

浅水波方程在全球上的变时间步长积分

刘金达

(国家气象局北京气象中心)

提 要

本文讨论了浅水波方程在全球上的变时间步长(以下简称变步长)积分,并讨论了两步Lax-Wendroff的变时间步长(以下简称TLW变步长)积分,发现积分结果对平滑系数 κ 很敏感,必须选择合适,并将常数时间步长(以下简称定步长)的积分结果和两种变步长的积分结果进行比较,发现用实际资料作预报,变步长法的预报均方根误差比定步长法的小,还发现变步长的24小时预报对近极地系统移动偏慢的问题比定步长的有较大的改善,变步长积分的计算稳定性也优于定步长。

一、引 言

一般的有限区域数值天气预报模式,若积分时间太长,侧边界条件必然传播到预报区域内部,影响预报结果,为了消除人为引进的侧边界条件对模式预报结果的影响,数值天气预报模式或大气环流试验模式最好采用全球模式,设计全球模式采用球坐标是合理的,但是用有限差分方法积分大气动力方程,特别是采用等经纬度网格时,由于经线向极地辐合,造成近极地纬圈上网格距较小,有时可能引起计算不稳定,在近极地要满足Courant-Friedrichs-Lewy条件,必须采用较小的时间步长,这样必将造成计算时间太长,一般采用的常数时间步长不是很小,但必须采用近极地滤波方法使计算稳定,由于滤波法滤去了快波,因此往往造成近极地系统移动偏慢,甚至西退的现象,为此,我们认为采用变步长积分方法是最合适的。

作为对大气的简单近似,我们用浅水波方程近似大气动力方程,但是变步长的方法也能适用于复杂的多层全球大气模式。

二、基本方程和初值

球坐标中的浅水波方程是

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (vU) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (uV \cos \varphi) \right] - V \left(f + \frac{u \tan \varphi}{a} \right) + \frac{\Phi}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0, (1)$$

1986年6月25日收到,1987年4月5日收到修改稿。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (vU) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (vV \cos \varphi) \right] + U \left(f + \frac{u \tan \varphi}{a} \right) + \frac{\Phi}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (V \cos \varphi) \right] &= 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

其中 λ, φ 分别为经度和纬度, u, v 分别为风速分量, $\Phi = hg$, $U = u \Phi$, $V = v \Phi$, h 为自由表面高度, a 为地球半径, g 为重力加速度, 科氏参数 $f = 2\Omega \sin \varphi$, Ω 为地球自转角速度.

积分的初值是 Haurwitz 波, 它的表达式是:

$$\left. \begin{aligned} u &= a \{ \omega c + k [RC^{R-1} - (1+R)C^{R+1}] \cos R\lambda \}, \\ v &= -akRC^{R-1} \sin \varphi \sin R\lambda, \\ gh &= gH_0 + a^2 \left\{ \omega \left(\Omega + \frac{\omega}{2} \right) C^2 + \frac{K^2}{4} C^{2R} [(R+1)C^2 + 2R^2 - R - 2 - 2R^2 C^{-4}] \right. \\ &\quad + \frac{2(\Omega + \omega)k}{(R+1)(R+2)} C^R [R^2 + 2R + 2 - (R+1)^2 C^2] \cos R\lambda \\ &\quad \left. + \frac{k^2}{4} C^{2R} [(R+1)C^2 - (R+2)] \cos 2R\lambda \right\} \end{aligned} \right\} (2)$$

其中 $C = \cos \varphi$, R 为波数, H_0 为平均高度 (取为 8000m), 参数 $\omega = k = 7.292 \times 10^{-6}/s = \Omega/10$.

另外, 我们还用华盛顿发布的全球网格点 ($5^\circ \times 5^\circ$) 分析报, 全球 500hPa 高度场作为初始高度场, 初始风场用地转风作预报.

三、基本方程的积分

我们采用等经纬度网格, $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 5^\circ$. 因为极点是奇点, 我们不将极点取作网格点, 最南和最北的网格点分别是 $\pm(90^\circ - \Delta\varphi/2)$. 不过, 在离极点最近的纬圈上计算经向差分和平均时, 使用该纬圈上沿经向越过极点与该点相对应的同纬度的网格点的值 (不过, 纬圈上的网格点数必须是偶数), 为了使风的方向一致, 用 $-u, -v$ 代替原来对应网格点的 u, v .

