

旋转二维可压缩流动的谱和特征函数

I: 谱点的分布

曾庆存 李荣凤 张 铭

(LASG, 中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文对旋转二维可压缩流(正压原始方程模式)中的谱和谐函数进行了分析和数值计算. 这一部份主要讨论谱的分布, 结果表明: 在正压原始方程中存在三支谱系. 当基流为稳定时, 这三支谱系均是实的, 其中两支为离散谱, 分别对应于顺风 and 逆风传播的重力惯性波(快波), 另一支则对应于 Rossby 波(慢波). 当基流无切变时, 慢波由离散谱点组成, 慢波相速以基流速度为聚点; 且基流为零和科氏参数为常数时退化为无穷维重迭谱点, 与聚点重合. 当基流有切变时, 慢波由离散谱和连续谱组成, 其中离散谱还可能不存在. 当基流速度接近或超过 C_0 时, 最靠近“慢波”的二个或几个原来的重力-惯性波转化为混合型波. 当基流为不稳定时, 则存在复数的谱点(此时该谱点必定是离散谱). 理论分析和数值计算都得到了广义正压不稳定、超高速不稳定和混合类型的不稳定, 而广义正压不稳定属于慢波. 我们将在本文的第二部分中讨论相应的谱函数.

关键词: 连续谱; 离散谱; 聚点; 非地转不稳定.

一、引 言

研究大气运动中扰动各种特征波动对于大气动力学和数值预报都具有十分重要的意义. 为了求得模式中的特征值和特征波动, 最早采用了正规模方法(也称特征波动, 即 normal mode 或 characteristic wave), 并用以研究基流的失稳问题^[1-3]. 然而正规模只相应于特征波动中的离散谱部分. 注意到基本气流为零时, 无论是准地转模式还是原始方程模式, 其所有的特征波动均对应于离散谱, 故用正规模方法是合理的. 但若研究普遍的初值问题, 则早在 60 年代就有人指出, 当基本气流不为零时, 对应于离散谱的谱函数(特征波动)可能是不完备的^[4,5], 故仅有离散谱的线性组合不能表示任意的扰动, 为此还需要补足特征波动的连续谱部分.

连续谱及其对应的特征波动的性质和结构如何? 人们尚未完全了解. 曾庆存等在文献[6, 9]中指出, 扰动的不同演变特性主要由基流的不均匀性和扰动的类别、结构和相对

于基流的位置所定,同时基流的切变对波包的能量和波长的变化有着极重要的影响.这些结论和正规方法所得的结果很不相同,波包的演变规律是正规方法所不能描述的.其后,卢佩生等^[10]详细分析了在有基本气流时正压准地转模式的谱及其谱函数,指出:由连续谱组成的扰动从形态上说和波包很类似;且其演变过程远比离散谱对应的正规模丰富多采,而和波包相一致,特别是经历着整个的兴衰过程,即随着时间的增加其能量趋于零,扰动最终为基流所吸收.

原始方程模式比准地转模式更加复杂,其中除了包含准地转模式中的 Rossby 波(慢波)外,还包含有重力惯性波(快波).当存在基本气流时除慢波可有不稳定之外,快波也可有不稳定^[11,12],因而研究原始方程的谱点和谱函数是十分必要的.但即使对于最简单的正压原始方程而言,当基本气流存在水平切变时,解析地求出谱(特征值)和谱函数(特征波动)也是十分困难的.我们曾对正压原始方程的谱和谱函数用数值方法进行研究,得到很复杂然而又很有规律且很有趣的结果.由于以往只作过零星的报导^[7,8,9],我们将在本文的第一部分介绍所用的计算方法和详细讨论正压原始方程中的谱(特征值),第二部分则讨论相应的谱函数(特征波动).

二、基本方程

取如下线性正压原始方程组:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{u} - \left(f - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) \hat{v} = -C_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{v} + f \hat{u} = -C_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\hat{u} = C_0^2 u$, $\hat{v} = C_0^2 v$; $\hat{u}$, $\hat{v}$, Φ 为小扰动; $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{\Phi}$ 为基本气流的参数; $C_0^2 = \bar{\Phi} = gh_0$, h_0 为流体的平均厚度,注意:当 $\bar{U} \neq 0$ 时 C_0^2 为 y 的函数.为简单起见,取 $\bar{V} = 0$,且有 $f = \bar{U} = -\partial \bar{\Phi} / \partial y = -dC_0^2 / dy$, $\bar{U} = \bar{U}(y)$, $f = f_0 + \beta y$, 并记 $d\bar{U} / dy = \bar{U}'$. 我们设在 $y = y_1$ 和 $y = y_2$ 处有刚壁边界条件,即有

$$\hat{v}(y_1) = \hat{v}(y_2) = 0. \quad (2)$$

方程(1)也可理解为无量纲的^[11],我们以下均取作无量纲的形式.为简单起见,不妨取 $y_1 = 0, y_2 = 1$. 令

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_m(y) \\ i v_m(y) \\ \phi_m(y) \end{bmatrix} e^{i(mx - \sigma t)}, \quad (3)$$

