比较高、速度比较快的计算方法。

二、方程的形式

在暖云中, 云滴碰并增长是云水转化为雨水的重要途径之一, 云滴之间的碰撞必然导致并合、弹开、或破碎, 描述这些水滴群谱演变的方程为^[1, 14]

$$\frac{dn_{(m,t)}}{dt} = C_{(m,t)} + B_{(m,t)} \quad (1)$$

式中 m 表示水滴质量, $n_{(m,t)}$ 表示水滴数密度, 等式右边的第一项 $C_{(m,t)}$ 表示并合引起的质量在 m 处水滴数密度的净增加率, 其表示式为

$$\begin{aligned} C_{(m,t)} = & \int_0^{m/2} n(u) n_{(m-u)} f_{(u,m-u)} E_{2(u,m-u)} du \\ & - \int_0^{\infty} n_{(m)} n_{(u)} f_{(u,m)} E_{2(u,m)} du \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $E_{2(u,m)}$, $E_{1(u,m)}$ 为质量分别是 u, m 两水滴相碰的并合系数、碰撞效率, $f_{(u,m)} = \pi(r_u + r_m)^2 E_{1(u,m)} |V_T(u) - V_T(m)|$, 其中 r_u, r_m 分别对应质量为 u, m 两水滴的半径, V_T 为下降末速, 碰并函数 $K_{(u,m)} = f_{(u,m)} E_{2(u,m)}$ 。在 (1) 式中, $B_{(m,t)}$ 表示由于破碎引起的质量在 m 处水滴数密度的净增加率, 若用 $P_{(m;u,v)} dm$ 表示质量分别为 u, v 两水滴碰撞破碎产生的, 在 m 到 $m + d_m$ 之间得到水滴的几率, 有^[14]

$$\begin{aligned} B_{(m,t)} = & \int_0^{\infty} \int_0^u n_{(u)} n_{(v)} f_{(u,v)} P_{(m;u,v)} d_v d_u \\ & - \int_0^{\infty} \frac{1}{m+v} \int_0^{m+v} u n_{(m)} n_{(v)} f_{(m,v)} P_{(u;m,v)} d_u d_v \end{aligned} \quad (3)$$

如果给定云滴的初始谱分布, 依据 (1), (2), (3) 式就可以研究滴谱的演变. 为了讨论的方便, 本文暂不考虑出现破碎的情况, 并假设 $E_{2(u, m)} = 1$, 从而 (1) 式可简化为

$$\frac{dn_{(m,t)}}{dt} = \int_0^{m/2} n_{(u)} n_{(m-u)} K_{(u, m-u)} du - \int_0^m n_{(m)} n_{(u)} K_{(u, m)} du \quad (4)$$

为了对滴谱随时间的演变进行数值分析, 显然必须将连续谱离散化, 为此我们采用 Berry^[1] 提出的离散化处理方法

$$m_k = m_1 2^{(k-1)/b} \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (5)$$

式中 m_k 表示离散点上水滴质量, b 应为整数, 本文取 $b = 1$.

三、碰并方程的计算方法

Bleck 方法假定质量在 m_k 到 m_{k+1} 间的水滴数密度为常数, 但是, 在滴谱的离散化过程中, 随着 m_k 的增大, Δm (即 $m_{k+1} - m_k$) 将越来越大, 因而此假设所引起的误差也将越来越大, 这样的处理显然是不适宜的. 若将变量进行更换^[3], 那么

$$n_{(m)} dm = n(g_{(m)}) dg_{(m)}$$

即

$$n_{(m)} = n(g_{(m)}) g'_{(m)} \quad (6)$$

再假定 $n(g_{(m)})$ 在 $[m_k, m_{k+1})$ 间为一常数, 似乎较前一种更为合理, 但是, 由于人们并不知道 $n_{(m,t)}$ 的形式究竟如何, 为此只有选择不同形式的 $g'_{(m)}$ 进行尝试. Bleck 对 $g'_{(m)}$ 分别取 m^0, m^{-1}, m^{-3} 三种情况进行了比较, 发现取 $g'_{(m)} = m^{-3}$ 的结果似乎更好一些, 而且, 值得注意的是 $n_{(m,t)} = n(g_{(m)}) m^{-3}$ 与 Golovin 渐近解 $n_{(m,t)} \sim m^{-3/2}$ 较前面二种情况更为接近; Soong^[5] 提出令 $g'_{(m)} = a_k m^{-1} \exp(b_k m)$, 不过, Soong 所取的近似包含在 Golovin 分析解中, 对于实际的碰并函数, 这些取法未必合适. 事实也表明, 对于实际的碰并函数值, 用 Bleck 方法计算得出的结果误差也不小^[6].