空间差分格式采用二次精度的守恒格点, 所有的变量都定义在相同的格点上.

1. 变步长积分法

因为我们采用等经纬度网格, 纬圈上的网格距离由极地向赤道增大, 网格距增大的因子是 $\cos \varphi$, 所以理所当然地我们将时间步长取为 $\Delta t(\varphi) = DT \cos \varphi$. 它是纬度的余弦函数, DT 为赤道上的时间步长. 因为在某一纬圈上积分时南北邻近的纬圈上的气象要素值不在同一时间, 我们必须将南北邻近纬圈上的气象要素值进行时间内插到中间的纬圈积分的时

间,我们用线性内插的方法进行时间内插.这是假定在积分的时间步长内气象要素的变化是匀速的.这样假定是合理的.

为了每 24 小时输出预报结果,每隔若干小时作为共同时间,每一纬圈必须积分到共同时间,然后在共同时间起步积分,起步积分用向前差,其余全为中央时间差,但在接近共同时间的积分可能不是标准的中央时间差.图 1 是时间积分的示意图,共同时间假定为 12 小时,以第 j 个纬圈的积分为例,划虚线的地方是 $j-1$ 和 $j+1$ 纬圈上的要素值,要时间内插到 j 纬圈的积分时间.

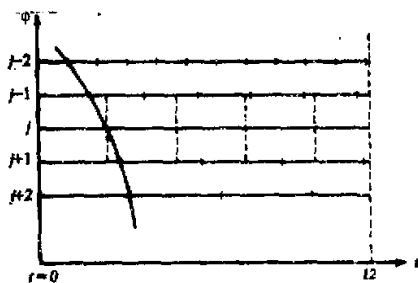


图 1 变步长积分示意图

其中

$$UT = -\frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (uU) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (uV \cos \varphi) \right] + V \left(f + \frac{u \tan \varphi}{a} \right) - \frac{\Phi}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda},$$

$$VT = -\frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (vU) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (vV \cos \varphi) \right] - U \left(f + \frac{u \tan \varphi}{a} \right) - \frac{\Phi}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

$$\Phi T = -\frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (V \cos \varphi) \right].$$

定义某变量 α 的平均算子

$$\bar{\alpha}^{4\varphi} = \frac{1}{4} (\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i,j-1}). \quad (4)$$

我们定义两步 Lax-Wendroff 格式为

$$\left. \begin{aligned} U^{*t+1} &= k (\bar{U}^{4\varphi})^t + (1-k) U^t + \frac{\Delta t_j}{2} * UT^t, \\ V^{*t+1} &= k (\bar{V}^{4\varphi})^t + (1-k) V^t + \frac{\Delta t_j}{2} * VT^t, \\ \Phi^{*t+1} &= k (\bar{\Phi}^{4\varphi})^t + (1-k) \Phi^t + \frac{\Delta t_j}{2} * \Phi T^t, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} U^{t+1} &= U^t + \Delta t_j * UT^{*t+1}, \\ V^{t+1} &= V^t + \Delta t_j * VT^{*t+1}, \\ \Phi^{t+1} &= \Phi^t + \Delta t_j * \Phi T^{*t+1}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2. 两步 Lax-Wendroff 变步长积分法

我们将浅水波方程 (1) 写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= UT, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= VT, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \Phi T, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\Delta t_j = \Delta t(\varphi) = DT \cos \varphi$.

(5) 式中的 k 为平滑系数, 它的大小直接影响积分结果, 而且积分结果对 k 的大小很敏感, 必须选择恰当. 为此, 我们用优选法中的黄金分割法^{[4] 1)} 确定 k 的大小.

在接近共同时间 T , 如果 $T - t_j \leq \Delta t_j/2$, 我们用向前差; 如果 $\Delta t_j/2 < T - t_j < \Delta t_j$, 第二步的时间积分采用非标准的中央差.

