第13卷 第2期
1989年6月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol.13, No.2
June, 1989

正压大气中的地形性振荡

刘征宇
(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文讨论了正压大气中的一种地形性振荡，这种振荡是由地形对行星涡度的周期性强迫而产生的共振作用所引起的．它具有两个明显的特征，即能流方向与波尺度无关及振荡的周期为中长期天气尺度．

一、引 言

早在五十年代初期，Fjortoft[1]对正压大气中无地形时的无辐散流体，由总动能和总拟能守恒，得到了著名的尺度守恒定理．这对旋转流体的运动是一个很强的约束，除了众所周知的中间波只能同时向大、小尺度波提供(或吸收)能量的特征外，它对能流的方向也有一种约束，即在一般情况下，向大尺度波输送的能量较多[2,3]．这种能量易向大尺度波转移的特征，曾庆存[3]则更进一步证明了，在一定条件下，对原始方程组，通过旋转适应，也是成立的．

当大地形存在时，能流具有什么特征，迄今讨论还不多．本文采用一个考虑大地形的正压模式，对此问题进行了研究．模式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi=-J(\psi,\Delta\psi+\beta y+\eta), \tag{1}$$

其中 $\eta=f_0h/D$，D 为等效厚度，f_0 为科氏参数，h 为地形高度函数，$J(\ )$ 为雅可比算子．结果表明，地形的作用将改变总拟能守恒，地形波和大气波可以相互作用而引起振荡，这种振荡的能流方向与大气波尺度无关，且属于中长期天气过程．

二、地形性振荡的方程

考虑一个在 x 和 y 方向上均为周期性的 β 平面上的区域 $A[0, 2\pi L_x; 0, 2\pi L_y]$ 内的运动．本文中水平尺度全部无量纲化，即

$$x'=x/L_x,\ y'=y/L_y,$$

1985年4月12日收到，1986年5月21日收到再改稿．

其中 L_x 和 L_y 分别为 x 和 y 方向上的有量纲长度，则区域 A 变为 $A'[0,2\pi;0,2\pi]$，此后，再全部省略“'”号．定义总动能和总拟能分别为

$$E\equiv\frac{1}{2}\int_A(\nabla\psi)^2dA,\quad F\equiv\frac{1}{2}\int_A(\Delta\psi)^2dA,$$

则由(1)式和周期性条件易得总动能方程

$$\frac{\partial E}{\partial t}\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_A(\nabla\psi)^2dA=0,\tag{2}$$

即总动能守恒不受地形影响．又得总拟能方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_A(\Delta\psi)^2dA=F_\eta,$$

$$F_\eta\equiv-\int_A\Delta\psi J(\psi,\eta)dA.\tag{3}$$

对 ϕ 和 η 作富氏展开

$$\psi=\sum_{\substack{m^2+n^2>0\\ m,n\geqslant0}}[\psi_{mn}e^{i(mx+ny)}+*],$$

$$\eta=\sum_{\substack{m^2+n^2>0\\ m,n\geqslant0}}[\eta_{mn}e^{i(mx+ny)}+*],$$

其中 * 表示前一项的共轭复数项．注意，这里求和号的下标与标准富氏展开时不同，那里为 $m,n\geqslant0$，即允许 $m^2+n^2=0$，而这里，$m^2+n^2>0$ 表明 m 和 n 不能同时为零．这是因为对 ψ 和 η 差一个常数显然无关紧要．所以，这里下标满足关系

$$m^2+n^2>0\quad 且\quad m,n\geqslant0.\tag{4}$$

在以下凡遇到这两个函数的展开求和，下标均满足(4)式．则

$$E\equiv\frac{1}{2}\int_A(\nabla\psi)^2dA=\frac{A}{2}\sum(m^2+n^2)|\psi_{m,n}|^2,\tag{5}$$

$$F\equiv\frac{1}{2}\int_A(\Delta\psi)^2dA=\frac{A}{2}\sum(m^2+n^2)^2|\psi_{m,n}|^2,\tag{6}$$