很明显, 要使 (6) 式中 $n(g_{(m)})$ 在 $[m_k, m_{k+1})$ 间为一常数, 进行变量更换的 $g'_{(m)}$ 必须选择得与时间 t 有关, 但是, 不同时刻谱的形状不一样, 简单地选用定常的 $g'_{(m)}$, 必然引起较大的误差, 若将 $g'_{(m)}$ 同 $n_{(m,t)}$ (简记为 $n_{(m)}$) 联系起来, 不失为一种有效的尝试方法. 考虑如下的变换¹⁾

$$g'_{(m)} = A m^N + B/m^M \quad (7)$$

选择系数 A, B , 使得 $n(g_{(m)})$ 在有限元区域内尽可能为一常数. 若在离散点上满足下式:

1) 若水滴数密度 $n_{(m)}$ 在 $[m_k, m_{k+1})$ 间与 m 成线性关系, 那么, (7) 式中的参数取 $\begin{cases} M=0 \\ N=1 \end{cases}$.

$$n(g_{(m)}) = \begin{cases} n(m_k) & m_k \leq m < m_{k+1} \\ 0 & m < m_1 \text{ 或 } m > m_N \end{cases}$$

那么

$$g'_{(m)} = \frac{1}{2^{M+N}-1} \left\{ \left[2^{M+N} \left(\frac{m_k}{m} \right)^M - \left(\frac{m}{m_k} \right)^N \right] + 2^M \left[\left(\frac{m}{m_k} \right)^N - \left(\frac{m_k}{m} \right)^M \right] \frac{n(m_{k+1})}{n(m_k)} \right\} \quad (m_k \leq m < m_{k+1})$$

可以证明, $g'_{(m)}$ 增加或减少若干倍, 对其后的推导和计算过程均无影响, 因此, 取

$$g'_{(m)} = a_{k(m)} + b_{k(m)} \tilde{n}_{k(t)} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{k(m)} &= 2^{M+N} \left(\frac{m_k}{m} \right)^M - \left(\frac{m}{m_k} \right)^N \\ b_{k(m)} &= 2^M \cdot \left[\left(\frac{m}{m_k} \right)^N - \left(\frac{m_k}{m} \right)^M \right] \\ \tilde{n}_{k(t)} &= \frac{n(m_{k+1})}{n(m_k)} \end{aligned}$$

在 (4) 式两边乘以 m , 积分得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{m_k}^{m_{k+1}} n(g_{(m)}) m g'_{(m)} dm \\ &= \int_{m_k}^{m_{k+1}} m dm \int_0^{m/2} n(g_{(u)}) n(g_{(m-u)}) g'_{(u)} g'_{(m-u)} K_{(u, m-u)} du \\ & \quad - \int_{m_k}^{m_{k+1}} m dm \int_0^{\infty} n(g_{(m)}) n(g_{(u)}) g'_{(m)} g'_{(u)} K_{(m, u)} du \end{aligned} \quad (9)$$

记

$$\hat{n}_{k(t)} = \frac{\int_{m_k}^{m_{k+1}} n(g_{(m)}) g'_{(m)} m dm}{\int_{m_k}^{m_{k+1}} g'_{(m)} m dm} = \frac{\hat{m}_{k(t)}}{\int_{m_k}^{m_{k+1}} g'_{(m)} m dm} \quad (10)$$

若有限元区域内 $n(g_{lm})$ 的值用 $\hat{n}_{k(i)}$ 代替, 则 (9) 式变为

$$\frac{d\hat{m}_{k(u)}}{dt} = \sum_{i,j=0}^k a_{ijk} n_i n_j - \sum_{i=0}^N b_{ik} \hat{n}_i n_k \quad (11)$$

