

分层均匀旋转椭球体对偏振电磁波的散射理论及数值计算

王宝瑞 嵇驿民

(南京气象学院)

提 要

本文在旋转椭球坐标系中求解麦克斯韦方程, 得到了二层旋转椭球体对偏振电磁波的散射解, 并利用所得公式, 给出了扁旋转椭球状表面附水冰粒对雷达波散射的数值计算结果。

一、引 言

宏观粒子对电磁波的散射问题, 通常归结为在粒子表面边界条件下求解麦克斯韦方程, 在单色平面入射波的限制下则归结为求解亥姆霍兹方程。由于宏观粒子散射机制的复杂性使精确求解极为困难, 通常采用以下二种方法来获得散射场准解析解或数值解: (1) 解析法^[1-3], 通过分离变量将偏微分方程分解成几个常微分方程求解, 用本征函数的无穷级数来表示散射电磁场。这种方法要求散射体的表面与11种正交曲线坐标系中某一坐标面吻合, 对粒子的形状有较大限制, 对球和圆柱可得到散射解析解, 对其它坐标系则计算极为复杂。(2) 积分法^[4-6], 先求单位源的场, 然后通过源分布积分求出散射场。积分与坐标系无关, 因此对粒子的形状限制小, 但积分往往很困难, 也很难对散射问题作定性讨论, 这种方法适用于求近似解和数值解。

本文采用解析法, 在旋转椭球坐标系中分离变量, 并将场表示成旋转椭球矢量波函数的无穷级数形式, 通过边界条件方程建立了求解级数系数的线性方程, 由此得到了分层均匀旋转椭球散射场的准解析解。

二、散射解的级数形式

在各向同性均匀介质中, 设电磁场随时间作周期变化, 即

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E} e^{i\omega t}, \quad \vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{H} e^{i\omega t}$$

则无源区的麦克斯韦方程可简化为

$$\nabla \wedge \vec{H} = i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \kappa^2 k_0 \vec{E} \quad (1)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -i \mu_r \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} k_0 \vec{H} \quad (2)$$

或者

1987年10月4日收到, 1987年12月30日收到修改稿。

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (3)$$

上述各式中, $k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ 为真空中的波数, ω 是电磁场振动角频率, c_0 是真空中光速, λ_0 是入射波长, $i = \sqrt{-1}$, κ 为复折射指数, $\kappa^2 = \epsilon_r - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$, ϵ_0 和 μ_0 是真空中介电常数和导磁率, ϵ_r 和 μ_r 是介质的相对介电常数和相对导磁率, 这里取 $\mu_r = 1$, σ 为介质的电导率, $k = k_0 \kappa$ 为介质中的波数.

在本文处理的二层旋转椭球散射问题中, 以 k_1 , k_2 和 k_3 分别表示粒子内核、外壳和环境空间中介质的波数, 用旋转椭球坐标系 (η, ξ, ϕ) 中径向坐标值 ξ_1 和 ξ_2 表示粒子二个边界的形状特征, 在长旋转椭球 (a_2 为旋转轴) 坐标系中 $\xi_2 = 1/\sqrt{1 - (b_2/a_2)^2}$, $\xi_1 = 1/\sqrt{1 - (b_1/a_1)^2}$, 在扁旋转椭球坐标系 (b_2 为旋转轴) 中 $\xi_2 = 1/\sqrt{(a_2/b_2)^2 - 1}$, $\xi_1 = 1/\sqrt{(a_1/b_1)^2 - 1}$, 其中 a_2 和 b_2 是外边界旋转椭球面的半长轴和半短轴长, a_1 和 b_1 是内边界面相应的半长轴和半短轴长.

由于在旋转椭球坐标系中 (3) 式不能分离变量, 我们通过对 (1)、(2) 式作洛伦兹规范变换

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \nabla \Lambda \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla \psi - i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} k_0 \vec{A} \end{aligned} \quad (4)$$

利用标势方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (5)$$

和矢势方程

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0 \quad (6)$$

来求散射场.

Stratton^[7] 对 (5) 式在长旋转椭球坐标系中分离变量, 得到了标势函数的形式

$$\psi_{mn}^{(j)}(c; \eta, \xi, \phi) = S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(j)}(c, \xi) \cos m\phi \quad (7)$$

其中 $c = k d_0$ (d_0 是长旋转椭球的半焦距) 反映了散射粒子的基本物理特性, 下标 e 和 0 相应于偏振角波函数取偶函数 ($\cos m\phi$) 或取奇函数 ($\sin m\phi$), 上标 j 相应于长旋转椭球辐径波函数

$$\begin{aligned} R_{mn}^{(j)}(c, \xi) &= \frac{\left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) \frac{(m+r)!}{r!}} \sum_{r=0,1}^{\infty} i^{r+m-n} d_r^{mn}(c) \\ &\quad \cdot \frac{(r+2m)!}{r!} Z_{m+r}^{(j)}(c\xi) \end{aligned} \quad (8)$$

取第 j 类 ($j = 1, 2, 3, 4$), 当 $j = 1$ 时 $Z_{m+r}^{(1)}(c\xi)$ 取球贝塞尔函数, 而

$Z_{m+n}^{(1)}(c\xi)$ 为球汉克尔函数, 由于要求散射解非奇异, 故在粒子内核只能选择第1类辐径波函数, 在环境空间只能选择第3类辐径波函数. $S_{mn}(c, \eta)$ 是第1类长旋转椭球角波函数, 在 $\eta = \pm 1$ 处保持有限, $S_{mn}(c, \eta)$ 可以展开成缔合勒让德函数 $P_{m+r}^n(\eta)$ 的级数形式

$$S_{mn}(c, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^n(\eta) \quad (9)$$

(8)与(9)式中 $\sum_{r=0,1}^{\infty}$ 表示当 $n \rightarrow m$ 为偶数时, 求和指数 r 为偶数, 求和从 $r=0$ 到 $r=\infty$, 当 $n-m$ 为奇数时 r 取奇数且求和从 $r=1$ 到 $r=\infty$, m 及 n 都是整数 ($m=0, 1, 2, \dots$; $n=m, m+1$). $d_r^{mn}(c)$ 为级数展开系数, 利用缔合勒让德函数的递推公式, 可以得到 $d_r^{mn}(c)$ 满足的递推关系

$$\begin{aligned} & \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)c^2}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} d_{r+2}^{mn}(c) + \left[(m+r)(m+r+1) - \lambda_{mn}(c) \right. \\ & \left. + \frac{2(m+r)(m+r+1)-2m^2-1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} c^2 \right] d_r^{mn}(c) + \frac{r(r-1)c^2}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)} \\ & + d_{r-2}^{mn}(c) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

利用(10)式及 $S_{mn}(c, \eta)$ 在 $\eta = \pm 1$ 处的特性可以计算展开系数 $d_r^{mn}(c)$, (10)式中 $\lambda_{mn}(c)$ 为本征值, 在数值计算时, $\lambda_{mn}(c)$ 和 $d_r^{mn}(c)$ 的确定极为重要, 当 c 为复数时, 计算随 $|c|$ 的增大而变得困难.