代入方程(1),为方便起见略去下标 m ,则可得到以下常微分方程组:

$$\begin{cases} m\bar{U}u - (f - \bar{U}')v + mC_0^2\phi = \sigma u, \\ -f u + m\bar{U}v - C_0^2 \frac{d\phi}{dy} = \sigma v, \\ mu + \frac{dv}{dy} + m\bar{U}\phi = \sigma\phi; \end{cases} \quad (4)$$

边条件为

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (5)$$

方程组(4)亦可写成

$$\mathcal{L}(\bar{Y}) = \sigma \bar{Y} \quad (6)$$

的形式, 在此算子 $\mathcal{L}$ 为算符矩阵:

$$\mathcal{L} \equiv \begin{bmatrix} m\bar{U} & -(f - \bar{U}') & mC_0^2 \\ -f & m\bar{U} & -C_0^2 d/dy \\ m & d/dy & m\bar{U} \end{bmatrix} \quad (7)$$

于是我们的问题即归结为求算符矩阵(7)满足边条件(5)的谱及相应的谱函数. 该问题可化为一个复杂的关于 v 或 ϕ 的二阶变系数常微分方程的特征值问题.

三、数值方法

在一般情况下, 求解上述特征值问题要用到数值方法, 为此我们将区间 $[0, 1]$ 等距分作 N 个格点, 格距为 δy . 并采用交叉网格, 将方程组(4)中第二个方程写在整数格点上, 而第一, 第三个方程写在半数格点上, 如图1所示, 此时可得以下差分方程组:

$$\begin{cases} m\bar{U}_{j-1/2}u_{j-1/2} - \frac{1}{2} \left[\frac{C_{0j-1}^2}{C_{0j-1}^2} (f - \bar{U}')_{j-1} v_{j-1} + \frac{C_{0j-1/2}^2}{C_{0j}^2} (f - \bar{U}')_j v_j \right] \\ \quad + mC_{0j-1/2}^2 \phi_{j-1/2} = \sigma u_{j-1/2}, \\ -f_j \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} + m\bar{U}_j v_j - C_{0j}^2 \frac{\phi_{j-1/2} - \phi_{j+1/2}}{\delta y} = \sigma v_j, \\ mu_{j-1/2} + \frac{v_{j-1} - v_j}{\delta y} + m\bar{U}_{j-1/2} \phi_{j-1/2} = \sigma \phi_{j-1/2}, \\ j = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (8)$$

此外, 为满足边条件(5), 在方程组(8)中 v_0 和 v_N 均取为0. 注意, 由于我们取了格式(8), 在边界上不需要计算 u 和 ϕ , 故我们也只有 $v_0 = v_N = 0$ 这个边界条件. 令

$$\begin{cases} Y_1 = (u_{1/2}, v_1, \phi_{1/2})^T \\ \dots\dots\dots \\ Y_j = (u_{j-1/2}, v_j, \phi_{j-1/2})^T \\ \dots\dots\dots \\ Y_N = (u_{N-1/2}, 0, \phi_{N-1/2})^T \end{cases} \quad (9)$$

和

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)^T, \quad (10)$$

则方程组(8)可以写成矩阵形式

$$LY = \sigma Y. \quad (11)$$

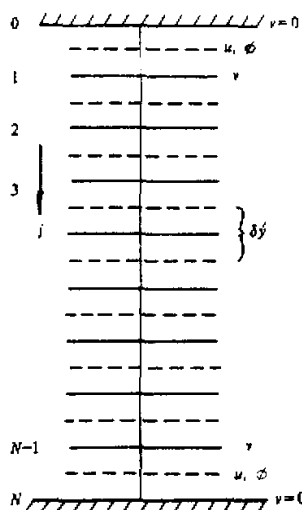


图1 网格和变量分布

(11)式即为(6)式的差分近似,但通过定义(9)和(10)已经预先将边界条件(5)消除了.于是求出矩阵 L 的特征值 σ 就可以求得原问题的近似谱了.但要注意的是原问题(6)应该有无穷多个谱点(包括离散谱和连续谱),而(11)式只有有限个谱点(特征值),且均是离散的.不过,随着 N 的增大,我们可以求得任意多个谱点.可以设想,随着 N 的增大,数值方法对谱的这种歪曲将减小,而且通过对 N 不同时谱点的分布也易判别谱点是连续的还是离散的.