3. 定步长积分法

定步长积分法没有什么特殊之处, 只是对高纬度的 $\partial \Phi / \partial t$, $\partial U / \partial t$, $\partial V / \partial t$ 沿纬圈进行了 Fourier 滤波. 在每个纬圈上保留的最大波数 $\mu_{\max}$ 是:

$$\mu_{\max} = \text{IFIX} \left[\frac{72}{L} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \right] - M \quad (7)$$

其中 φ 为需要滤波的纬度, φ_0 为最高不滤波的纬度, IFIX 表示对括号内的值取其整数部分. (7) 式右端第一项表示在 φ 纬圈上所保留的最大波数的波长近似等于 φ_0 纬圈上格距的 L 倍. M 的作用是使得保留的最大波数低于 L 倍格距 (φ_0 纬圈上的格距) 波的波数. 通过试验发现 $L=3$, $0 < M \leq 3$ 时计算是很稳定的. 这和 Orszag^[5] 1971 年的结果是一致的.

四、变步长积分与定步长积分比较

在附录里我们作了变步长积分的一维线性平流方程的稳定性分析. 另外, 我们还做了实际积分试验. 试验是用以上三种方法不加平滑地积分. 初始场是波数为 6 的 Haurwitz 波和 1979 年 1 月 9 日 500hPa 高度场的实际资料. 在计算机上积分到产生计算溢出为止. 积分的天数列于表 1 中. 表中 CONDT 为定步长法, VDT 为变步长法, TLWVDT 为 TLW 变步长法. 从表 1 可以看出 TLW 变步长法积分的时间最长, 两种初值都可以积分 40 天以上. 这是因为 TLW 变步长方法本身带有平滑的原因. 但变步长和定步长都不加平滑的情况下, 变步长比定步长积分要稳定.

除了稳定性比较之外, 我们还对这三种方法的积分结果进行相位、均方根误差和 S_1 评分的比较. 使用的初值仍然是 Haurwitz 波和实际资料, 并且不加平滑地积分.

由于 Haurwitz 波在水平无辐散的情况下它能以 Rossby-Haurwitz 相速自西向东传播, 并保持波幅和形状不变. 虽然我们使用的浅水波方程并不是水平无辐散, 但在进行相位、均方根误差和 S_1 评分比较时, 我们还是以传播的 Haurwitz 波为真值进行比较. 表 2 和表 3 分别是波数为 4 和 6 的计算结果. 由于 Haurwitz 波的对称性, 我们只给出北半球的结果.

相位分析比较是将积分结果 (高度场) 沿每一纬圈进行 Fourier 展开, 得到每一个纬圈

表 1 三种积分方法积分稳定的天数

方法	初值 天数	Haurwitz 波 波数 = 6	实际资料 1979. 1. 9. 12Z
CONDT		18	17
VDT		26	22
TLWVDT		> 40	> 40

1) 刘金达, 1979, Helmholtz 方程的差分数值解法 (未发表).

上波数为4或6的相位,然后作半球平均和近极地(近极地的4个纬圈)平均.表2和表3中的PHASE就是相位分析结果.NHS是北半球的平均相位,POLE是近北极的平均相位.其中理论值就是根据Rossby-Haurwitz相速计算出的Haurwitz波从西向东移动的角速度 v 而求得. v 的公式为

$$v = \frac{R(3+R)\omega - 2\Omega}{(1+R)(2+R)}$$

从波数为4和6的Haurwitz波相位分析结果看(表2和表3),变步长第1天的预报,无论是半球平均还是极地平均都比定步长的要好,特别是第1天的极地平均相位比定步长的好得多,但第2天以后的相位分析,变步长和定步长相差不多.TLW变步长的相位结果要差一点.

关于均方根误差(表2和表3中RMS)的比较,我们算了全球的均方根误差(表中的G栏)和近极地的均方根误差(表中的POLE栏).对于波数为4的Haurwitz波的第1天预报,三种方法的全球均方根误差相同,第2天以后变步长法和TLW变步长法比定步长法要差.近北极的均方根误差,TLW变步长的最好,变步长的比定步长的差一点.对于波数为6的Haurwitz波的预报,变步长的全球均方根误差也比定步长的差一点,TLW变步长的误差最大.近北极的均方根误差,变步长的也比定步长的差,TLW变步长法的第1和第2天预报最好,但第3天以后的预报就较差.

关于 S_i 评分比较,我们也算了全球的和近极地的.对于波数为4的Haurwitz波预报,变步长和TLW变步长的全球 S_i 评分比定步长的要差一点.但是近极地的 S_i 评分,变步长和TLW变步长的比定步长的要好.对于波数为6的Haurwitz波预报,情况和波数为4的相同.