Flammer^[8] 证明了在一般情况下矢势方程(6)的解可以用标势函数来表示

$$\vec{A} = \frac{1}{k_0} \sum_{m,n} (a_{mn} \vec{M}_{mn} + b_{mn} \vec{N}_{mn} + c_{mn} \vec{L}_{mn}) \quad (11)$$

其中 $\sum_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty}$, a_{mn} , b_{mn} 和 c_{mn} 都是待定系数

$$\vec{L}_{mn} = \nabla \psi_{mn}, \quad \vec{M}_{mn} = \nabla \wedge \vec{R}_0 \psi_{mn}, \quad \vec{N}_{mn} = \frac{1}{k} \nabla \wedge \vec{M}_{mn} \quad (12)$$

$\vec{R}_0$ 为位置矢量, 在长旋转椭球坐标系中

$$\vec{R}_0 = \left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \eta d_0 \vec{e}_\eta + \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \xi d_0 \vec{e}_\xi \quad (13)$$

其中 $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi$ 是长旋转椭球坐标系中沿 η 和 ξ 轴的单位矢量. 由(7), (12)和(13)式可得到 $\vec{M}_{mn}$ 和 $\vec{N}_{mn}$ 的分量形式

$$\begin{aligned} M_{\xi mn, \eta}^{(j)}(c; \eta, \xi, \phi) &= \frac{m\xi}{(\xi^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}} S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(j)}(c, \xi) \sin m\phi \\ M_{\xi mn, \xi}^{(j)}(c; \eta, \xi, \phi) &= \frac{-m\eta}{(\xi^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}} S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(j)}(c, \xi) \sin m\phi \\ M_{\xi mn, \phi}^{(j)}(c; \eta, \xi, \phi) &= \frac{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2-\eta^2} \left[\xi R_{mn}^{(j)}(c, \xi) \frac{dS_{mn}(c, \eta)}{d\eta} \right. \\ & \quad \left. - \eta S_{mn}(c, \eta) \frac{dR_{mn}^{(j)}(c, \xi)}{d\xi} \right] \begin{matrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{matrix} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
N_{e_{mn},\eta}^{(j)}(c;\eta,\xi,\phi) &= \frac{(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{c(\xi^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d S_{mn}(c,\eta)}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi(\xi^2-1)}{\xi^2-\eta^2} \right) \right. \\
&\times R_{mn}^{(j)}(c,\xi) \Big] - \eta S_{mn}(c,\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2} \frac{d}{d\xi} R_{mn}^{(j)}(c,\xi) \right) + \frac{m^2 \eta}{(1-\eta^2)(\xi^2-1)} \\
&\times S_{mn}(c,\eta) R_{mn}^{(j)}(c,\xi) \Big]_{\sin m\phi}^{\cos m\phi} \\
N_{e_{mn},\xi}^{(j)}(c;\eta,\xi,\phi) &= - \frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{c(\xi^2-\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[- \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta(1-\eta^2)}{\xi^2-\eta^2} S_{mn}(c,\eta) \right) \frac{d}{d\xi} \right. \\
&\times R_{mn}^{(j)}(c,\xi) + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2} \frac{d}{d\eta} S_{mn}(c,\eta) \right) R_{mn}^{(j)}(c,\xi) - \frac{m^2 \xi}{(1-\eta^2)(\xi^2-1)} \\
&\times S_{mn}(c,\eta) R_{mn}^{(j)}(c,\xi) \Big]_{\sin m\phi}^{\cos m\phi} \quad (15) \\
N_{e_{mn},\phi}^{(j)}(c;\eta,\xi,\phi) &= \frac{-m(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{c(\xi^2-\eta^2)} \left[\frac{1}{\xi^2-1} \frac{d}{d\eta} (\eta S_{mn}(c,\eta)) \right. \\
&\times R_{mn}^{(j)}(c,\xi) + \frac{1}{1-\eta^2} S_{mn}(c,\eta) \frac{d}{d\xi} (\xi R_{mn}^{(j)}(c,\xi)) \Big]_{-\cos m\phi}^{\sin m\phi}
\end{aligned}$$

根据(1), (2), (4) 和(11) 式可以得到散射电磁场的一般形式

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \sum_{m,n} (a_{mn} \vec{M}_{mn} + b_{mn} \vec{N}_{mn}) \\
\vec{H} &= \kappa \sum_{m,n} (a_{mn} \vec{N}_{mn} + b_{mn} \vec{M}_{mn})
\end{aligned}$$

其中级数系数应该由入射波特性和散射体的边界条件决定。

在一般情况下, 设入射波传播方向与旋转轴之间夹角为 ζ , 当 $\zeta \rightarrow 0$ 时, 应该将入射波分解成电矢量振动平面垂直于入射平面的 TE 波和磁矢量振动平面垂直于入射平面的 TM 波, 入射平面是包含入射波矢量和旋转轴的平面。

以下二式给出了平面入射波在长旋转椭球坐标系中电磁场的级数形式

TE 波:

$$\begin{aligned}
^{(i)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [g_{mn}(\zeta) \vec{M}_{emn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi) + i f_{mn}(\zeta) \vec{N}_{0mn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi)] \\
^{(i)}\vec{H} &= \sum_{m,n} \kappa_3 i^n [f_{mn}(\zeta) \vec{M}_{0mn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi) - i g_{mn}(\zeta) \vec{N}_{emn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi)] \quad (16)
\end{aligned}$$

