

塔层风廓线与湍流通量关系的理论 与实验研究(一)

卞新棣 赵 鸣 王彦昌

(南京大学大气科学系)

提 要

本文根据大气边界层与湍流力学理论,研究得到了塔层无量纲风梯度与湍流动量通量在中性及不稳定大气层结中均能满足的理论关系——“塔层 KEYPS 方程”;并将其数值计算结果与实测数据作了对比,验证结果表明:该关系式和实际情况的吻合程度相当好,因而具有一定的实用价值.

一、引 言

70年代以来,随着计算机的广泛应用和探测手段的日益改进,关于近地层中微气象理论和实验研究都得到了较快的发展,Webb^[1], Businger^[2]等人在近地层中发现了众所周知的“梯度与通量”关系,该关系已得到了普遍的承认和应用,在中性与不稳定层结条件下,近地层中的“梯度与通量”可用KEYPS方程表达^[3,4].然而,随着大气环境研究、风能利用开发等有关应用研究的发展,迫切需要解决近地层以外的“梯度与通量”关系. Zbigniew^[5]分析得到了全边界层内的无量纲梯度关系的经验表达式,但他的经验关系式缺乏比较坚实的湍流理论为基础,而且没有考虑到用一个统一的公式来表达. 本文根据大气边界层湍流理论,比较严格地导出了塔层“梯度与通量”的理论公式,改进和完善Zbigniew等人工作的不足与缺陷.

二、理 论

在水平均匀、定常的条件下,取 x 轴沿水平风速 u 方向,塔层内流体运动方程可表示为

$$\frac{d}{dz} (-\overline{u'w'}) = -\rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

其中 z 为垂直地面向上的坐标, $(-\overline{u'w'})$ 为湍流动量通量, (1)式右端为水平气压梯度力,该式与近地层理论的显著区别是: 塔层内湍流通量随高度而变化,其垂直变化率应和水平气压梯度力相平衡^[6], 由湍流 K 理论与地转平衡可得

$$\frac{d}{dz} (K \frac{du}{dz}) = -f u_g \sin \beta \quad (2)$$

1987年3月11日收到, 1987年11月2日收到修改稿.

K 为湍流交换系数, u_g 为地转风速, β 为地面风向与地转风向的夹角, f 为柯氏参数, 而塔层气象学定义风向随高度变化可以不计^[6]. 由(2)式对 z 积分, 则有

$$K \frac{du}{dz} = U_{*0}^2 [1 - (z - z_0) A(\mu) z^{-1}], \quad (3)$$

其中我们用到了当 $-\overline{u'w'}$ 趋向地面粗糙度 z_0 时为摩擦速度 u_{*0} 的平方, $A(\mu)$ 是边界层相似理论中的普适函数^[7], μ 为边界层稳定度判据, 其定义为

$$\mu = xu_{*0} / (fL), \quad (4)$$

χ 为卡曼常数(本文取值 0.4), L 为 M-C 长度,

$$L = u_{*0}^2 T [xgT_{*0}]^{-1} = u_{*0}^3 T [xg(-T'w')]^{-1}, \quad (5)$$

T_{*0} 为摩擦温度, T 为气温, g 为重力加速度. 而(3)式中 z_T 为中性层结大气边界层厚度,

$$z_T = xu_{*0} f^{-1}. \quad (6)$$

根据湍流相似理论, 在塔层内的控制变量有五个, 即 z , u_{*0} , f , g/T 和 T_{*0} , 而其中只有三个量纲是互为独立的, 故可得到二个无量纲参数 μ 和 $\zeta(\zeta = z/L)$, 由此可推得塔层内无量纲风梯度满足相似律

$$\Phi(\zeta, \mu) = c_0 z u_{*0}^{-1} \frac{du}{dz}. \quad (7a)$$

显然 $\Phi(\zeta, \mu)$ 在近地层中即蜕化为熟知的无量纲风梯度 $\varphi(\zeta)$, 因为在近地层中 φ 与 μ 无关, 即

$$\varphi(\zeta) = \chi z u_{*0}^2 \frac{du}{dz}. \quad (7b)$$

将(7a)与(7b)式比较可知相似常数 c_0 应取 χ_0

在定常、水平均匀条件下, 湍流能量平衡方程可表示为

$$-\overline{u'w'} \frac{du}{dz} + \alpha \frac{g}{T} \overline{T'w'} - \varepsilon = 0 \quad (8a)$$