我们用美国华盛顿发布的500hPa网格点($5^\circ \times 5^\circ$)分析资料(1984年1月11日00Z)作初始场,用三种方法作了10天预报,并与实况作均方根误差和 S_i 评分分析.同样也是作了全球的和南北极地三个范围的均方根误差和 S_i 评分分析,列在表4中.

对于全球的均方根误差,变步长的第1天预报比定步长的稍差,第2天的相同,第3天以后的都比定步长的好.TLW变步长的第1天预报和定步长的相同,第2天以后的都比定步长的好.对于北极地区的均方根误差,变步长的第1天预报比定步长的稍差,第2天到第9天的都比定步长的好.但TLW变步长的比定步长的要稍差一点.对于南极地区的均方根误差,变步长的和定步长的各有好坏,相差不大.但TLW变步长的要差一点.

关于全球的 S_i 评分情况,TLW变步长的评分最好,变步长的比定步长的好.北极地区的 S_i 评分也是TLW变步长的最好.但变步长的比定步长的要差.南极地区的 S_i 评分,TLW变步长法较差,变步长的和定步长的各有好坏.

总的来说,对于用Haurwitz波作为初始场的预报,变步长和TLW变步长与定步长比较各有好坏,相差不多.这可能是因为Haurwitz波是单波,即使波数为6的Haurwitz波的波长也不是很短.用定步长法积分时,除了在 $\varphi = 87.5^\circ$ (N.S)纬圈上,滤波会影响Haurwitz波(波数4和6都受影响)之外,在其它几个滤波纬圈上都不影响Haurwitz波.所以变步长法未能显示其优越性.但是用实际资料作初始场的预报,变步长和TLW变步长的预报比定步长的要好一些.这是真正地显示了变步长法的优越性.

表2 波数为4的 Haurwitz 波相位 (PHASE) 均方根误差 (RMS) 和 S_1 评分计算结果

预报天数		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PHASE	理论值	0	9.6	19.3	28.9	38.5	-41.9	-32.2	-22.6	-13.0	-3.4	6.3
	NHS	CONDT	0	7.5	16.4	24.8	28.8	39.0	-31.9	-26.8	-17.6	-13.0
		VDT	0	8.5	16.1	24.4	33.8	36.8	-33.9	-25.5	-19.8	-12.8
		TLWVDT	0	5.7	14.7	23.6	31.5	39.3	-32.5	-29.1	-20.9	-13.0
	POLE	CONDT	0	4.9	14.5	21.8	9.4	24.4	-9.8	-18.0	-7.6	-17.1
		VDT	0	9.3	13.2	20.5	32.2	15.0	-18.2	-11.1	-16.4	-15.3
		TLWVDT	0	-3.0	8.7	19.4	26.5	32.2	-26.3	-16.8	-8.4	-0.8
	G	CONDT		2.9	5.5	8.1	10.8	12.3	14.3	15.6	16.8	18.4
		VDT		2.9	5.7	8.2	11.1	12.9	15.1	16.7	18.0	19.6
		TLWVDT		2.9	6.0	7.7	10.5	12.5	15.2	18.2	20.6	24.2
	POLE	CONDT		1.3	3.3	5.4	7.5	8.9	9.6	9.8	7.7	6.5
		VDT		1.3	4.3	6.1	8.4	11.3	11.7	13.1	11.7	9.9
		TLWVDT		0.8	3.1	3.5	2.7	4.6	5.1	6.9	6.3	6.4
	G	CONDT		6.9	11.8	16.3	21.1	23.6	27.5	29.9	32.5	35.7
		VDT		6.8	12.1	16.3	21.4	23.8	28.1	30.6	33.3	36.8
		TLWVDT		7.4	13.9	16.6	22.0	25.3	29.8	35.0	39.0	45.5
	POLE	CONDT		13.2	15.5	19.3	23.7	26.1	30.2	26.9	24.4	24.2
		VDT		11.4	16.2	15.5	17.6	18.5	24.2	23.3	20.2	20.8
		TLWVDT		8.3	13.9	12.8	11.9	15.7	19.2	22.2	25.3	29.5

注: CONDT 为定步长法, VDT 为变步长法, TLWVDT 为 TLW 变步长法. NHS 为北半球平均的相位, POLE 为极地平均, G 为全球平均.