TM 波:

$$\begin{aligned}
^{(i)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [f_{mn}(\zeta) \vec{M}_{0mn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi) - i g_{mn}(\zeta) \vec{N}_{emn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi)] \\
^{(i)}\vec{H} &= \sum_{m,n} -\kappa_3 i^n [g_{mn}(\zeta) \vec{M}_{emn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi) + i f_{mn}(\zeta) \vec{N}_{0mn}^{(1)}(c_3;\eta,\xi,\phi)] \quad (17)
\end{aligned}$$

(16) 与(17) 中 $f_{mn}(\zeta)$ 和 $g_{mn}(\zeta)$ 是入射波展开系数, c_3 是环境空间的 c 值。根据(16), (17) 式以及对(8) 式的讨论, 在各个区域电磁场的形式可取为

TE 波:

环境空间

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [\beta_{1,mn} \vec{M}_{emn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi) + i\alpha_{1,mn} \vec{N}_{0mn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi)] \\ {}^{(4)}\vec{H} &= \sum_{m,n} \kappa_3 i^n [\alpha_{1,mn} \vec{M}_{0mn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi) - i\beta_{1,mn} \vec{N}_{emn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi)] \end{aligned} \quad (18)$$

散射体外壳

$$\begin{aligned} {}^{(2)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [A_{1,mn} \vec{M}_{emn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) + \beta_{1,mn} \vec{M}_{emn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi) \\ &\quad + i c_{1,mn} \vec{N}_{0mn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) + i D_{1,mn} \vec{N}_{0mn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi)] \\ {}^{(2)}\vec{H} &= \sum_{m,n} \kappa_2 i^n [c_{1,mn} \vec{M}_{0mn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) + D_{1,mn} \vec{M}_{0mn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi) \\ &\quad - i A_{1,mn} \vec{N}_{emn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) - i B_{1,mn} \vec{N}_{emn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi)] \end{aligned} \quad (19)$$

散射体内核

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [\delta_{1,mn} \vec{M}_{emn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi) + i\gamma_{1,mn} \vec{N}_{0mn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi)] \\ {}^{(4)}\vec{H} &= \sum_{m,n} \kappa_1 i^n [\gamma_{1,mn} \vec{M}_{0mn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi) - i\delta_{1,mn} \vec{N}_{emn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi)] \end{aligned} \quad (20)$$

TM 波:

环境空间

$$\begin{aligned} {}^{(s)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [\alpha_{2,mn} \vec{M}_{0mn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi) - i\beta_{2,mn} \vec{N}_{emn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi)] \\ {}^{(4)}\vec{H} &= \sum_{m,n} -\kappa_3 i^n [\beta_{2,mn} \vec{M}_{emn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi) + i\alpha_{2,mn} \vec{N}_{0mn}^{(3)}(c_3; \eta, \xi, \phi)] \end{aligned} \quad (21)$$

散射体外壳

$$\begin{aligned} {}^{(2)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [c_{2,mn} \vec{M}_{0mn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) + D_{2,mn} \vec{M}_{0mn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi) \\ &\quad - i A_{2,mn} \vec{N}_{emn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) - i B_{2,mn} \vec{N}_{emn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi)] \\ {}^{(2)}\vec{H} &= \sum_{m,n} -\kappa_2 i^n [A_{2,mn} \vec{M}_{emn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) + B_{2,mn} \vec{M}_{emn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi) \\ &\quad + i c_{2,mn} \vec{N}_{0mn}^{(1)}(c_2; \eta, \xi, \phi) + i D_{2,mn} \vec{N}_{0mn}^{(3)}(c_2; \eta, \xi, \phi)] \end{aligned} \quad (22)$$

散射体内核

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\vec{E} &= \sum_{m,n} i^n [\gamma_{2,mn} \vec{M}_{0mn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi) - i\delta_{2,mn} \vec{N}_{emn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi)] \\ {}^{(4)}\vec{H} &= \sum_{m,n} -\kappa_1 i^n [\delta_{2,mn} \vec{M}_{emn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi) + i\gamma_{2,mn} \vec{N}_{0mn}^{(1)}(c_1; \eta, \xi, \phi)] \end{aligned} \quad (23)$$

以上各式中 c_1 和 c_2 分别表示粒子内核和外壳空间的 c 值。当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, $\xi d_0 \rightarrow R_0$, $\eta \rightarrow \cos \theta$, 由此可得远区散射场的形式(以 TE 波为例)

$${}^{(1)}E_\eta = \sum_{m,n} i [\alpha_{1,mn} \chi_{mn}(\theta) + \beta_{1,mn} \tau_{mn}(\theta)] \sin m\phi \cdot \frac{e^{-ikR_0}}{kR_0}$$

$$^{(s)}E_{\phi} = \sum_{m,n} i [\alpha_{1,mn} \tau_{mn}(\theta) + \beta_{1,mn} \chi_{mn}(\theta)] \cos m\phi \cdot \frac{e^{-ikR_0}}{kR_0} \quad (24)$$

$$^{(s)}E_z = \sum_{m,n} [i \alpha_{1,mn} m^2 S_{mn}(\cos\theta) / \sin\theta] \cdot \frac{e^{-ikR_0}}{(kR_0)^2}$$

其中 R_0 为球坐标中的径向坐标值, 而

$$\tau_{mn}(\theta) = m S_{mn}(\cos\theta) / \sin\theta$$

$$\chi_{mn}(\theta) = \frac{d S_{mn}(\cos\theta)}{d\theta}$$

(24) 式表明在远离散射源的区域, 散射电场的径向分量消失, 对散射磁场也有相同结果, 因此散射波是横波。

三、由边界条件确定级数系数

为了求得散射场级数系数 $\alpha_{1,mn}$, $\beta_{1,mn}$ 及 $\alpha_{2,mn}$ 和 $\beta_{2,mn}$, 必须将(16)—(23)式代入边界条件方程

外边界: $\xi = \xi_2$, $c_3 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} k_3$, $c_2 = c_2' = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} k_2$

$$\begin{aligned} ^{(1)}E_{\eta} + ^{(s)}E_{\eta} &= ^{(2)}E_{\eta} & ^{(1)}E_{\phi} + ^{(s)}E_{\phi} &= ^{(2)}E_{\phi} \\ ^{(1)}H_{\eta} + ^{(s)}H_{\eta} &= ^{(2)}H_{\eta} & ^{(1)}H_{\phi} + ^{(s)}H_{\phi} &= ^{(2)}H_{\phi} \end{aligned} \quad (25)$$