式中

$$a_{ijk} = \int_{A_{ijk}} g_{(u)} g_{(m-u)} K_{(u,m-u)} m dm du \quad (12a)$$

$$b_{ik} = \int_{B_{ik}} g_{(u)} g_{(m)} K_{(u,m)} m dm du \quad (12b)$$

$$A_{ijk} = \left\{ (m, u) \left| \begin{array}{l} \max(m_k, m_j + u, 2u) \\ \leq m \leq \min(m_{k+1}, m_{j+1} + u) \\ m_i \leq u \leq m_{i+1} \end{array} \right. \right\}$$

$$B_{ik} = \left\{ (m, u) \left| \begin{array}{l} m_k \leq m \leq m_{k+1} \\ m_i \leq u \leq m_{i+1} \end{array} \right. \right\}$$

将 (8) 式代入 (12) 式, 得

$$\begin{aligned} a_{ijk} &= \int_{A_{ijk}} a_{i(u)} a_{j(m-u)} K_{(u,m-u)} m dm du \\ &+ \tilde{n}_i \int_{A_{ijk}} b_{i(u)} a_{j(m-u)} K_{(u,m-u)} m dm du \\ &+ \tilde{n}_j \int_{A_{ijk}} a_{i(u)} b_{j(m-u)} K_{(u,m-u)} m dm du \\ &+ \tilde{n}_i \tilde{n}_j \int_{A_{ijk}} b_{i(u)} b_{j(m-u)} K_{(u,m-u)} m dm du \\ b_{ik} &= \int_{B_{ik}} a_{i(u)} a_{k(m)} K_{(u,m)} m dm du \\ &+ \tilde{n}_i \int_{B_{ik}} b_{i(u)} a_{k(m)} K_{(u,m)} m dm du \\ &+ \tilde{n}_k \int_{B_{ik}} a_{i(u)} b_{k(m)} K_{(u,m)} m dm du \\ &+ \tilde{n}_i \tilde{n}_k \int_{B_{ik}} b_{i(u)} b_{k(m)} K_{(u,m)} m dm du \end{aligned}$$

分别将上两式记为

$$a_{ijk} = a_{ijk}^{(1)} + \tilde{n}_i a_{ijk}^{(2)} + \tilde{n}_j a_{ijk}^{(3)} + \tilde{n}_i \tilde{n}_j a_{ijk}^{(4)} \quad (13a)$$

$$b_{ik} = b_{ik}^{(1)} + \tilde{n}_i b_{ik}^{(2)} + \tilde{n}_k b_{ik}^{(3)} + \tilde{n}_i \tilde{n}_k b_{ik}^{(4)} \quad (13b)$$

其中 $a_{ijk}^{(l)}, b_{ik}^{(l)}$ ($l=1, 2, 3, 4$) 可由 Simpson 求积公式得到, Bleck 方法具有含水量守恒的性质, 因此, 在 (13) 式中的系数之间存在某种约束关系^[4], 不难证明

$$a_{ik(k+1)}^{(1)} = b_{ik}^{(1)} + b_{ki}^{(1)} - a_{ikk}^{(1)}$$

$$a_{ik(k+1)}^{(2)} = b_{ik}^{(2)} + b_{ki}^{(2)} - a_{ikk}^{(2)}$$

$$a_{ik(k+1)}^{(3)} = b_{ik}^{(3)} + b_{ki}^{(3)} - a_{ikk}^{(3)}$$

$$a_{ik(k+1)}^{(4)} = b_{ik}^{(4)} + b_{ki}^{(4)} - a_{ikk}^{(4)}$$

$$a_{kk(k+1)}^{(l)} = b_{kk}^{(l)} \quad l=1, 2, 3, 4$$

联立 (10)、(11)、(13) 式, 即可求解滴谱随时间的演变。

四、计算方法的检验

1. 与分析解的比较

对于不同的碰并函数, 不同的初始谱分布, 滴谱随时间的演变不大一样。许多理论工作者研究了一些特殊的碰并函数、初始谱分布, 找到了滴谱演变的分析解^[15], 从而为数值求解碰并方程的计算方法提供了一种检测手段。

本文中的初始谱分布采用 Scott^[15], Berry 等^[2] 采用的 Γ 分布:

$$n_{(m)} = \frac{L}{m_f^2} \frac{(\gamma+1)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma+1)} s^\gamma \exp[-(\gamma+1)s] \quad (14)$$