$$\begin{aligned}F_\eta\equiv&-\int_A\Delta\psi J(\psi,\eta)dA\\
=&-\int_A\left[-\sum(m^2+n^2)(\psi_{mn}e^{i(mx+ny)}+*)\right]\left\{\left[\sum im(\psi_{mn}e^{i(mx+ny)}-\overline{\psi}_{mn}e^{-i(mx+ny)})\right]\right.\\
&\times\left[\sum in(\eta_{mn}e^{i(mx+ny)}-\overline{\eta}_{mn}e^{-i(mx+ny)})\right]-\left[\sum in(\psi_{mn}e^{i(mx+ny)}-\overline{\psi}_{mn}e^{-i(mx+ny)})\right]\\
&\left.\times\left[\sum im(\eta_{mn}e^{i(mx+ny)}-\overline{\eta}_{mn}e^{-i(mx+ny)})\right]\right\}dA\\
=&-\int_A\left[\sum(m^2+n^2)(\psi_{mn}e^{i(mx+ny)}+\overline{\psi}_{mn}e^{-i(mx+ny)})\right]\end{aligned}$$

$$\times\left\{\sum(mj-nk)\left[\psi_{mn}\eta_{kj}e^{i[(m+k)x+(n+j)y]}-\psi_{mn}\overline{\eta}_{kj}e^{i[(m-k)x+(n-j)y]}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\overline{\psi}_{mn}\overline{\eta}_{kj}e^{-i[(m+k)x+(n+j)y]}-\overline{\psi}_{mn}\eta_{kj}e^{i[(-m+k)x+(-n+j)y]}\right]\right\}dA\ .$$

展开并整理，按共轭项合并，得

$$F_\eta=-\int_A\sum(s^2+t^2)(mj-nk)\left[(\psi_{st}\psi_{mn}\eta_{kj}e^{i[(s+m+k)x+(t+n+j)y]}+*)\right.$$
$$-(\psi_{st}\psi_{mn}\overline{\eta}_{kj}e^{i[(s+m-k)x+(t+n-j)y]}+*)+(\psi_{st}\overline{\psi}_{mn}\overline{\eta}_{kj}e^{i[(s-m-k)x+(t-n-j)y]}+*)$$
$$\left.-(\psi_{st}\overline{\psi}_{mn}\eta_{kj}e^{i[(s-m+k)x+(t-n+j)y]}+*)\right]dA\ . \tag{7}$$

若 α 为任意量，则 $\overline{\alpha}$ 表示 α 的共轭复数，$|\alpha|$ 表示 α 之模. 注意 (4) 式，则有

$$s\ ,t\ ;m\ ,n\ ;k\ ,j\geqslant0\ 且\ s^2+t^2\ ,m^2+n^2\ ,k^2+j^2>0\ . \tag{8}$$

分别令

$$F_{\eta0}\equiv-\int_A\sum(s^2+t^2)(mj-nk)\left[\psi_{st}\psi_{mn}\eta_{kj}e^{i[(s+m+k)x+(t+n+j)y]}+*\right]dA, \tag{9}$$

$$F_{\eta1}\equiv-\int_A\sum(s^2+t^2)(mj-nk)\left[-\psi_{st}\psi_{mn}\overline{\eta}_{kj}e^{i[(s+m-k)x+(t+n-j)y]}+*\right]dA\ , \tag{10}$$

$$F_{\eta2}\equiv-\int_A\sum(s^2+t^2)(mj-nk)\left[\psi_{st}\overline{\psi}_{mn}\overline{\eta}_{kj}e^{i[(s-m-k)x+(t-n-j)y]}+*\right]dA\ , \tag{11}$$

$$F_{\eta3}\equiv-\int_A\sum(s^2+t^2)(mj-nk)\left[\psi_{st}\overline{\psi}_{mn}\eta_{kj}e^{i[(s-m+k)x+(t-n+j)y]}+*\right]dA\ , \tag{12}$$

由 (3) 式得

$$F_\eta=F_{\eta0}+F_{\eta1}+F_{\eta2}+F_{\eta3}\ .$$

又因 $F_{\eta0}\equiv0$，故

$$F_\eta=F_{\eta1}+F_{\eta2}+F_{\eta3}\ . \tag{13}$$

由 (10) – (13) 式易知，对总拟能变化产生影响（即使 $F_\eta\neq0$）的必要条件是至少有一个波状地形和两个大气波共同作用，且它们还要满足以下定理的条件. 为了简洁，我们先引入如下集合记号.