以及

内边界: $\xi = \xi_1$, $c_2 = c_2'' = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} k_2$, $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} k_1$

$$\begin{aligned} ^{(2)}E_{\eta} &= ^{(1)}E_{\eta} & ^{(2)}E_{\phi} &= ^{(1)}E_{\phi} \\ ^{(2)}H_{\eta} &= ^{(1)}H_{\eta} & ^{(2)}H_{\phi} &= ^{(1)}H_{\phi} \end{aligned} \quad (26)$$

中去, 边界条件要求以上二式对 $-1 \leq \eta \leq 1$ 以及 $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 范围内长旋转椭球角坐标 η 和 ϕ 的任意值都成立。根据(14)及(15)式, 由于旋转椭球的轴对称性, 偏振角波函数仅为 $\cos m\phi$ 或 $\sin m\phi$, 利用它们的正交性, 在边界条件方程中 m 给定时, 对任意的 ϕ 值, 方程两边的相应系数必定相等, 即对任给的 m 可以得到一组独立的方程。但对 η 而言, 由于角波函数 $S_{mn}(c, \eta)$ 不仅是 η 的函数, 而且也是参量 c 的函数, 含有不同参量 c 的角波函数之间不能相互正交, 因此对给定的 n, η 任意时不能要求边界条件方程中两边的相应系数相等(由(16)—(23)式可以看到在边界条件方程(25)和(26)两端的角波函数中包含不同的 c 值), 这意味着对任意的 n 不能得到一组独立的方程, 这正是使得旋转椭球散射问题极为复杂的原因之一, 也说明了旋转椭球散射解不可能表示成解析函数的形式。为解决上述困难, 本文采用 Wait^[9] 提出的办法, 将所有角波函数展开成正交角波函数 $S_{mn}(c_3, \eta)$ 的级数形式

$$\begin{aligned} (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} S_{mn}(c^{(h)}, \eta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \bar{A}_l^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+l}(c_3, \eta) \\ (1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}} S_{mn}(c^{(h)}, \eta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \bar{B}_l^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+l}(c_3, \eta) \\ \eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} S_{mn}(c^{(h)}, \eta) &= \sum_{l=0}^{L_1} \bar{C}_l^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+l}(c_3, \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}} S_{mn}(c^{(h)}, \eta) &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{D}_t^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta) \\
 (1-\eta^2)^{\frac{3}{2}} S_{mn}(c^{(h)}, \eta) &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{E}_t^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta) \\
 \eta(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}} S_{mn}(c^{(h)}, \eta) &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{F}_t^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta) \quad (27) \\
 (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dS_{mn}(c^{(h)}, \eta)}{d\eta} &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{G}_t^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta) \\
 \eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dS_{mn}(c^{(h)}, \eta)}{d\eta} &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{H}_t^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta) \\
 (1-\eta^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dS_{mn}(c^{(h)}, \eta)}{d\eta} &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{I}_t^{mn}(c^{(h)}) S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta)
 \end{aligned}$$

其中 $c^{(h)}$ 表示 c_1, c_2', c_3 或 c_2'' , 而 $\overline{A}_t^{mn}(c^{(h)}) - \overline{I}_t^{mn}(c^{(h)})$ 可通过在(27)式各方程的两边乘 $S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta)$, 然后从 -1 到 $+1$ 对 η 积分得到, 例如:

$$\begin{aligned}
 \overline{A}_t^{mn}(c^{(h)}) &= \frac{1}{\Lambda_{m-1, m-1+t}(c_3)} \int_{-1}^{+1} (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} S_{mn}(c^{(h)}, \eta) S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta) d\eta \\
 &= \begin{cases} 0 & n-m+t \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{\Lambda_{m-1, m-1+t}(c_3)} \sum_{\lambda=0,1}^{\infty} \frac{d_{\lambda}^{m-1, m-1+t}(c_3)}{2\lambda+2m-1} \left[\frac{2(\lambda+2m)!}{(2\lambda+2m+1)\lambda!} d_{\lambda}^{mn}(c^{(h)}) \right. \\ \quad \left. - \frac{2(\lambda+2m-2)!}{(2\lambda+2m-3)(\lambda-2)!} d_{\lambda-2}^{mn}(c^{(h)}) \right] & n-m+t \text{ 为偶数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{m-1, m-1+t}(c_3) &= \int_{-1}^{+1} [S_{m-1, m-1+t}(c_3, \eta)]^2 d\eta \\
 &= \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{2(r+2m-2)!}{(2r+2m-1)r!} [d_r^{m-1, m-1+t}(c_3)]^2
 \end{aligned}$$

为归一化因子。

将(27)各式代入边界条件方程, 交换求和指数 n 和 t , 可以看到对任一给定的 t , η 任意变化时方程两端相应系数必须相等, 因此可得到一组独立的方程并由此解出散射场级数系数, 由于计算极为繁复, 本文仅给出最后结果即确定散射场级数系数的线性方程。

TE 波:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=m}^{\infty} i^n [& A_{1, mn} U_{mn}^{(1), t}(c_2', \xi_2) + B_{1, mn} U_{mn}^{(3), t}(c_2', \xi_2) + c_{1, mn} V_{mn}^{(1), t}(c_2', \xi_2) \\
 & + D_{1, mn} V_{mn}^{(3), t}(c_2', \xi_2) - \beta_{1, mn} U_{mn}^{(1), t}(c_3, \xi_2) - \alpha_{1, mn} V_{mn}^{(3), t}(c_3, \xi_2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=m}^{\infty} i^n [g_{mn}(\zeta) U_{mn}^{(1),t}(c_3, \xi_2) + f_{mn}(\zeta) V_{mn}^{(1),t}(c_3, \xi_2)] \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n [A_{1,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + B_{1,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) + C_{1,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) \\
&\quad + D_{1,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) - \beta_{1,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2) - \alpha_{1,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2)] \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} i^n [g_{mn}(\zeta) X_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2) + f_{mn}(\zeta) Y_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2)] \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ \chi_2 [C_{1,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + D_{1,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) + A_{1,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) \\
&\quad + B_{1,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2)] - \kappa_3 [\alpha_{1,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2) + \beta_{1,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2)] \} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} i^n \kappa_3 [f_{mn}(\zeta) U_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2) + g_{mn}(\zeta) V_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2)] \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ \chi_2 [C_{1,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + D_{1,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) + A_{1,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) \\
&\quad + B_{1,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2)] - \kappa_3 [\alpha_{1,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2) + \beta_{1,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2)] \} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} i^n \kappa_3 [f_{mn}(\zeta) X_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2) + g_{mn}(\zeta) Y_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2)] \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n [A_{1,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + B_{1,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + C_{1,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
&\quad + D_{1,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) - \delta_{1,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) - \gamma_{1,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] = 0 \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n [A_{1,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + B_{1,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + C_{1,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
&\quad + D_{1,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) - \delta_{1,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) - \gamma_{1,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] = 0 \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ \kappa_2 [C_{1,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + D_{1,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + A_{1,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
&\quad + B_{1,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1)] - \kappa_1 [\gamma_{1,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) + \delta_{1,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] \} = 0 \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ \kappa_2 [C_{1,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + D_{1,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + A_{1,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
&\quad + B_{1,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1)] - \kappa_1 [\gamma_{1,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) + \delta_{1,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] \} = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