其中 L 为液水含量, $s=m/m_f$, m_f 为 $n_{(m)}$ 的平均质量, 离散方差为 $(\gamma+1)^{-1}$, 这里取 $L=1\text{g}/\text{m}^3$, $\gamma=0$, $m_1=1\times 10^{-11}\text{g}$, r_f (与 m_f 相对应的半径) $=10\mu\text{m}$, 时间步长 $\Delta t=5\text{s}$ 。

首先讨论碰并函数为常数时这一最简单的碰并方程数值解的情况。取碰并函数 $K=1.8\times 10^{-4}\text{s}^{-1}$, 发现参数分别取 $\begin{cases} M=0 \\ N=4 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 时, 计算得出的结果与分析解相当一致, 其中, 相应于 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 的谱分布曲线几乎完全与分析解重合 (图略)。对于其它

M, N 的组合值, 结果也不错, 这里不一一赘述。

当大水滴的半径大于 $50\mu\text{m}$ 时, 碰并函数近似地与相碰两水滴的质量和成正比^[16], 因而设 $K(u, v)=c(u+v)$ 。图 1 列举了 $c=1.5\times 10^3$ 时, 演变 30 min 和 60 min 后的滴谱, 并将它与 Golovin 渐近解进行了比较, 图中还列举了 $g_{(m)}=1$ 时的结果。从图中不

难发现, 当 M, N 分别取 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} M=0 \\ N=4 \end{cases}$ 时计算出的结果与分析解很接近。图 1 中

所用的计算步长 $\Delta t=5\text{s}$ 。对 $M=0, N=1, 2, 3, 5, 6$ 以及 $M=1, N=2, 4, 5$ 等情况下的

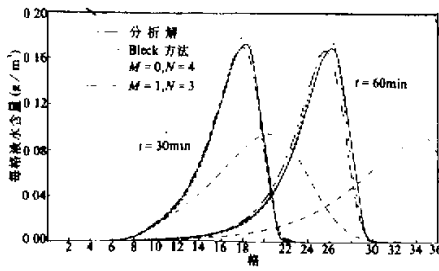


图1 碰并函数 $K=1.5 \times 10^3(u+v)$ 时演变
30 min 和 60 min 后的滴谱分布

并、破碎过程中,总含水量是守恒的,因而 Berry 等^[2]认为总含水量的计算误差可看作衡量计算精度的一个重要指标。本文在使用 Berry 方法的过程中,为了使得计算结果更为精确,每计算 1 min,都对含水量进行一次订正。但是,也要注意,总含水量误差只是一个指标,即使它不变化(如 Bleck 方法就是含水量守恒格式),也不能说明计算结果无误差。为了对比 Bleck 方法和 Berry 方法,对于 Golovin 碰并函数,二种方法计算出的结果都画在图 2 中,其中 $L=1\text{g/m}^3$, $r_f=10\mu\text{m}$, $\gamma=0$, 时间步长 $\Delta t=1\text{s}$ 。用 Berry 方法计算出的 30 min 后的结果与分析解相当吻合,在整个计算过程中,总含水量误差每分钟不超过 1.0%。

用 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 计算出的结果也画在图 2 中,从中可以看到,该结果除尾部稍偏离于分析解

为,其它地方都符合得相当好。由于产生偏离时的尾部值本身已很小(与最大值相差几个量级),图 1 结果表明,它对其后的计算不会产生很大误差(图 1 中除时间步长外,其它参数与图 2 中的都一致)。因此,对于 Golovin 碰并函数,计算结果表明,改进后的 Bleck 方法也相当精确。

Long^[16]根据 Shafirir 和 Gal-Chen 以及 Klett 和 Davis 计算得出的碰并效率,拟合得到的碰并函数公式比起其他人对碰并函数的假设更为接近实际值,因此,这里采用他提出的公式:

$$K_{(u,v)} = \begin{cases} 9.44 \times 10^9 (u^2 + v^2) & 10 \mu\text{m} < r_{\max} \leq 50 \mu\text{m} \\ 5.78 \times 10^3 (u + v) & r_{\max} > 50 \mu\text{m} \end{cases}$$

对于 $r_f=10\mu\text{m}$, $\gamma=0$, $L=1\text{g/m}^3$ 的情况(时间步长取为 1 s),经过 20 min、30 min 演变