表3 波数为6的 Haurwitz 波相位 (PHASE)、均方根误差 (RMS) 和 S_1 评分计算结果

预报天数		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PHASE (°)	理论值	0	21.9	-16.2	5.7	27.7	-10.4	11.5	-26.6	-4.7	17.2	-20.8
	NHS	CONDT	0	16.4	-18.4	-2.1	16.1	-20.2	0.6	14.6	-8.3	7.8
		VDT	0	18.6	-18.7	-5.1	14.8	-21.5	0.6	10.6	-10.9	6.2
		TLWVDT	0	14.3	-18.4	-1.4	5.9	-8.4	-15.0	4.2	19.3	-20.0
	POLE	CONDT	0	6.5	-10.7	-3.0	10.2	-14.7	3.9	1.2	2.3	5.1
		VDT	0	16.8	-10.5	-15.0	5.1	-19.1	4.6	-13.4	-5.4	2.1
		TLWVDT	0	-0.4	-5.9	5.0	-15.1	9.8	-25.8	-3.8	16.9	-23.5
	G	CONDT		5.2	9.9	14.0	19.9	25.5	30.1	32.3	30.9	29.9
		VDT		5.2	10.1	15.0	19.9	26.0	31.3	32.9	31.4	31.1
		TLWVDT		8.6	15.7	21.9	26.4	31.9	35.6	36.1	27.2	37.2
	POLE	CONDT		1.7	2.5	4.8	8.9	14.4	17.9	20.0	20.0	18.7
		VDT		2.4	3.4	5.6	10.7	17.0	22.5	24.5	23.0	24.4
		TLWVDT		0.99	1.7	9.3	14.7	16.5	19.3	24.5	27.1	29.0
RMS (10m)	G	CONDT		15.4	27.8	37.3	47.4	57.2	63.9	67.7	61.7	60.6
		VDT		15.0	28.3	39.4	47.1	57.0	64.7	66.9	60.5	61.0
		TLWVDT		25.7	43.9	56.0	63.8	75.3	83.3	83.5	82.0	78.3
	POLE	CONDT		12.2	11.9	19.7	25.4	36.3	40.3	41.2	40.9	42.2
		VDT		11.2	10.5	10.9	18.1	22.4	26.2	30.5	34.8	30.1
		TLWVDT		5.6	14.8	29.2	26.3	50.9	48.8	33.4	56.9	75.2
S_1 (%)	G	CONDT		15.4	27.8	37.3	47.4	57.2	63.9	67.7	61.7	60.6
		VDT		15.0	28.3	39.4	47.1	57.0	64.7	66.9	60.5	61.0
		TLWVDT		25.7	43.9	56.0	63.8	75.3	83.3	83.5	82.0	78.3
	POLE	CONDT		12.2	11.9	19.7	25.4	36.3	40.3	41.2	40.9	42.2
		VDT		11.2	10.5	10.9	18.1	22.4	26.2	30.5	34.8	30.1
		TLWVDT		5.6	14.8	29.2	26.3	50.9	48.8	33.4	56.9	75.2

注: CONDT 为定步长法, VDT 为变步长法, TLWVDT 为 TLW 变步长法. NHS 为北半球平均的相位, POLE 为极地平均, G 为全球平均.

值得注意的是短期预报的相位分析,变步长比定步长要好,特别是极地附近变步长的相位分析结果比定步长的要好得多.另外,TLW 变步长的相位分析结果比较差的原因可能是因为TLW 变步长法本身带有平滑,由于平滑造成系统移动偏慢.

为了更直观地说明三种方法的积分结果好坏,下面给出部分预报图(限于篇幅我们不能给出所有预报图).图 2 是积分Haurwitz 波(波数为6)的高度场,由于对称性只给出北半球的第一个四分之一象限的高度场.图 2 中(a)为波数为 6 的Haurwitz 波的初始高度场,(b)为定步长法的预报,(c)为变步长法的预报图,(d)为 TLW 变步长法的预报图.但变步长积分时每 6 小时加一次平滑,平滑系数为0.0054853,DT=900s.定步长积分时每 3 小时加一次平滑,平滑系数为0.0125,Δt=360s.TLW 变步长积分时不加平滑,因为它本身带有平滑,DT=1800s.