TM 波:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n [C_{2,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + D_{2,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) + A_{2,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) \\
&\quad + B_{2,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) - \alpha_{2,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2) - \beta_{2,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2)] \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} i^n [f_{mn}(\zeta) U_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2) + g_{mn}(\zeta) V_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2)] \\
&\sum_{n=m}^{\infty} i^n [C_{2,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + D_{2,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) + A_{2,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) \\
&\quad + B_{2,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) - \alpha_{2,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2) - \beta_{2,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2)] \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} i^n [f_{mn}(\zeta) X_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2) + g_{mn}(\zeta) Y_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ -\kappa_2 [A_{2,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + B_{2,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + C_{2,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) \\
& \quad + D_{2,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2)] + \chi_3 [\beta_{2,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2) + \alpha_{2,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2)] \} \\
& = \sum_{n=m}^{\infty} -\kappa_3 i^n [g_{mn}(\zeta) U_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2) + f_{mn}(\zeta) V_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2)] \\
& \sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ -\kappa_2 [A_{2,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) + B_{2,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2) + C_{2,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2', \xi_2) \\
& \quad + D_{2,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2', \xi_2)] + \kappa_3 [\beta_{2,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2) + \alpha_{2,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_3, \xi_2)] \} \\
& = \sum_{n=m}^{\infty} -\kappa_3 i^n [g_{mn}(\zeta) X_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2) + f_{mn}(\zeta) Y_{mn}^{(1),t}(C_3, \xi_2)] \\
& \sum_{n=m}^{\infty} i^n [C_{2,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + D_{2,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + A_{2,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
& \quad + B_{2,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) - \gamma_{2,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) - \delta_{2,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] = 0 \\
& \sum_{n=m}^{\infty} i^n [C_{2,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + D_{2,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + A_{2,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
& \quad + B_{2,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) - \gamma_{2,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) - \delta_{2,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] = 0 \\
& \sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ -\kappa_2 [A_{2,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + B_{2,mn} U_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + C_{2,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
& \quad + D_{2,mn} V_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1)] + \kappa_1 [\delta_{2,mn} U_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) + \gamma_{2,mn} V_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] \} = 0 \\
& \sum_{n=m}^{\infty} i^n \{ -\kappa_2 [A_{2,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) + B_{2,mn} X_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1) + C_{2,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_2'', \xi_1) \\
& \quad + D_{2,mn} Y_{mn}^{(3),t}(C_2'', \xi_1)] + \kappa_1 [\delta_{2,mn} X_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1) + \gamma_{2,mn} Y_{mn}^{(1),t}(C_1, \xi_1)] \} = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

设入射波为单位振幅平面波, 则以上二式中的入射波展开系数为

$$\begin{aligned}
f_{mn}(\zeta) &= \frac{4m}{\Lambda_{mn}} \sum_{r=0,1}' \frac{d_r^{mn}}{(r+m)(r+m+1)} \cdot \frac{P_{m+r}^m(\cos \zeta)}{\sin \zeta} \\
g_{mn}(\zeta) &= \frac{2(2-\delta_{0,m}')}{\Lambda_{mn}} \sum_{r=0,1}' \frac{d_r^{mn}}{(r+m)(r+m+1)} \frac{d P_{m+r}^m(\cos \zeta)}{d \zeta}
\end{aligned}$$

其中
$$\delta_{0,m}' = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

各系数矩阵元的计算公式为

$$\begin{aligned}
U_{mn}^{(j),t}(C^{(h)}, \xi_1) &= m \xi_1 R_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_1) [(\xi_1^2 - 1)^2 \overline{D}_r^{mn}(C^{(h)}) \\
& \quad + 2(\xi_1^2 - 1) \overline{A}_r^{mn}(C^{(h)}) + \overline{E}_r^{mn}(C^{(h)})] \\
V_{mn}^{(j),t}(C^{(h)}, \xi_1) &= \frac{i}{C^{(h)}} \left\{ \frac{m^2}{\xi_1^2 - 1} R_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_1) [(\xi_1^2 - 1)^2 \overline{D}_r^{mn}(C^{(h)}) \right. \\
& \quad + 2(\xi_1^2 - 1) \overline{C}_r^{mn}(C^{(h)}) + \overline{F}_r^{mn}(C^{(h)})] - R_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_1) \left[\lambda_{mn}(C^{(h)}) \right. \\
& \quad \left. - (C^{(h)} \xi_1)^2 + \frac{m^2}{\xi_1^2 - 1} \right] [(\xi_1^2 - 1) \overline{C}_r^{mn}(C^{(h)}) + \overline{F}_r^{mn}(C^{(h)})] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \xi_l (\xi_l^2 - 1) \frac{dR_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_l)}{d\xi_l} [2\bar{C}_l^{mn}(C^{(h)}) + (\xi_l^2 - 1)\bar{G}_l^{mn}(C^{(h)}) + \bar{I}_l^{mn}(C^{(h)})] \\
& + R_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_l) [(\xi_l^2 - 1)^2 \bar{G}_l^{mn}(C^{(h)}) + (3\xi_l^2 - 1)\bar{I}_l^{mn}(C^{(h)})] \\
X_{mn}^{(j)'}(C^{(h)}, \xi_l) & = \xi_l R_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_l) \bar{G}_l^{mn}(C^{(h)}) - \frac{dR_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_l)}{d\xi_l} \bar{C}_l^{mn}(C^{(h)}) \\
Y_{mn}^{(j)'}(C^{(h)}, \xi_l) & = \frac{mi}{C^{(h)}} \left\{ (\xi_l^2 - 1)^{-1} R_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_l) [\bar{A}_l^{mn}(C^{(h)}) + \bar{H}_l^{mn}(C^{(h)})] \right. \\
& \left. + \left[R_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_l) + \xi_l \frac{dR_{mn}^{(j)}(C^{(h)}, \xi_l)}{d\xi_l} \right] \bar{B}_l^{mn}(C^{(h)}) \right\}
\end{aligned}$$

其中 $j = 1, 3, l = 1, 2$.