计算结果与分析解也很一致,这里不再一一列举。总之,改进后的 Bleck 方法对 M 、 N 值的选取并不很敏感。

2. 和 Berry 方法的比较

Berry 方法是 Berry 和 Reinhardt^[2]在 Berry^[1]工作的基础上改进而建立的。对于实际碰并函数,到目前为止尚未有分析解,检验计算得出的结果是否正确,一直是一个重要的研究课题。众所周知,在水滴碰

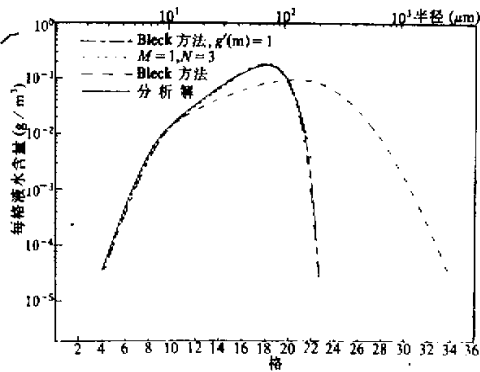


图2 碰并函数 $K=1.5 \times 10^3(u+v)$ 时的滴谱分布

后的结果分别画在图 3(a) 和 3(b) 中。为了检验 Berry 方法计算结果的精度, 将其总含

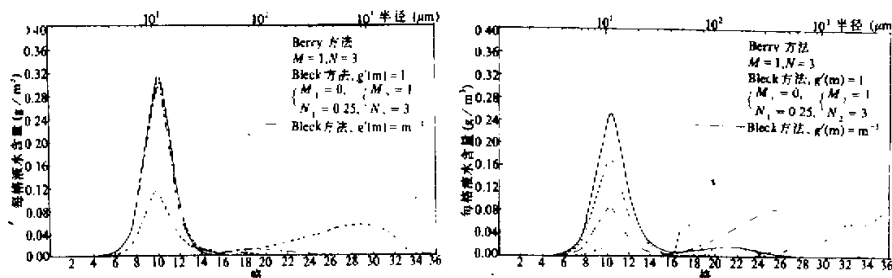


图 3(a) 用 Long 碰并函数计算 20 min 后的滴谱 图 3(b) 用 Long 碰并函数计算 30 min 后的滴谱
水量误差画在图 4 中 (图中实线为每分钟的误差, 虚线为累积误差)。从中可以看出, 滴谱经过 25 min 演变后, 误差迅速增加, 至 38 min 时, 每分钟的误差已高达 15%, 值得注意的是约在 25 min 时, Berry 方法计算结果中的双峰开始形成。这说明 Berry 方法对双峰形成后的情况有明显的误差, 六点对数 Lagrange 插值公式并不能很好地适用于 Long 碰并函数这种同实际碰并函数接近的情况。因此, 图 3(b) 中 Berry 方法计算出的结果只有参考价值。

在图 3(b) 中, Berry 方法和取 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 时的计算结果中有二个峰的位置很一致, 但在这二个峰之间, $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 的结果中又多出了一个峰。为了检验它的存在, 本文对不同的 M, N 组合值进行了大量的计算, 结果发现三峰的出现是普遍的, 只不过不同的 M, N 值, 相应的中间峰峰值略有差别。本文还考虑了不同位置的谱分布选用不同的 M, N 值进行试验。由于在 Golovin 碰并函数中, 取 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 的结果能与分析解符合得很好, 因此, 对于大于 $50\mu\text{m}$ 处 (约 $k > 13$) 的 M, N 值取 1 和 3, 但对于小于 $50\mu\text{m}$ 处的 M, N 值, 用不同的组合值进行计算, 发现计算得出的结果与 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 的差别不大, 如取 $\begin{cases} M=0 \\ N=0.25 \end{cases}$ ($k \leq 13$) 时的结果也画在图 3(b) 中, 以资比较。因此, 对于 Long 碰并函数,

三峰分布中的中间峰决不可能是计算“噪声”, 而是客观存在的。Berry 方法计算不出三峰分布, 这同它本身的局限性分不开。由于中间峰所处范围比较窄, 而 Berry 方法采用的是六点对数插值, 平滑能力强, 因而, Berry 方法抑制了中间峰的形成, 从而将二个谷并成了一个谷。也许 Berry 方法总含水量误差产生的原因正是由于抑制掉了中间峰的缘故。从图 4 中还可以看出, 大滴的含水量越大, 引起的总含水量计算误差也越大。在 25 min 之前, 大滴的含水量比较小, 因此, 总含水量误差小只能说明