从图 2 可以看出,第3 天的预报三种方法都相差不大,但第6 天预报三种方法相差就较大.就Haurwitz 波的形状来看,TLW 变步长法的预报图与Haurwitz 波的初值形状很相象,这可能是图因为TLW 变步长法本身带有平滑,使得浅水波方程中的辐散量为减小,致使预报过程相当于无辐散过程,使得Haurwitz 波的形状保持不变.甚至第9 天的预报仍保持着Haurwitz 波的形状.变步长法的第6 天预报虽然使得 Haurwitz 波 的 形 状

表 4 实际资料的均方根误差和S_i 评分计算结果

预 报 天 数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
RMS (10m)	G	CONDT	5.1	7.8	9.1	10.6	12.5	13.3	13.7	14.1	14.8	15.8
		VDT	5.2	7.8	8.7	9.9	11.6	12.6	13.4	13.7	14.5	15.7
		TLWVDT	5.1	7.6	8.7	10.3	11.8	12.8	13.6	13.8	14.0	15.2
	NP	CONDT	6.6	10.0	14.2	16.8	16.9	16.2	12.9	13.1	14.1	18.0
		VDT	6.8	9.7	12.0	12.7	12.5	11.8	11.7	12.9	15.3	19.1
		TLWVDT	6.9	10.3	14.4	16.9	16.8	17.5	16.6	15.6	15.1	18.0
	SP	CONDT	4.6	5.2	5.0	4.7	6.3	8.6	13.5	17.4	19.4	21.2
		VDT	5.4	6.3	5.3	4.5	5.9	8.1	13.1	17.1	18.6	21.2
		TLWVDT	4.9	6.0	5.1	5.0	7.6	9.7	14.8	18.4	19.8	22.2
S _i (%)	G	CONDT	38.7	50.6	55.8	59.5	63.2	65.3	67.4	69.4	68.8	70.3
		VDT	38.7	50.6	55.0	59.4	63.1	65.0	66.4	68.4	69.1	70.8
		TLWVDT	38.1	49.2	53.4	58.4	61.0	63.9	65.9	67.6	67.2	70.3
	NP	CONDT	43.6	67.9	87.0	85.3	79.0	84.1	85.8	98.1	94.7	99.7
		VDT	45.5	66.2	82.6	87.0	88.4	92.7	93.5	99.7	104.8	109.0
		TLWVDT	44.2	64.3	81.8	79.3	74.3	78.0	75.0	76.4	83.1	94.2
	SP	CONDT	65.5	79.2	79.4	82.5	82.9	88.3	94.2	94.0	89.1	88.6
		VDT	69.3	83.5	81.7	83.3	82.1	85.2	88.4	89.1	87.2	92.6
		TLWVDT	66.2	82.7	82.3	83.6	86.5	93.1	94.3	99.4	97.8	98.6

注: 用1984 年1 月11 日 00Z 500hPa 高度场作初值. NP 为北极地区平均, SP 为南极地区平均.
其它说明同表 2.

破裂,产生了切断低压,但切断低压的强度减弱不多.而定步长的切断低压比变步长的弱很多,致于第9天的定步长预报基本上使 Haurwitz 波崩溃了,而变步长的预报比定步长的好得多.

五、结 束 语

我们认为在数值天气预报中,时间积分是一个很重要的问题.因为天气尺度系统的演变是较慢的,由于重力波的存在使得时间步长不能取得很大,于是就提出半隐式时间积分方法,加大了时间步长,但是半隐式积分法影响了重力波的积分精度.由于采用了球坐标的等经纬度网格,纬向网格距向极地缩小,也使时间步长不能取得很大,所以我们提出用变步长积分方法来解决这问题.

在前面的三种方法积分结果的分析比较过图2波数为6的 Haurwitz 波预报图(高度场)程中,无论是相位分析或是均方根误差和 S_1 评分,我们发现除了由于积分方法优劣之外,还有 Haurwitz 波本身的稳定性问题和重力振荡问题.这些问题不属本文讨论范围,所以我们在此不多赘述.