在(28)和(29)式中, 对任意的 m 值, 适当选取 l 值可构成 $8N$ 阶复系数线性方程, 因此在一般情况下要通过求解一个二重的线性方程组来得到散射场的级数系数 $\alpha_{1, mn}$, $\beta_{1, mn}$ 以及 $\alpha_{2, mn}$, $\beta_{2, mn}$ 等 ($m = 0, 1, 2, \dots, M, n = m, m+1, \dots, m+N$). 当入射波矢平行于旋转轴即 $\zeta = 0$ 时, 则入射波展开系数中 $m \neq 1$ 的项全部消失, 这时计算要简便得多. 当长旋转椭球蜕化为球时, 在(28)和(29)各方程中只有 $n = l+1$ 的项才存在, 线性方程只剩下 8 个, 并可由此得到散射场级数系数的解析形式, 其结果与用 Mie^[11] 理论求解获得的形式一致, 且对两种入射波状态得同一结果.

以上给出了长旋转椭球的散射解, 为了获得扁旋转椭球的散射解, 应在上述所有方程中作变换 $C \rightarrow -iC$, $\xi \rightarrow i\xi$. 可以看到当 C 是实数时长旋转椭球的散射计算远比扁旋转椭球简便, 当 C 是复数时, 二者几乎无区别. 从解的形式看, 长旋转椭球与扁旋转椭球完全一致.

四、散射截面与衰减截面

根据(24)式, 散射振幅函数的表达式为(TE 波)

$$\begin{aligned}
S_1(\theta, \phi) & = \sum_{m, n} [\alpha_{1, mn} \tau_{mn}(\theta) + \beta_{1, mn} \chi_{mn}(\theta)] \cos m\phi \\
S_2(\theta, \phi) & = \sum_{m, n} [\alpha_{1, mn} \chi_{mn}(\theta) + \beta_{1, mn} \tau_{mn}(\theta)] \sin m\phi
\end{aligned}$$

当平行入射时仅 $m = 1$ 的项存在, 且散射角 $\theta_s = \theta$, 因此可按照球散射的定义得到侧向散射截面公式

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\theta) & = \frac{4\pi}{k_0^2} S_1(\theta, 0) S_1^*(\theta, 0) \quad (\phi = 0) \\
\sigma_2(\theta) & = \frac{4\pi}{k_0^2} S_2\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) S_2^*\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\phi = \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

在一般情况下 θ_s 应满足

$$\cos \theta_s = \cos \zeta \cos \theta + \sin \zeta \sin \theta \cos \phi$$

这时, 我们定义侧向散射截面为

$$\sigma_1(\theta_s) = \frac{4\pi}{k_0^2} [S_1(\theta, \phi) S_1^*(\theta, \phi) + S_2(\theta, \phi) S_2^*(\theta, \phi)] \quad (\phi = 0)$$

$$\sigma_2(\theta_s) = \frac{4\pi}{k_0^2} [S_1(\theta, \phi) S_1^*(\theta, \phi) + S_2(\theta, \phi) S_2^*(\theta, \phi)] \quad \left(\phi = \frac{\pi}{2} \right)$$

以上各式中上标 * 表示取复共轭, 当 θ_s 取 π 时即可得后向散射截面的形式(这时 $m=1$)

$$\sigma(\pi) = \frac{4\pi}{k_0^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{2} d_r^{(n)}(C_3) \right] (-1)^n (\alpha_{1n} - \beta_{1n}) \right|^2$$

这里 $\alpha_{1n} = \alpha_{1,1,n}$, $\beta_{1n} = \beta_{1,1,n}$.

总散射截面可通过振幅函数积分求出

$$\begin{aligned} C_{scat} &= \frac{1}{k_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [|S_1(\theta, \phi)|^2 + |S_2(\theta, \phi)|^2] \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{n'=m}^{\infty} \prod_{n,n'}^m \cdot \text{Re} (\alpha_{1,m,n} \alpha_{1,m,n'}^* + \beta_{1,m,n} \beta_{1,m,n'}^*) \end{aligned}$$

其中 Re 表示取实部, 而

$$\prod_{n,n'}^m = \begin{cases} 0 & |n-n'| \text{ 为奇数} \\ \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{2(r+m)(r+m+1)(r+2m)!}{(2r+2m+1)r!} d_r^{(m)}(C_3) d_r^{(m)}(C_3) & |n-n'| \text{ 为偶数} \end{cases}$$

按照定义衰减截面为

$$C_{ext} = -\frac{\lambda_0^2}{\pi} \text{Re} \sum_{m,n} [\alpha_{1,m,n} \tau_{mn}(\zeta) + \beta_{1,m,n} \chi_{mn}(\zeta)]$$

对 TM 入射波可得到完全类似的公式, 对扁旋转椭球可在上述公式中以 $-iC_3$ 替代 C_3 , 而得到解.

五、数值计算

根据以上各节给出的理论公式, 我们计算了扁旋转椭球状表面附水冰粒对偏振雷达波的散射截面, 入射波长取 10cm, 附水层复折射指数取 $\chi_2 = 8.99 - i1.47$, 冰核复折射指数取 $\chi_1 = 1.78 - i0.0024$, 大气折射率近似取为 1.0. 图 1 至图 6 是计算机根据计算结果绘出的函数曲线, 纵坐标均为标准化后向散射截面 ($\sigma_b(\pi) = \sigma(\pi)/\pi a_1 b_2$) 或标准化侧向散射截面 ($\sigma_b(\theta_s) = \sigma(\theta_s)/\pi a_1 b_2$). 入射波假定为 TE 波, 长轴 ($A = 2a_2$) 和水层厚 ($D = a_2 - a_1$) 的单位均为 cm, 在图 1 至图 4 中轴长比 b_2/a_2 取 0.8.