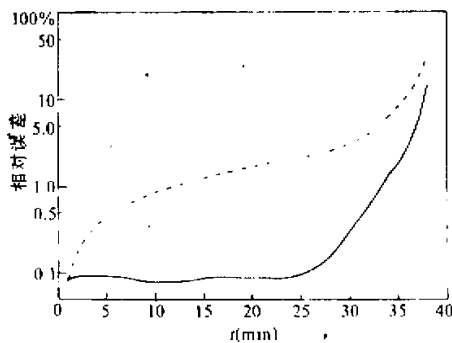


图 4 在计算过程中, Berry 方法总含水量误差
随时间的变化

计算结果在小滴方向的可靠性,而无法反映 Berry 方法在大滴方向的计算结果也是正确的,事实上,大滴的形成具有正反馈作用, Berry 方法由于平滑能力强,抑制了大滴的形成,因此,图 3(a)中 Berry 方法的计算结果在大滴方向有偏小的倾向.图 3(a)中取 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 计算出的结果在小滴方向与 Berry 方法的结果很一致,这在一定程度上说明了改进后 Bleck 方法的精度.

本文通过对大量不同 M, N 值的计算,发现它们的结果很相似(对 Long 碰并函数,都有三峰分布),而差别不大.文中仅就 $\begin{cases} M=0 \\ N=4 \end{cases}, \begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 二种情况进行了讨论.为了进一步证实计算出的结果,我们还分段考虑了 M, N 的选取,总之,计算结果对 M, N 选取的不敏感性,从另一个角度反映了改进后的 Bleck 方法计算结果的客观性.虽然改进后的 Bleck 方法计算结果也有误差,但在目前尚未有分析解的情况下,要判断哪一种方法的计算误差大是很困难的.本文通过分析计算方法的原理以及比较计算结果,认为改进后 Bleck 方法的计算精度至少与 Berry 方法相当.由于改进后的 Bleck 方法不象 Berry 方法那样有较强的平滑能力,对 Long 碰并函数,它能计算出三峰分布,这一点也是它优于 Berry 方法的地方.

3. 计算速度

在求解水滴碰并方程的过程中,不仅要求计算精度高,而且也希望计算速度快. Bleck 方法就以速度快而见长,它真正用于每一步的实际时间并不多,而是化很大一部分时间用于准备工作上(如计算系数 $a_{ijk}^{(l)}, b_{ik}^{(l)}, l=1, 2, 3, 4$ 等),如果用 s 表示准备时间, t 表示每一步计算所用的时间, T 表示计算 N 步之后平均每一步所用的时间^[6],则

$$T = \frac{s}{N} + t$$

Berry 方法和 Bleck 方法不一样,它用作准备工作的时间并不长,但每一步计算所用的时间却比较多.由于在计算过程中,所需计算的格数不断增加,假设有

$$T = \frac{s}{N} + t(1 - be^{-aN})$$

式中, t 表示计算最后一步所化的时间, $t(1-b)$ 表示开始计算第一步所化的时间, a 为参数.对于不同的程序,上两式中的参数大同小异,差别不会很大,因此,为了比较这两种方法的计算速度,试以我们在 FACOM-360 计算机上运行的程序为例:

$g_{(m)} = m^{-3}$ 的 Bleck 方法

$$T = \frac{56.3}{N} + 6.5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

取 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$, 改进后的 Bleck 方法

$$T = \frac{130.2}{N} + 10.8 \times 10^{-3} \text{ s}$$

对 Berry 方法

$$T = \frac{3.77}{N} + 0.32 [1 - 0.53 e^{-3.0 \times 10^{-4} N}] \text{ s}$$

将它们画在图 5 中, 当计算步数比较多时, 二种 Bleck 方法都比 Berry 方法快得多, 并且改进后的 Bleck 方法同原来的相比, 计算量增加还不到一倍, 所耗费的 CPU 时间还不及 Berry 方法的 1/30, 但是, 它的精度却比 Bleck 方法大为提高了, 达到了 Berry 方法的水平。