$\overline{T'w'}$ 为湍流热通量, α 为一与大气稳定度有关的参数, ε 为湍能耗散率, 由 Kolmogorov 理论可得到:

$$\varepsilon = K^3 / l^4 \quad (9)$$

而 l 为湍流混合长, 本文取下式^[8]

$$l = x(z + z_0) [1 + x(z + z_0) \lambda_B^{-1}]^{-1} \quad (10)$$

λ_B 取值为 $(0.0063 \mu_0 f^{-1})^{[9]}$

由 K 理论并将(9)与(10)式代入(8a)式可得

$$\left(K \frac{du}{dz} \right) \frac{du}{dz} + \alpha \frac{g}{T} \overline{T'w'} - K^3 \{ x(z + z_0) [1 + x(z + z_0) \lambda_B^{-1}]^{-1} \}^{-4} = 0 \quad (8b)$$

再将(3)式代入(8b)式中将 K 代换掉, 移项整理有

$$\begin{aligned} & \left\{ u_{*0}^2 [1 - (z - z_0) A(\mu) z^{-1}] \frac{du}{dz} + \alpha \frac{g}{T} \overline{T'w'} \right\} (xz)^4 \left(\frac{du}{dz} \right)^3 \\ & = u_{*0}^6 [1 - (z - z_0) A(\mu) z^{-1}]^3 [1 + x(z + z_0) \lambda_B^{-1}]^4 \end{aligned} \quad (11)$$

注意到(7a)的定义将(11)式运算可为

$$P(z, z_T) \Phi^4 - \alpha \frac{z}{L} \Phi^3 - P^3(z, z_T) Q^4(z, \lambda_B) = 0 \quad (12)$$

其中我们还用到了(5)式 L 的定义, 而 P 与 Q 的函数表达式为

$$P(z, z_T) = 1 - (z - z_0) z_T^{-1} A(\mu), \quad (13)$$

$$Q(z, \lambda_B) = 1 + x(z + z_0) \lambda_B^{-1}. \quad (14)$$

显然 P 函数和高度成反比, Q 函数与 z 成正比。不难看出, 在特定的条件下, 由(12)式可直接推出近地层中的 KEYPS 方程和 Zbigniew 的经验关系式(详见附录 II 和 III)。为此我们称(12)式为“塔层 KEYPS 方程”。

三、实验资料与计算方法

实测资料取自北京 325m 气象铁塔, 由本文理论, 资料选取满足如下条件, (1)大气正压; (2)风速随高度不减; (3)风向随高度变化较小。该气象铁塔情况详见附录 I。利用近地层二层的数据, 按 R_i 数较精确的差分格式可算出 \tilde{R}_i 数进行资料稳定度分类, 因为 R_i 数为

$$R_i = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-2} \simeq \frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + 0.0098 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-2}, \quad (15)$$

θ 为位温, 故 \tilde{R}_i 为

$$\tilde{R}_i = \left[(u_2 - u_1) \ln^{-1} \frac{z_2}{z_1} \right]^{-2} z_2 z_1 g T^{-1} \left[(T_2 - T_1) \left(\sqrt{z_2 z_1} \ln \frac{z_2}{z_1} \right)^{-1} + 0.0098 \right]. \quad (16)$$

由(16)式得到的 \tilde{R}_i 数, 我们对从 1982 年 7 月至 1984 年 4 月共 589 组资料进行了稳定度分类, 结果列于表 1。

表 1 实测资料处理概况

分类	数据编号 No.	\tilde{R}_i	μ	$L(m)$	各类资料数(组)
1	001—020	-1.52 ~ -1.01	~-142.5	~-8.3	20
2	021—187	-0.98 ~ -0.54	~-76.3	~-14.3	167
3	188—253	-0.48 ~ -0.25	~-35.4	~-45.7	66
4	254—376	-0.24 ~ -0.14	~-9.4	~-97.8	123
5	377—492	-0.13 ~ -0.05	~-1.4	~-294.6	116
6	493—589	~ 0 ⁻	~ 0 ⁻	~-10 ³	97