对确定的地形波 η_{kj}，有

$$D_{kj}=\{(\psi_{m_1n_1},\psi_{m_2n_2})\,|\,(\psi_{m_1n_1},\psi_{m_2n_2})\ 与\ \eta_{kj}\ 共同作用使\ F_\eta\neq0\},$$
$$D_{kj}^{(p)}=\{(\psi_{m_1n_1},\psi_{m_2n_2})\,|\,(\psi_{m_1n_1},\psi_{m_2n_2})\ 与\ \eta_{kj}\ 共同作用使\ F_{\eta p}\neq0\},$$
$$p=1\ ,2\ ,3\ .$$

容易知道 D_{kj} 为无穷集，且有：

定理 1　对给定的波状地形η_{kj}，若其它两个大气波与 η_{kj} 相互作用，则至多只能使 $F_{\eta p}$ 中的一项不为零，即

$$D_{kj}^{(1)} \cap D_{kj}^{(2)} = D_{kj}^{(2)} \cap D_{kj}^{(3)} = D_{kj}^{(3)} \cap D_{kj}^{(1)} = \phi ,$$

ϕ 表示空集.

证：由(10)—(12)式，若$(\psi_{st}, \psi_{mn}) \in D_{kj}$，则必有

$$mj - nk \neq 0 ,$$

且(8)式成立，并且

$$\text{或}\ s+m-k=0\ \text{且}\ t+n-j=0\ ,\text{若}\ (\psi_{st}, \psi_{mn}) \in D_{kj}^{(1)}; \tag{14}$$

$$\text{或}\ s-m-k=0\ \text{且}\ t-n-j=0\ ,\text{若}\ (\psi_{st}, \psi_{mn}) \in D_{kj}^{(2)}; \tag{15}$$

$$\text{或}\ s-m+k=0\ \text{且}\ t-n+j=0\ \ \text{若}\ (\psi_{st}, \psi_{mn}) \in D_{kj}^{(3)}. \tag{16}$$

可用反证法，若 $D_{kj}^{(1)} \cap D_{kj}^{(2)} \neq \phi$，则有$(\psi_{st}, \psi_{mn}) \in D_{kj}^{(p)}$，$p=1, 2$，则必有(14)和(15)式同时成立，于是

$$\begin{cases} s+m-k=0 , \\ s-m-k=0 , \end{cases} \text{且} \begin{cases} t+n-j=0 , \\ t-n-j=0 ; \end{cases}$$

分别用上下式相减，得

$$m=n=0 .$$

可知 $m^2+n^2=0$ 与(8)式矛盾.

同理可证，若 $D_{kj}^{(2)} \cap D_{kj}^{(3)} \neq \phi$ 或 $D_{kj}^{(3)} \cap D_{kj}^{(1)} \neq \phi$，则将有$k^2+j^2=0$ 或 $s^2+t^2=0$，同样可知与(8)式矛盾. 证毕.

现在，考虑给定的波状地形 η_{kj} 与大气二波组$(\psi_{m_1n_1}, \psi_{m_2n_2})$，其中$(\psi_{m_1n_1}, \psi_{m_2n_2}) \in D_{kj}$，不妨设

$$\psi_{m_1n_1} = |\psi_{m_1n_1}| e^{i\theta_1} ,$$

$$\psi_{m_2n_2} = |\psi_{m_2n_2}| e^{i\theta_2} .$$

其中 $\theta_1=\theta_1(t)$，$\theta_2=\theta_2(t)$ 为相角；而且不妨设 η_{kj} 为实函数，即

$$\eta_{kj} = \overline{\eta}_{kj}$$

由定理 1，$(\psi_{m_1n_1}, \psi_{m_2n_2})$ 只能属于一个 $D_{kj}^{(p)}$，先设 $p=1$，则

$$(\psi_{m_1n_1}, \psi_{m_2n_2}) \in D_{kj}^{(1)}.$$

注意

$$m_1+m_2=k\ , n_1+n_2=j\ ,$$

则有

$$\begin{aligned} F_{\eta 1} &= [(m_1^2+n_1^2)(m_2j-n_2k)(\psi_{m_1n_1}\psi_{m_2n_2}\eta_{kj}+*) \\ &\quad +(m_2^2+n_2^2)(m_1j-n_1k)(\psi_{m_2n_2}\psi_{m_1n_1}\eta_{kj}+*)] \\ &= 2\eta_{kj}|\psi_{m_1n_1}||\psi_{m_2n_2}|\cos(\theta_1+\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)[(m_1^2+n_1^2)-(m_2^2+n_2^2)] \end{aligned} \tag{17}$$