致谢: 作者对李润贤、王宗皓两同志提出有益的意见表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Grimmer, M. and Shaw, D. B., 1967, Energy-preserving integration of the primitive equations on the sphere, *Quar. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 93, No. 397, p. 337.
- [2] Gourlay A. R. and Morris J. L., 1968, A multistep formulation of the optimized Lax-Wendroff method for nonlinear hyperbolic systems in two space variables, *Math. Comp.*, Vol. 22, No. 104, p. 715.
- [3] Phillips N. A., 1959, Numerical integration of the primitive equations on the hemisphere, *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 87, No. 9, p. 333.
- [4] 华罗庚, 1981, 优选学, 科学出版社.
- [5] Orszag, S. A., 1971, On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 28, No. 6, p. 1074.

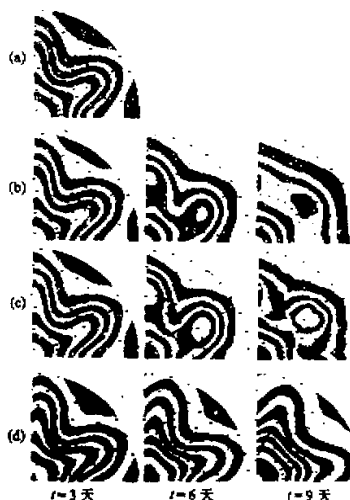
附 录

下面我们分析一维线性平流方程用变步长法积分的稳定性. 一维线性平流方程为

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

其中 v 为常数. 用变步长积分法将(1)式写为差分方程

$$F_j^{tj+1} - F_j^{tj-1} = -\lambda_j (F_{j+1}^* - F_{j-1}^*) \quad (2)$$



其中 $\lambda_j = \frac{v\Delta t_j}{\Delta y} = \frac{vDT \cos \varphi_j}{\Delta y}$, F_{j+1}^* , F_{j-1}^* 分别表示 j 点的南、北邻点线性时间内插到 t_j 时间的值

$$\left. \begin{aligned} F_{j+1}^* &= (1-\tau_s)F_{j+1}^{t_s} + \tau_s F_{j+1}^{t_s+1} \\ F_{j-1}^* &= (1-\tau_N)F_{j-1}^{t_N} + \tau_N F_{j-1}^{t_N+1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tau_s &= \frac{t_j \Delta t_j - t_s \Delta t_s}{\Delta t_s} & 1 \geq \tau_s \geq 0 \\ \tau_N &= \frac{t_j \Delta t_j - t_N \Delta t_N}{\Delta t_N} & 1 \geq \tau_N \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

令波解

$$F_j^{t_j} = A e^{i(v t_j \Delta t_j + \mu j \Delta y)} \quad (5)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, A 为常数波幅, 将波解 (5) 和 (3) 式代入 (2) 式得

$$\begin{aligned} e^{i v \Delta t_j} - e^{-i v \Delta t_j} &= -\lambda_j \{ [(1-\tau_s)e^{-i v \tau_s \Delta t_s} + \tau_s e^{i v (1-\tau_s) \Delta t_s}] e^{i \mu \Delta y} \\ &\quad - [(1-\tau_N)e^{-i v \tau_N \Delta t_N} + \tau_N e^{i v (1-\tau_N) \Delta t_N}] e^{-i \mu \Delta y} \} \end{aligned} \quad (6)$$

因为我们在 t_s 和 t_s+1 , t_N 和 t_N+1 时间间隔内进行线性内插, 我们对 (6) 式右端方括号内的指数函数进行 Taylor 展开时, 只取前两项成为 Δt 的线性函数就够了. 如

$$e^{-i v \tau_s \Delta t_s} = 1 - i v \tau_s \Delta t_s$$

其余类推. 代入 (6) 式得

$$e^{i v \Delta t_j} - e^{-i v \Delta t_j} = -\lambda_j [e^{i \mu \Delta y} - e^{-i \mu \Delta y}] \quad (7)$$

利用 Euler 公式可得

$$\sin v \Delta t_j = -\lambda_j \sin \mu \Delta y \quad (8)$$

要使波解 (5) 稳定, 必须要有

$$\lambda_j = \frac{v \Delta t_j}{\Delta y} \leq 1$$

因为 $\Delta t_j = DT \cos \varphi_j$, 所以

$$\frac{vDT}{\Delta y} \leq 1 \quad (9)$$

就能保证计算稳定.