已知 \tilde{R}_i 数之后, 由近地层“通量与梯度”关系^[10]可得

$$L = \tilde{R}_i^{-1} z, \quad \tilde{R}_i \leq 0. \quad (17)$$

再由 L 的定义即可算出 u_0 等量, 而 $A(\mu)$ 我们只采用 Arya^[17] 得出的普适公式

$$A(\mu) = 3 \times 10^{-6} \mu^4 + 1.17 \times 10^{-3} \mu^2 + 0.142 \mu + 5.14 \mu > -50, \quad (18)$$

当 μ 小于 -50 则取 $A(\mu)$ 值为 1.38 .

显然从(12)式一般很难获得关于 Φ 的解析解, 只能求得数值解, 但在 u_{s0} 、 T_{s0} 、 L 、 μ 等参数都已知的前提下, (12)式仅是高度 z 的函数, 即对任一层次 z_i , 可有关于 Φ_i 的方程

$$F(\Phi_i) = \Phi_i^4 + a_i \Phi_i^3 + d_i \equiv 0, \quad (19)$$

其中系数 a_i 、 d_i 均为已知($i=0, 1, 2, \dots, N$), 具体层次 z_i 详见附录 I. 对方程(19)用 Newton 逼近法很容易得到较为精确的解 Φ_i (按本文理论要求, 取 Φ_i 为正根), 这样一共可求得 N 个 Φ_i 的离散解. 再据 Lagrange 非等距高精度插值法可构造一个关于 z 连续变化的函数 $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^N A(z, z_i, j) B^{-1}(z_i, j, i) \Phi_j, \quad (20)$$

其中 $A(z, z_i, j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N (z - z_i)$; $B(z_i, j, i) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N (z_j - z_i)$. 有了连续函数 $\Phi(z)$, 就可以将其积分成风廓线并和实测资料验证, 由计算方法可知对任一积分区间上的可积函数, 均可化为 Gauss 型标准对称区间上的数值积分, 即

$$\int_a^b f(x) dx \xrightarrow[\text{代换}]{\text{积分}} \int_{-1}^1 f'(x') dx' = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} f'(\eta_k^{(n)}). \quad (21)$$

本文取 $n=6$, 即表示该积分精度可达 12 阶, 相对应的积分系数 $\lambda_k^{(n)}$ 和插值基点 $\eta_k^{(n)}$ 列在表 2 中, 由此对 $\Phi(z)$ 的风廓线积分可有

$$u(z) = \int_{z_0}^z u_{s0}(xz)^{-1} \Phi(z) dz, \quad (22)$$

令函数变换

表 2 Gauss 积分参数表

k 参数	1	2	3	4	5	6
$\lambda_k^{(6)}$	0.17132	0.36076	0.46791	0.46791	0.36076	0.17132
$\eta_k^{(6)}$	-0.93247	-0.66121	-0.23862	0.23862	0.66121	0.93247

$$z(x) = 0.5[(x+1)z + (x-1)z_0], \quad (23)$$

$$R(x) = u_{s0}(z - z_0) [2xz(x)]^{-1} \Phi[z(x)], \quad (24)$$

于是方程(22)式即可化为 Gauss 积分的标准形式

$$u[z(x)] = \int_{-1}^1 R(x) dx. \quad (25)$$

由(21)式和表 2 很容易得到塔层风廓线分布.

四、 计算结果与实测验证的讨论

根据中性层结下的近地层风速分布, 我们得到325m 铁塔下垫面粗糙度 z_0 为 48.1cm, 这对于北京城区下垫面实际情况是比较吻合的.

在不稳定大气层结条件下的计算结果与实测资料的验证情况分别由图 1、2 和 3 给出, 其不稳定度的级别按表 1 所示分别为第 1、3 和 5 类, 图中的高度和风速均以无量纲形式给出, 由此可见在各类情况下, 无量纲廓线与实测结果吻合得相当好, 从理论上讲, 只要 (12) 式的解 Φ 非负, 则在这高度以内, 塔层 KEYPS 方程具有普适意义, 这很具有实用价值, 这一点已被实验所证明.