图 1 给出了标准化后向散射截面随表面附水冰粒长轴的变化关系, 当长轴 A 增大时, 后向散射截面总的趋势也增大, 尤其当粒子尺度较小时, 后向散射截面随尺度的增大而迅速增大. 当 $\frac{2\pi a_2}{\lambda_0} < 0.4$ ($A < 1.3\text{cm}$) 时, 后向散射截面的值差不多随 $a_2 b_2$ 的三次方而增大, 这与瑞利散射结果一致. 对大粒子, 其后向散射截面的值可达到其几何截面 ($\pi a_2 b_2$) 的 5 倍以上. 另一方面, 图 1 也映了在不同尺度范围, 冰粒表面附水层厚度对散射截面的影响, 在瑞利区, 附水层厚度 $D = 0.1\text{cm}$ 的曲线(虚线)始终在 $D = 0.02\text{cm}$ 的曲线(实线)上方, 说明在这一尺度范围, 冰粒表面附水层增厚时, 其后向散射截面迅速增大, 这个结果通常用来解释在溶化层雷达回波突然增强的现象. 在瑞利区外, 附水层厚度对散射截面的影响截然不同, 一般来说, 后向散射截面随附水层增

厚而呈现起伏变化,变化规律也随粒子的尺度和形状而异。

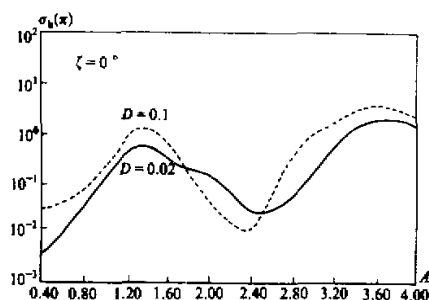


图1 平行入射时表面附水冰粒对10cm波长的标准化后向散射截面

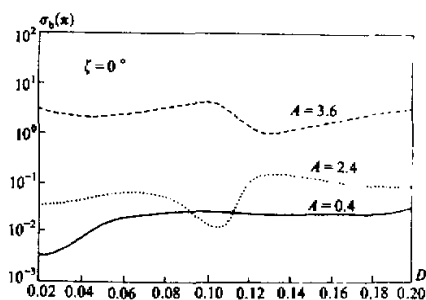


图2 标准化后向散射截面随冰粒附水层厚度的变化曲线

图2给出了三种尺度的粒子的标准化后向散射截面随附水层厚度 D 的变化关系。当 $A = 0.4 \text{ cm}$ 时(实线), 粒子处在瑞利区, 后向散射截面随 D 的增大而增大, 当 $D = 0.1 \text{ cm}$ 时已基本与纯水滴的后向散射截面值相同, D 再增大时, 后向散射截面几乎不再变化。当 $A = 2.4 \text{ cm}$ (点线) 和 $A = 3.6 \text{ cm}$ (虚线) 时, 后向散射截面随 D 的增大而起伏变化, 但这种变化随尺度而异, 变化的范围可超出纯冰和纯水粒子后向散射截面的范围。大尺度粒子具有这种散射特性的物理机制尚不清楚, 一个原因是当粒子尺度几乎可与入射波长比拟时, 冰粒已具有几何光学特性, 附水层产生后由于两个界面的反射波干涉影响, 使散射截面的变化复杂起来。图2也是对平行入射波的结果。

图3是标准化侧向散射截面与散射角 θ_s 的变化关系, $\theta_s = 180^\circ$ 时为标准化后向散射截面值, 长轴 A 取 0.4 cm , 当附水层厚 0.1 cm 时, 侧向散射截面很小, 前向 ($\theta_s = 0^\circ$) 与后向散射的区别也小, 此时表现出瑞利散射特征, 当 $D = 0.05 \text{ cm}$ 时, 散射截面迅速增大且散射能量集中在前进方向上, 这时, 散射特性与同体积水滴的散射已很接近。

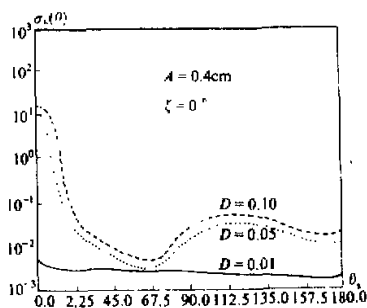


图3 入射波矢平行于旋转轴时, 标准化侧向散射截面随散射角 θ_s 的变化曲线, D 是附水层厚度

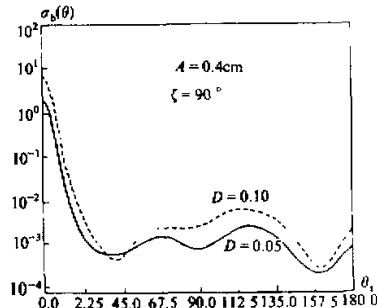


图4 入射波矢垂直于旋转轴时标准化侧向散射截面随散射角的变化曲线

图 4 与图 3 类似, 但入射波矢与旋转轴垂直($\zeta = 90^\circ$), 这时在长轴相同的条件下, 侧向散射截面比平行入射时要小, 后向散射截面也较小, 在垂直入射时, 侧向散射截面随散射角的变化比较复杂, 极值点增多, 极值点的位置也与平行入射时不同. 图 4 与图 3 的结果都和 Atlas^[10] 的实验结果一致.

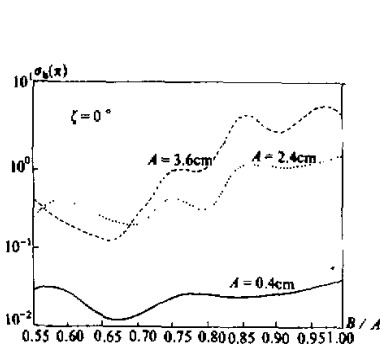


图 5 平行入射时, 标准化后向散射截面随扁旋转椭球轴长比的变化曲线

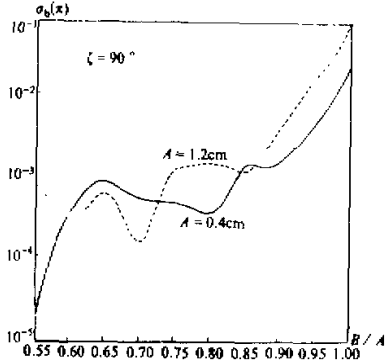


图 6 垂直入射时, 标准化后向散射截面随扁旋转椭球轴长比的变化曲线

图 5 是三种不同尺度粒子的标准化后向散射截面与外边界旋转椭球面轴长比 b_1/a_2 的变化关系, 平行入射, 附水层厚度取 0.1 cm . 对确定的长轴 ($A = 2a_2$), 当轴长比增大时, 粒子的体积变大, 因此后向散射截面总的趋势在增大, 但当粒子尺度较大时, 变化关系很复杂, 出现剧烈起伏的状态, 这表明旋转椭球由于其极化机制的复杂性, 在不同形状时其散射特性也不同, 图 5 与参考文献 [5] 用矩量法所得的数值结果一致.