取高截谱解

$$\psi=\psi_{m_1n_1}e^{i(m_1x+n_1y)}+\psi_{m_2n_2}e^{i(m_2x+n_2y)}+*$$

且 $(\psi_{m_1n_1},\psi_{m_2n_2})\in D_{kj}^{(1)}$，则由总动能守恒(2)式和总拟能方程(3)，得

$$\frac{dE}{dt}\equiv\frac{A}{2}\left[(m_1^2+n_1^2)\frac{d|\psi_{m_1n_1}|^2}{dt}+(m_2^2+n_2^2)\frac{d|\psi_{m_2n_2}|^2}{dt}\right]=0 \tag{18}$$

$$\frac{dF}{dt}\equiv\frac{A}{2}\left[(m_1^2+n_1^2)^2\frac{d|\psi_{m_1n_1}|^2}{dt}+(m_2^2+n_2^2)^2\frac{d|\psi_{m_2n_2}|^2}{dt}\right]=F_{\eta 1} \tag{19}$$

由(18)式解出 $\frac{d|\psi_{m_2n_2}|^2}{dt}$，代入(19)式易得

$$\frac{A}{2}(m_1^2+n_1^2)[(m_2^2+n_2^2)-(m_1^2+n_1^2)]\frac{d|\psi_{m_1n_1}|^2}{dt}=-F_{\eta 1}$$

将(17)式代入，得

$$\begin{aligned}&(m_1^2+n_1^2)[(m_2^2+n_2^2)-(m_1^2+n_1^2)]\frac{d|\psi_{m_1n_1}|^2}{dt}\\&=-4\eta_{kj}|\psi_{m_1n_1}||\psi_{m_2n_2}|\cos(\theta_1+\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)[(m_1^2+n_1^2)-(m_2^2+n_2^2)]\end{aligned}$$

则有

$$\frac{d|\psi_{m_1n_1}|}{dt}=2|\psi_{m_2n_2}|\eta_{kj}\cos(\theta_1+\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)(m_1^2+n_1^2)^{-1} \tag{20}$$

类似可得

$$\frac{d|\psi_{m_2n_2}|}{dt}=-2|\psi_{m_1n_1}|\eta_{kj}\cos(\theta_1+\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)(m_2^2+n_2^2)^{-1} \tag{21}$$

由(20)(21)式可得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)|\psi_{m_1n_1}|=-2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)|\psi_{m_2n_2}|\eta_{kj}\sin(\theta_1+\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)(m_1^2+n_1^2)^{-1}\\[2ex]\left(\dfrac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)|\psi_{m_2n_2}|=2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)|\psi_{m_1n_1}|\eta_{kj}\sin(\theta_1+\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)(m_2^2+n_2^2)^{-1}\end{cases}$$

其中

$$\dot\theta_1=\frac{d\theta_1}{dt},\ \dot\theta_2=\frac{d\theta_2}{dt}$$

$$\begin{aligned}\omega_1^2&=4\eta_{kj}^2\cos^2(\theta_1+\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)^2(m_1^2+n_1^2)^{-1}(m_2^2+n_2^2)^{-1}\\&=4\eta_{kj}^2\cos^2(\theta_1+\theta_2)\sin^2\theta\end{aligned}$$

这里 θ 表示两大气波之间的夹角，即

$$\theta=\arcsin\left[|m_2n_1-m_1n_2|/\sqrt{(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)}\right]$$

令

$$\dot\theta_1+\dot\theta_2=0 \tag{22}$$

得大气二波振荡方程组

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2=0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)|\psi_{m_1n_1}|=0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)|\psi_{m_2n_2}|=0 \end{cases} \tag{23}$$

注意，因 $\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2=0$，故 $\frac{d\omega_1}{dt}=0$．

类似，对 $p=2$，我们可得到

$$F_{\eta 2}=-2\eta_{kj}|\psi_{m_1n_1}||\psi_{m_2n_2}|\cos(\theta_1-\theta_2)(m_2n_1-m_1n_2)(m_1^2+n_1^2)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2=0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_2^2\right)|\psi_{m_1n_1}|=0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_2^2\right)|\psi_{m_2n_2}|=0 \end{cases} \tag{24}$$