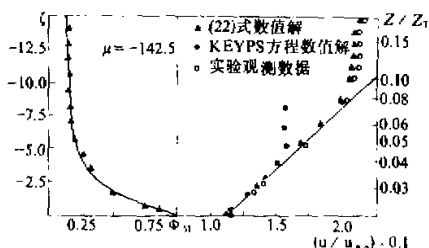


图 1 第 1 类层结计算结果与实验对比

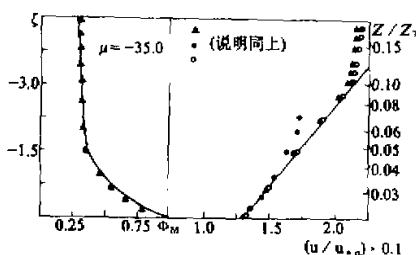


图 2 第 3 类层结计算结果与实验对比

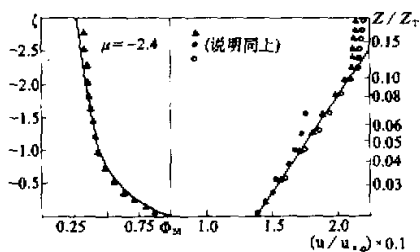


图 3 第 5 类层结计算结果与实验对比

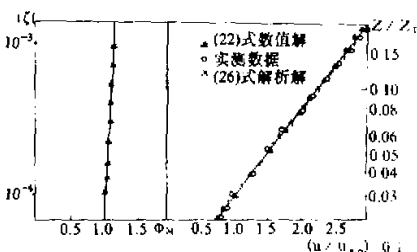


图 4 中性层结计算结果与实验对比

从图 1 到图 3 的计算结果中我们可以看到, 塔层 KEYPS 方程得到的正解 Φ 值均在 0 与 1 之间, 这符合大量的观测事实, 这是因为在不稳定条件下, 湍流交换机制较强, 使得上下二层风速差变小. 研究结果还表明, 湍流通量在塔层内随高度变化由 (12) 式中的 P 与 Q 函数来近似表征是可行的. 这也是与近地层 KEYPS 方程的根本区别之一.

根据本文对塔层 KEYPS 方程中的系数 α 的研究, 我们发现其值随稳定度的不同略有改变, 但变化的幅度远没有他人文章中描述的那样大^[3] (例如 Yamamoto 认为 α 可在 1.4—4.9 之间变化), 为了分析比较, 我们在塔层 KEYPS 方程和近地层 KEYPS 方程中对 α 值做了参数化试验 (α 分别取值为 1, 5, 10, 25, 50), 计算结果表明在同一 α 值情况下, 二方程的解在 30m 以下差别不大, 但随着高度的增加, 近地层 KEYPS 方程的解逐渐偏离实测数据, 图 1 至图 3 都表明了当高度超出 40m 以上, 近地层 KEYPS 所产生的误差是不可忽略的. 从理论上可以这样来解释: 首先近地层内定义湍流通量不随高度变化, 而在不稳定层结条件下, 近地层厚度大约为 50m, 因此在不超过近地层厚度内, 附录 II

中的近地层 KEYPS 方程才可近似成立,一旦超出近地层范围,则必须考虑湍流通量随高度的变化,即这时近地层 KEYPS 方程将不再适用,而这时塔层 KEYPS 方程中的 P 函数与 Q 函数则刚好弥补了近地层 KEYPS 方程的不足之处,因而塔层 KEYPS 方程的适应高度要比近地层 KEYPS 方程适应高度高得多。其次,由于愈靠近地面,所谓“有效中性”的现象就愈明显,这时机械湍流作用占主导地位^[6],即这时 ζ 值也非常小(因为 $\zeta = z/L$),从 KEYPS 方程中可以发现 α 与 ζ 是乘积关系,在 ζ 较小的情况下,来讨论 α 值的数值扰动作用是微乎其微的,显然,当 $\zeta \rightarrow 0$ 时,KEYPS 方程对 α 值的敏感性将消失,故较低的高度下来讨论 α 值变化显然会带来较大的误差,换言之,只有在比较高的 z 处决定出的 α 值才具有较大的普适性。再次,在贴地处几十厘米乃至几米处来研究梯度与通量关系^[3]对相应的观测手段及数据处理精度要求极高,鉴于早期没有较为成熟的近地层湍流理论,故 Yamamoto 等人研究定出的 α 值是相当粗糙的,实际上 α 没有那么大的变化范围,根据本文研究结果,由于采用了 P 与 Q 函数的订正, α 值变化范围大大缩小,实际应用可取为:当 $\mu > -35$ 时 α 为 4.5; 当 $\mu < -35$ 时, α 为 2.8。