五、结果与讨论

本文改进了数值积分随机碰并方程的 Bleck 方法, 选择了合适的变量更换函数。当变量更换采用 $g_{(m)} = A_m N + B/m^M$ 的形式, 并适当选取 M, N 参数值, 可使数值积分水滴碰并、破碎方程的精度大为提高。为了检验改进后的 Bleck 方法的计算精度和计算速度, 本文分别就常值碰并函数、Golovin 碰并函数的情况进行了计算, 并将计算结果与分析解进行了比较, 结果表明, 当参数取 $\begin{cases} M=0 \\ N=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} M=1 \\ N=3 \end{cases}$ 时都能达到令人满意的要求。我们还发现, 改进后的 Bleck 方法的计算结果对 M, N 值的选取并不很敏感。对于与实际碰并函数接近的 Long 碰并函数, 本文将改进后的 Bleck 方法同 Berry 方法进行了比较, 发现改进后的 Bleck 方法的精度达到了 Berry 方法的水平, 甚至在某些方面超过了它; 在计算速度方面, 改进后的 Bleck 方法的计算量尚不到 Berry 方法的 1/30, 它与目前流行的 Bleck 方法相比, 计算量增加还不到一倍, 因此, 改进后的 Bleck 方法无论在计算速度上, 还是在计算精度上, 都达到了比较满意的程度。

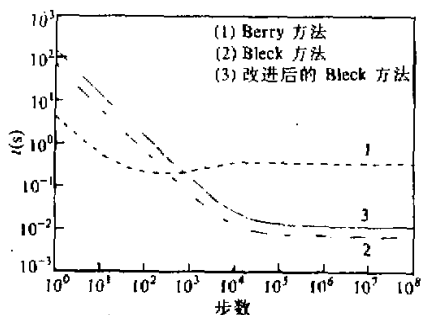


图 5 Berry 方法, Bleck 方法和改进后的 Bleck 方法计算速度之比较

致谢: 本文承王鹏飞教授的指导和鼓励, 在计算工作中得到袁忠祥老师的帮助, 在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] Berry, E. X., 1967, Cloud droplet growth by collection, *J. Atmos. Sci.*, 24, 688—701.
- [2] Berry, E. X. and Reinhardt, R. L., 1974, An analysis of cloud drop growth by collection, *J. Atmos. Sci.*, 31, 1814—1824.
- [3] Bleck, R., 1970, A fast approximative method for integrating the stochastic coalescence equation, *J. Geophys. Res.*, 75, 5165—5171.
- [4] Danielsen, E. F., Bleck, R. and D. A. Morros, 1972, Hail growth by stochastic collection in a cumulus model, *J. Atmos. Sci.*, 29, 533—547.

- [5] Soong S. T., 1974, Numerical simulation of warm development in axisymmetric cloud model, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1262— 1285.
- [6] Enutashvily, I. M., 1980, A numerical method for integrating the kinetic equation of coalescence and breakup of cloud droplets, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 2521— 2534.
- [7] List, R. and Gillespie, J. R., 1976, Evolution of raindrop spectra with collision-induced breakup, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2007— 2013.
- [8] Almeida, F. C. de, Dennett, R. D., 1980, An analysis of two schemes to numerically solve the stochastic collection growth equation, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 2707— 2711.
- [9] Ochs, H. T. and C. S. Yao, 1978, Moment conserving techniques of microphysical computations, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1947— 1958.
- [10] Pruppacher, H. R. and J. D. Klett, 1978, Microphysics of cloud and precipitation, D. Reidel, 508— 544.
- [11] Mc Taggart-cowan, J. D., List, R., 1975, Collision and breakup of water drops at terminal velocity, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 1401— 1411.
- [12] Low, T. B. and R. List, 1982, Collision, coalescence and breakup raindrops, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1607— 1618.
- [13] Brown, Jr P. S., 1983, Some essential distribution details for application of Bleck's method to the collision-breakup equation, *J. Climate Appl. Meteor.*, **22**, 693— 697.
- [14] Gillespie, J. R. and R. List, 1978, Effects of collision-induced breakup on drop size distribution in a steady state rainshafts, *Pure Appl. Geophys.*, **75**, 599— 626.
- [15] Scott, W. T., 1968, Analytic studies of cloud droplet coalescence, *J. Atmos. Sci.*, **25**, 54— 65.
- [16] Long, A. B., 1974, On the evolution of collection kernel for the coalescence of water droplet, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1053— 1057.