其中

$$\omega_2^2=4\eta_{kj}^2\cos^2(\theta_1-\theta_2)\sin^2\theta\,[1-(m_2^2+n_2^2)/(m_1^2+n_1^2)]^{-2}$$

$p=3$ 的情形与 $p=2$ 实际是相同的，这只需交换二波 $(\psi_{m_1n_1},\psi_{m_2n_2})$ 为 $(\psi_{m_2n_2},\psi_{m_1n_1})$ 即可．

由上振荡方程组(23)和(24)看出，由于各个振荡频率 ω_p 正比于 η_{kj}，故若无地形、将无振荡，故我们称之为地形性振荡．此外，还有两点值得注意，首先，若 $f_0=0$ 则 $\omega_p=0$，也没有振荡，故这种振荡在很大程度上是旋转流体的产物；其次，这种振荡的二个大气波和一个波状地形的空间位相和时间位相需满足一定的关系（如(14)—(16)和(22)式）．对此，我们将在第四节中给出其物理解释．

三、地形性振荡的特征

前面，我们导出了地形性振荡的方程，本节，将进一步对其特性作若干讨论．我们将看到它有两个重要性质．

1．能流方向与大气波尺度无关

以 $p=1$ 为例．由振荡方程(23)可知，两个波均以同样频率振荡；又由能量方程(18)，可知，两个波能量之和守恒．因此，一个波能量（振幅）的增加必伴随着另一个波能量（振幅）之减小．故这两个大气波必然是每隔半个周期能流方向改变一次．由于该两个波满足完全相同的振荡方程，故在此意义上，我们说，这两个波振动方式完全相同，在能流转换

时这两个波完合等价. 从而，这种能流转换与两个波的空间尺度大小无关.

对 $p=2,3$ 情形，完全可类似讨论.

2. 振荡周期较长，属中长期天气过程

为此，我们先分析地形性振荡的最短周期，先看频率 ω_1，由上节可知

$$\omega_1^2=4\,\eta_{kj}^2\cos^2(\theta_1+\theta_2)\sin^2\theta,$$

则

$$\omega_1=2|\eta_{kj}|\,|\cos(\theta_1+\theta_2)|\,|\sin\theta|=\frac{2|f_0|}{D}\,|h_{kj}|\,|\cos(\theta_1+\theta_2)|\,|\sin\theta|.$$

因 $f_0=2\Omega\sin\varphi$，φ 表示地理纬度，故

$$\omega_1=4\Omega\,\frac{|h_{kj}|}{D}\,|\sin\varphi|\,|\cos(\theta_1+\theta_2)|\,|\sin\theta|$$

求最大频率（相应为最短周期）

$$\max(\omega_1)=4\Omega\,\frac{|h_{kj}|}{D}\,|\sin\varphi|$$

则

$$\min\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)=D/(4|h_{kj}|\,|\sin\varphi|),$$

$\min\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)$表示振荡在最短周期时的天数，其值列于表 1.

表1 ω_1 的最短振荡天数

φ \ $\lvert h_{kj}\rvert$	0.1 D	0.3D
45°	3.6	1.2
30°	5	1.7

对 ω_2，由其表达式易得

$$\min\left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)=[D/(4|h_{kj}|\,|\sin\varphi|)]\times A=\min\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)\times A$$

其中

$$A=[1-(m_2^2+n_2^2)/(m_1^2+n_1^2)]$$

因 $p=2$ 时，由 (15) 式

$$m_1-m_2=k\geqslant 0\qquad n_1-n_2=j\geqslant 0$$

故 $0<A<1$，当 $m_1^2+n_1^2>>m_2^2+n_2^2$ 时，$0(A)=0(1)$，即对振荡周期影响不大. 在一般典型天气情况下，我们作一些计算. 首先，注意 (15) 式有

$$m_1=m_2+k\ ,\ n_1=n_2+j$$

将其代入 A 中得

$$A=[k(k+2m_2)+j(j+2n_2)][(m_2+k)^2+(n_2+j)^2]^{-1}$$

1 A 3

大气科学 89/2

则计算结果如表 2 所示，其中取了 $k=j$，$m_2=n_2$，由表2 看出，一般天气形势下、系数 A 的影响不大．故这时振荡最短周期为 1 — 3 天．

表 2 不同波数系数 A 的值

k \ m_2	1	3	6	9
3	0.94	0.75	0.56	0.44
6	0.98	0.89	0.75	0.64
9	0.99	0.94	0.84	0.75