在大气中性层结条件下, (12) 式的解有着它的特殊性,具体的讲就是当 $\zeta = 0$ 时,由塔层 KEYPS 方程可直接积分得到风廓线的解析表达式:

$$u(z) = u_{*0} x^{-1} \left\{ \ln \frac{z}{z_0} - 2 \ln [0.5(1 + P^{1/2}(z, z_T))] - 2[1 - P^{1/2}(z, z_T)] + 2 z_T A^{-1}(\mu) (3\lambda_g)^{-1} [1 - P^{3/2}(z, z_T)] \right\}. \quad (26)$$

在附录 IV 中我们将给出(26)式积分的主要过程。图 4 表明了在中性层结条件下的计算结果与实测资料吻合得相当好,值得说明的是,我们也在 $\zeta = 0$ 时用 Gauss 积分方法将其数值解和(26)式解析解作了比较,发现两者结果在精确到小数点后 6 位是完全一致的,这表明我们用 12 阶高斯积分方法得到的风廓线分布是可靠的。图 4 中的无量纲风切变 Φ 基本上接近于 1.0, 并且在 150 m 以下满足对数律风廓线分布,这和国外有关研究结论比较一致^[10], 因此只能将对数风廓线在中性层结下应用到 150m, 超过该高度必须考虑(26)式中后三项的订正函数,总而言之,由塔层 KEYPS 方程推出的(26)式是表征在中性层结下塔层风廓线的一个较为合理的分布形式。

五、结 论

本文研究得到的塔层 KEYPS 方程能够相当好地反映出中性和不稳定层结条件下的风梯度与湍流通量关系,只要在无量纲风梯度 Φ_i 的解非负的高度以下,该方程具有普适意义,故具有较大的实用价值。在一定的限制条件下,由本文 KEYPS 方程可导出一些熟知的梯度与通量关系。

致谢: 原中国科学院大气物理研究所李兴生等同志对本文工作提供了很大帮助,特此致谢。

附 录

I. 北京 325m 气象铁塔概况

该塔分为 15 层, 80m 以下为对数律分层, 80m 以上为等间距分层, 各层次具体高度为 9.7, 15.0, 32.7, 47.7, 63.2, 80.3, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 240, 280, 320m, 每层分别安装有风速风向仪, 位温梯度仪等仪器, 该塔的数据采样系统符合气象分析精度的要求.

II. (12) 式与近地层 KEYPS 方程关系

由计算可知, $z_T \sim 10^3 \text{m}$, $\lambda_B \sim 10^2 \text{m}$, 故当 z 较小时可有 $z \ll z_T$ 与 $z \ll \lambda_B$ 成立. 又从本文(7b)式可知, 当 $z \rightarrow 0$ 时, $\Phi(\zeta, \mu) \rightarrow \varphi(\zeta)$, 而 $\varphi(\zeta)$ 即为近地层中的无量纲风梯度. 将这些条件应用到(12)式, 则有

$$\varphi^4(\zeta) - \alpha \frac{z}{L} \varphi^3(\zeta) - 1 = 0 \quad (\text{A1})$$

这即为熟知的近地层 KEYPS 方程.

III. (12) 式与 Zbigniew 经验公式的关系

当不稳定程度加大时, 即有 $L \rightarrow 0^+$, 由(12)式可知这时必有 $P(z, z_T)\Phi \ll -\alpha \frac{z}{L}$ 成立, 故(12)式可化为

$$-\alpha \frac{z}{L} \Phi^3 = P^3(z, z_T) Q^4(z, \lambda_B), \quad (\text{A2})$$

即

$$\Phi = \left(-\alpha \frac{z}{L}\right)^{-\frac{1}{3}} P(z, z_T) Q^{\frac{4}{3}}(z, \lambda_B) \quad (\text{A3})$$

而指数 $-\frac{1}{3}$ 是符合实际的, 适当调整参数 α , z_T , λ_B 即可吻合 Zbigniew 经验公式. 用相似方法还可展开获得其它经验公式. 为节省文章篇幅, 这里不再一一推出.