图 6 与图 5 类似, 但入射波矢与旋转轴垂直, 在这种入射条件下, 即使尺度较小, 粒子轴长比对散射截面的影响也很大. 当轴长比很小时, 垂直入射时的后向散射截面远比平行入射时小, 随着轴长比增大, 这种差别减小, 如果设扁旋转椭球状溶化冰粒的旋转轴沿垂直指向, 则图 5 相应于雷达作垂直指向探测, 图 6 相应于雷达作水平方向探测.

六、结 语

本文的理论方法原则上适用于任意尺度的分层均匀旋转椭球状宏观散射体, 尤其适用于尺度与入射波长处同一量级的散射粒子, 对入射波也无限制, 当平行入射时, 若 $|C| \leq 10.0$ 则 $m = 1$, N 取 20 至 40 之间 ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) 即可得到满意的数值结果, 当斜入射时应根据 C 值选取 $M = 3 - 10$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M$), 此时计算量成倍增加, 当 $|C|$ 增大时, 数值计算将变得复杂起来.

对细棒状或扁圆盘状散射体的散射问题, 可在本文的理论中令 $b_2/a_2 \rightarrow 0$ 来求近似解.

根据 (28) 或 (29) 式当远区散射场确定时, 散射体内部各个区域的场也已同时得到 (场的级数系数 $D_{1,mn} = D_{1,mn}, A_{2,mn} = D_{2,mn}, \delta_{1,mn}, \delta_{2,mn}, \gamma_{1,mn}, \gamma_{2,mn}$ 均可同时求出), 因此本文的理论也可用于研究粒子内部物理性质的变化.

参 考 文 献

- [1] Mie, G., 1908, Beitrage zur optic trüber medien, *Ann. Physik*, 25, 377 — 445.
- [2] Van de Hulst, H. C., 1957, *Light Scattering By Small Particles*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 103 — 341.
- [3] Asano, S., G. Yamamoto, 1975, Light scattering by a spheroidal particle, *Appl. Opt.*, 14, 29 — 49.
- [4] Barber, P., C. Yeh, 1957, Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies, *Appl. Opt.*, 14, 2964 — 2872.
- [5] Wang, D. S., P. Barber, 1979, Scattering by inhomogeneous nonspherical objects, *Appl. Opt.*, 18, 1190 — 1197.
- [6] Mugnai, A., W. J. Wiscome, 1980, Scattering of radiation by moderately nonspherical particles, *J. Atmos. Sci.*, 37, 1291 — 1297.
- [7] Stratton, J. A., 1941, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill book Company, Inc., New York, 392 — 423.
- [8] Flammer, C., 1957, *Spheroidal Wave Functions*, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1 — 81.
- [9] Wait, J. R., 1966, Theories of prolate spheroidal antennas, *Radio Sci.*, 1 (New Series), 474 — 511.
- [10] Atlas, D., R. Wexler, 1963, Backscatter by oblate ice spheroids, *J. Atmos. Sci.*, 20, 48 — 61.

第二次海洋-大气耦合模式国际学术会议在比利时召开

由海洋研究科学委员会 (SCOR) 和世界气象组织 (WMO) 联合组织的“第二次海洋-大气耦合模式”国际学术会议——作为第二十一届海洋流体动力学列日国际学术讨论会, 于 1989 年 5 月 8 日至 12 日在比利时列日大学举行。会议代表分别来自美国、加拿大、西德、苏联、日本、中国等十四个国家。

会议目的是回顾自 1984 年第一次海-气耦合模式会议以来, 在实施热带与全球大气 (TOGA) 计划及准备世界海洋环流试验 (WOCE) 过程中所取得的进展; 展望今后几年海-气耦合模式的发展; 探讨用海-气耦合模式预测短期气候异常和长期气候变动更有效的途径和方法。尽管会议重点在于海-气耦合模式, 但在会议上对世界气候研究计划 (WCRP) 中三个主要研究分支都进行了广泛的讨论, 其中四个主要议题是: (1) 大气对给定的热带和热带以外地区海表温度异常响应的敏感性研究和延伸预报试验。(2) 为搞清海-气耦合系统的物理行为和预测 ENSO 发生、发展及其对大气、海洋影响所进行的数值模拟。(3) 考察海洋模式及其对大气强迫变化的敏感性试验。(4) 讨论海-气耦合模式在气候平衡态研究中的重要性, 特别是研究复杂程度不同的海洋模式对 CO₂ 含量增多气候效应的数值模拟。从这次会议报告表明, 不少国家正在进行区域性海洋环流模式同全球大气环流模式的耦合试验及其气候模拟, 其中所用的海洋环流模式几乎都取自 GFDL。另外还表明, 国外用海-气耦合模式所进行的气候模拟都以观测研究、统计诊断为基础, 以理论分析为指导, 不只是单纯地模拟, 即是说观测研究、理论分析和数值模拟是同步进行的。

我国也向这次大会递交了两篇学术论文:

“The Design of IAP OGCM and Its Numerical Simulations”(曾庆存、张学洪、张荣华) 和 “An Analytical Coupled Air-Sea Interaction Model”(季振刚、巢纪平), 并作了大会报告, 得到了各国学者的重视和好评。我国在海-气耦合模式方面研究刚刚开始, 与世界先进水平有相当的距离。考虑到这一工作在 WCRP、TOGA 和 WOCE 等试验中的重要性, 我们应抓住目前实施各项世界性研究计划的有利时机, 积极开展这方面的科学研究, 迎头赶上世界先进水平。

(张荣华)