由于振荡的最短周期为 1 — 3 天，且容易求得

$$\min(\omega_1)=\min(\omega_2)=0$$

即最长周期为无穷，故地形性振荡属中长期天气过程．

由于无地形的尺度守恒情形，能量较易向大尺度转移，故地形性振荡的两个特性说明，它可能提供了一种中长期尺度的能量向小尺度波转移的机制．

四、强迫共振与地形性振荡

为了更清楚地揭示地形性振荡产生的物理机制，这里将从强迫共振角度对其进行讨论．

对(1)取线性、无量化方程，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-J(\psi,\eta) \tag{25}$$

取小参数ε，其大小表示地形的高度，即

$$\psi=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\cdots\qquad \eta=\varepsilon\eta_1+\cdots$$

代入(25)式，得$O(1)$阶方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_0+\beta\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=0$$

其解为自由 Rossby 波．不妨取若干波的叠加解

$$\psi_0=\sum_i\psi_{m_in_i}\cos\theta_i \tag{26}$$

其中$\varphi_{m_in_i}$ 为实数，

$$\theta_i=m_ix+n_iy-\sigma_it \tag{26a}$$

$$\sigma_i=-\beta m_i/(m_i^2+n_i^2) \tag{26b}$$

σ_i满足的即为 Rossby 波频散关系．

$O(\varepsilon)$阶方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_1+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=-J(\psi_0,\eta_1)$$

取

$$\eta_1=\eta_{kj}\cos\theta_{kj},\ \theta_{kj}=kx+jy \tag{26c}$$

将(26)式代入，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_1+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\sum_i\psi_{m_in_i}\eta_{kj}(kn_i-m_ij)\sin\theta_i\sin\theta_{kj}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i\psi_{m_in_i}\eta_{kj}(kn_i-m_ij)\left[\cos(\theta_i+\theta_{kj})-\cos(\theta_i-\theta_{kj})\right] \tag{27}$$

因(27)式为线性方程，可令 $\psi_1=\psi_{1a}+\psi_{1b}$，其中

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{1a}+\beta\frac{\partial\psi_{1a}}{\partial x}=\frac{1}{2}\sum_i\psi_{m_in_i}\eta_{kj}(kn_i-m_ij)\cos(\theta_i+\theta_{kj}) \tag{27a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{1b}+\beta\frac{\partial\psi_{1b}}{\partial x}=-\frac{1}{2}\sum_i\psi_{m_in_i}\eta_{kj}(kn_i-m_ij)\cos(\theta_i-\theta_{kj}) \tag{27b}$$

以下，流函数只取单波 $\psi_{m_in_i}$. 我们下面只讨论(27a)式——(27b)式完全类似. 这时(27a)式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{1a}+\beta\frac{\partial}{\partial x}\psi_{1a}=\frac{1}{2}\psi_{m_in_i}\eta_{kj}(kn_i-m_ij)\cos(\theta_i+\theta_{kj})$$

由此看出，由波状地形和大气波相互作用，可强迫出新的波动. 设该强迫波解为

$$\psi_{1a}=A_{ikj}\sin(\theta_i+\theta_{kj})=A_{ikj}\sin\theta_{ikj}\ ,$$

则可求得

$$A_{ikj}=\frac{1}{2}\psi_{m_in_i}\eta_{kj}(kn_i-m_ij)/(m_{ikj}^2+n_{ikj}^2)(\sigma_i-\sigma_{ikj})\ .$$

其中

$$\theta_{ikj}=m_{ikj}x+n_{ikj}y-\omega_{ikj}t \text{ 或 } \theta_{ikj}=\theta_i+\theta_{kj}$$

$$m_{ikj}=m_i+k\ ,n_{ikj}=n_i+j\ ,\omega_{ikj}=\sigma_i=-\beta in_i/(m_i^2+n_i^2)$$

$$\sigma_{ikj}=-\beta m_{ikj}/(m_{ikj}^2+n_{ikj}^2)$$

σ_i(或 ω_{ikj})为强迫波频率，σ_{ikj} 为对应于 θ_{ikj} 波矢的 Rossby 波频率. 则可看出，当 $\sigma_i=\sigma_{ikj}$ 时，即强迫波频率等于固有频率时，将产生共振. 因此我们对共振的情形必须详细讨论. 这时，共振三波组为两个 Rossby 波和一个固定的波状地形，

$$\psi_0=\psi_{m_1n_1}\cos\theta_1+\psi_{m_2n_2}\cos\theta_2\ ,\eta_1=\eta_{kj}\cos\theta_{kj}$$