IV. (26) 式的积分主要过程

对(12)式取 $L \rightarrow \infty$ 的极限, 我们可获得

$$P(z, z_T)\Phi^4 = P^3(z, z_T)Q^4(z, \lambda_B), \quad (\text{A4})$$

将 P , Q , Φ 的原始定义形式代入, 即

$$\frac{du}{dz} = u_0(xz)^{-1}\Phi = [1 - (z - z_0)z_T^{-1}]^{1/2} [1 + \alpha(z + z_0)\lambda_B^{-1}], \quad (\text{A5})$$

将(A5)式代入本文(22)式可有积分

$$u(z) = \int_{z_0}^z u_0(xz)^{-1} [1 - (z - z_0)z_T^{-1}]^{\frac{1}{2}} [1 + \alpha(z + z_0)\lambda_B^{-1}] dz, \quad (\text{A6})$$

分离变量积分可将(A6)式化为

$$(u z) = C_1 \int_{z_0}^z z^{-1} \left(1 - \frac{z - z_0}{z_T}\right)^{\frac{1}{2}} dz + C_2 \int_{z_0}^z \left(1 - \frac{z - z_0}{z_T}\right)^{\frac{1}{2}} dz, \quad (\text{A7})$$

其系数 $c_1 = u_0 x^{-1}$, $c_2 = u_0 \lambda_B^{-1}$, 现对比常用积分公式

$$\int (ax + b)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3a} (ax + b)^{3/2} + C_x, \quad (\text{A8})$$

$$\int (ax + b)^{\frac{1}{2}} (cx + d)^{-1} dx = \frac{2}{c} (ax + b)^{\frac{1}{2}} + c^{-1} \sqrt{\frac{bc - ad}{c}}$$

$$\times \{ \ln(\sqrt{c(ax+b)} - \sqrt{bc-ad}) - \ln(\sqrt{c(ax+b)} + \sqrt{bc-ad}) \} + C_4, \quad (\text{A9})$$

而 a, b, c, d 均和 x 积分无关, c_4 为积分常数。而本文 c_1, c_2, z_0, z_T 与 z 积分无关, 故有 (A8) 和 (A9) 式即可得本文 (26) 式。

参 考 文 献

- [1] Webb, E. K., 1970, Profile relationships, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **96**, 67—90.
- [2] Businger, J. A., J. C. Wyngaard, Y. Izumi and E. F. Bradley, 1971, Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 181—189.
- [3] Yamamoto, G., 1959, Theory of turbulent transfer in non-neutral conditions, *J. Meteor. Soc. Japan*, **37**, 60—69.
- [4] Lumley, J. L., and Panofsky, H. A., 1964, The structure of atmospheric turbulence, Interscience Publ., 239.
- [5] Zbigniew, S., 1986, On similarity in the atmospheric boundary layer, *Boundary-Layer Meteor.*, **34**, 377—397.
- [6] Panofsky, H. A., 1973, Tower Micrometeorology, In: Workshop on Micrometeorology (D. A. Haugen, ed.), Amer. Met. Soc. Boston, 151—176.
- [7] Arya, S. P. S., 1975, Gwostrophic drag and heat transfer relation for the atmospheric boundary layer, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **101**, 147—161.
- [8] Blackadar, A. K., 1962, The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere, *J. Geophys. Res.*, **48**, 3095—3102.
- [9] Blackadar, A. K., 1979, Hight resolution Models of the PBL, In: *Advance in Environment Science and Engineering* (J. R. Pfafflin and E. N. Ziegler ed.), Vol. **1**, 1—50, Gordon and Breach.
- [10] Arya, S. P. S., 1982, Atmospheric Boundary Layers over Homogeneous Terrain, In: *Engineering Meteorology* (E. Plate ed.), Elsevier Scientific Publ. Co., 237—267.