其中 θ_1，θ_2 和 θ_{kj} 除满足(26a)，(26b)和(26c)外，还必须满足共振条件

$$\pm\theta_2=\theta_1+\theta_{kj}$$

不妨取负号，则为

$$\begin{cases} m_2+m_1+k=0 \\ n_2+n_1+j=0 \\ \sigma_2+\sigma_1=0 \end{cases} \tag{28}$$

这种地形性共振三波组在一般情形下是存在的，证明如下:

定理 2 对固定的 θ_{kj}，共振三波组或存在于(27a)式中，或存在于(27b)式中，或同时存在于两者之中. 总之，存在于(27)式中.

证: 这实际上就是要证(若存在于(27a)中)

$$\begin{cases} \pm m_2 = m_1 + k \\ \pm n_2 = n_1 + j \\ \pm \sigma_2 = \sigma_1 \end{cases} \tag{29}$$

或(若存在于(27*b*)中)

$$\begin{cases} \pm m_2 = m_1 - k \\ \pm n_2 = n_1 - j \\ \pm \sigma_2 = \sigma_1 \end{cases} \tag{30}$$

对给定的实数 k 和 j，存在实值解 (m_1, n_1) 和 (m_2, n_2). 对(29)式，将前二式代入后一式，得

$$\frac{-m_2\beta}{m_2^2+n_2^2} \equiv \frac{-(m_1+k)\beta}{(m_1+k)^2+(n_1+j)^2} = \frac{-m_1\beta}{m_1^2+n_1^2}$$

即

$$kn_1^2 - 2m_1jn_1 - [m_1k^2 + m_1^2k + m_1j^2] = 0$$

求解，得

$$n_1 = \{2m_1 j \pm [4m_1(m_1+k)(k^2+j^2)]^{1/2}\}/2k$$

则 n_1 为实数的条件(对实的 m_1, k, j)是

$$m_1(m_1+k) \geqslant 0 \tag{31}$$

对(30)式同样运算可得条件为

$$m_1(m_1-k) \geqslant 0 \tag{32}$$

则，若 $m_1=0$，(31)与(32)式同时成立，若 $m_1+k<0$，则 $0<m_1<-k$，于是 $m_1+(-k)=m_1-k>0$，即(32)式成立.

若 $m_1<0$，可类似证明，或(31)式成立，或(32)式成立. 证毕.

下面，考察这组波的两个大气波振幅的变化. 为了消去久期项，我们采用双时间尺度，设 $T=\varepsilon t$，且振幅为慢变量的函数，则

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}, \psi_{m_1n_1} = \psi_{m_1n_1}(T), \ \psi_{m_2n_2} = \psi_{m_2n_2}(T)$$

再设共振组是在(27*a*)中，则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{1a} + \beta\frac{\partial}{\partial x}\psi_{1a} &= (m_1^2+n_1^2)\frac{d\psi_{m_1n_1}}{dT}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\psi_{m_1n_1}\eta_{kj}(kn_1-jm_1)\cos(\theta_1+\theta_{kj}) \\ &\quad + (m_2^2+n_2^2)\frac{d\psi_{m_2n_2}}{dT}\cos\theta_2 + \frac{1}{2}\psi_{m_2n_2}\eta_{kj}(kn_2-jm_2)\cos(\theta_2+\theta_{kj}) \\ &= \left[(m_1^2+n_1^2)\frac{d\psi_{m_1n_1}}{dT} + \frac{1}{2}\psi_{m_2n_2}\eta_{kj}(kn_2-jm_2)\right]\cos\theta_1 \\ &\quad + \left[(m_2^2+n_2^2)\frac{d\psi_{m_2n_2}}{dT} + \frac{1}{2}\psi_{m_1n_1}\eta_{kj}(kn_1-jm_1)\right]\cos\theta_2 \end{aligned}$$

消去久期项，得

$$\left\{\begin{aligned}&(m_1^2+n_1^2)\frac{d\psi_{m_1n_1}}{dT}+\frac{1}{2}\eta_{kj}(kn_2-jm_2)\ \psi_{m_2n_2}=0\\&(m_2^2+n_2^2)\frac{d\psi_{m_2n_2}}{dT}+\frac{1}{2}\eta_{kj}(kn_1-jm_1)\ \psi_{m_1n_1}=0\end{aligned}\right.\tag{33}$$

代入(28)式前二式，有

$$kn_2-jm_2=m_2n_1-m_1n_2\,,\ kn_1-jm_1=-(m_2n_1-m_1n_2)$$

代入(33)式中，得

$$\left\{\begin{aligned}&(m_1^2+n_1^2)\frac{d\psi_{m_1n_1}}{dT}+\frac{1}{2}\eta_{kj}(m_2n_1-m_1n_2)\psi_{m_2n_2}=0\\&(m_2^2+n_2^2)\frac{d\psi_{m_2n_2}}{dT}-\frac{1}{2}\eta_{kj}(m_2n_1-m_1n_2)\psi_{m_1n_1}=0\end{aligned}\right.\tag{34}$$

由此得振动方程

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d^2}{dT^2}+\omega^2\right)\psi_{m_1n_1}=0\\&\left(\frac{d^2}{dT^2}+\omega^2\right)\psi_{m_2n_2}=0\end{aligned}\right.\tag{35}$$

其中

$$\omega^2=\frac{1}{4}\eta_{kj}^2(m_2n_1-m_1n_2)^2/(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)=\frac{1}{4}\eta_{kj}^2\sin^2\theta\tag{36}$$

且由(34)式可得总能量守恒

$$\frac{dE}{dT}=0\tag{37}$$

这样，对 Rossby 波，我们得到了地形性振荡的方程，下面作几点讨论：

(1)从(36)式看，虽然频率 ω 与第二节中不完全相同，但与其 ω_1 只相差一个常系数，无本质影响．因为由(35)，(36)和(37)式易知 Rossby 波时，地形振荡仍保持着两个基本特征，即能流方向与波尺度无关和振荡的周期为中长期天气尺度．

(2)由本节推导看出，一个周期性的波状地形对一个自由波发生强迫作用时，将形成新的周期性强迫波，从而，导致共振现象，在这种共振中，两个大气波的总能量守恒，但通过共振交换能量．这种共振能量交换是波与波间最主要的能量交换形式，因为其量级为 $O(1)$，而非共振能量交换的量级为 $O(\varepsilon)$，因此，在略去 $O(\varepsilon)$ 的精度上，可以认为共振波组能量守恒，且以地形性振荡的方式交换能量．从而，从另一个角度看，地形性振荡是周期性强迫共振能量交换的必然结果．

由上讨论，我们也看出，地形性振荡的动力机制是由地形对行星涡度的周期性强迫而引起的共振所造成的．

现在，我们容易看出(14)—(16)及(22)式的鲜明物理意义．从本节讨论看出，若要发生强迫共振，各波位相必须满足一定的关系(28)．而(14)—(16)式正相应于(28)式的前二式，它表示空间位相的关系；而(22)式相应于(28)式的第二式，它表示频率也要满足的关系．即(14)—(16)和(22)式是共振时，位相必须满足的共振条件．

五、结　语

本文着重讨论了由于地形对行星涡度的周期性强迫所导致的地形性振荡. 这种振荡具有两个明显的特征, 即能流方向与尺度无关及振荡周期为中长期天气过程. 因此, 这种振荡为中长期天气过程中大小尺度波能量的相互转换提供了一种机制.

一个自由波通过与地形相互作用可与另一个自由波产生共振相互作用, 形成了稳定的地形性振荡. 这是因为这里的两个自由波不可能同时从地形波吸取能量而不稳定发展. 这同一般的非线性三波共振相互作用而导致的共振不稳定[2]是不同的. 但是, 如果加入基本流 v, 情形将大不相同. 这时, 地形对基本流的强迫将产生一强迫驻波, 其振幅是可以变化的. 如果再有二个自由波扰动与该驻波共同满足本文中的共振条件, 将产生与三波共振不稳定类似的地形性共振不稳定.

致谢: 感谢大气物理研究所朱抱真教授对作者的指导和鼓励.

参 考 文 献

[1] Fjortoft, R., 1953, On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional, nondivergent flow, *Tellus*, Vol. 5, 225 — 230.

[2] 王斌, 蒋衡毅编译, 1981, 地球物理流体动力学导论, 海洋出版社.

[3] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社.