我们在实际计算中用 QR 方法求矩阵 L 的特征值和特征向量.理论分析和实际计算表明 L 常是一个病态矩阵,故在计算中要小心处理.最后还要指出,计算格式应当既不引入伪谱,也没有遗漏真谱.也许这一问题现时尚无法从理论上完全证明.我们只是通过某些已知情形下的理论谱和计算谱的对照,得知本计算方案确实没有引入伪谱,也没有遗漏真谱;特别是跳点格式(8)和常用的非跳点空间中央差格式不同,没有引入计算伪波(寄生波).

四、均匀基流的情况

本节的目的用最简单的例子说明算子矩阵(7)与其差分近似(11)的病态特性及其物理意义;此外,还可以说明我们的计算格式确实既没有遗漏真谱,也没有引入伪谱(除了将 $\mathcal{L}$ 的无穷多谱点歪曲为有限个谱点而外),而谱点的计算误差只在高频部分.

1. $\bar{U} = 0$ 和 f 为常数的情况

此时, C_0^2 也为常数.无论是对(5)和(6),还是(10)式,都可以求得解析解.其实,令

$$(u, v, \phi)_n = (A, iB, C)_n e^{iny}, \quad (12)$$

其中 (A, B, C) 为三常数,为使满足边条件(5),只需取 B 为实数,并取 iBe^{iny} 的实部即可.将(12)式代入(6)式,可得到特征值分为三支:

$$\begin{cases} \sigma_{1n} = 0, \\ \sigma_{2n} = [f^2 + C_0^2(m^2 + n^2\pi^2)]^{1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \sigma_{3n} = -[f^2 + C_0^2(m^2 + n^2\pi^2)]^{1/2}, \end{cases} \quad (13)$$

将(13)代入(6),即可得到对应于每一个 n 的三组值 $(A, B, C)_{kn}, k=1, 2, 3$. 于是我们得到了特征函数族的全体:

$$(u, v, \phi)_{kn} = (A, iB, C)_{kn} e^{in\pi y}, \quad (14)$$

$$k = 1, 2, 3.$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

对应于每一个 k 和 n 的函数组 $(u, v, \phi)_{kn}$ 称为一个特征函数, 或称为特征波动. 有时亦称

$$(u, v, \phi)_{kn} e^{-i\sigma_{kn}t} \quad (15)$$

为特征波动, 而(14)式则为其沿 y 方向的结构, 下面我们常常混用这两种名称, 一般不致引起混乱的.

可以证明(证明从略, 证明方法请参见文献[12]的第五章): 特征函数的全体(即 $k=1, 2, 3; n=1, 2, \dots, \infty$)组成完备正交基, 一切满足边界条件(5)且总能量为有限的扰动, 即 $(u, v, \phi) \in L_2$, 或即

$$\frac{1}{2} \int_0^1 [C_0^{-2} (u^2 + v^2) + \phi^2] dy < \infty \quad (16)$$

都可按其展开, 于是当 $\bar{U}=0$ 和 f = 常数时, 方程组(1)满足边界条件(2)的一切解答均可表成三支特征波动之和, 即

$$(u, v, \phi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 a_{mkn} (A, iB, C)_{kn} e^{i(m\pi x + in\pi y - \sigma_{mkn}t)}, \quad (17)$$

其中 a_{mkn} 由初始场决定.

众所周知, $\sigma_{1n}=0$ 对应于常定运动, σ_{2n} 和 σ_{3n} 分别对应于向正和反方向传播的重力-惯性波. 下面我们还将看到, 当 $\bar{U} \neq 0$ 时, σ_{1n} 一支对应于相速与基流 $\bar{U}$ 同量级的特征波动; 而 σ_{2n} 和 σ_{3n} 的两支其相速则与 C_0 同量级. 当 $C_0 \gg \bar{U}$ 时, σ_{1n} 一支就是慢波(或涡旋波, 因其以涡度为主要特征), 而 σ_{2n} 和 σ_{3n} 就是两支快波. 由于 $|\sigma_{1n}|$ 远小于 $|\sigma_{2n}|$ 和 $|\sigma_{3n}|$, 使得算子矩阵 $\mathcal{L}$ 明显地是病态的. 特别是当 $\bar{U}=0$ 时, σ_{1n} 一支竟完全退化为无穷多个重迭谱, 且为零, 即 $\sigma_{1n}=0$.

今用差分算子 L 代替微分算子 $\mathcal{L}$, 可令

$$Y_j = (A, iB, C)^T e^{im\pi(N-j)\delta y}, \quad (18)$$

代入(11)式(或即(8)式), 得到

$$\begin{bmatrix} -\sigma & -f_{cn} & mC_0^2 \\ -f_{cn} & -\sigma & -C_0^2 S_n i \\ m & S_n i & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ iB \\ C \end{bmatrix} = 0, \quad (19)$$

其中 $f_{cn} \equiv f \cos(n\pi\delta y/2)$, $S_n \equiv \sin(n\pi\delta y/2) / (\delta y/2)$, $n=1, 2, \dots, N-1$. 由此仍可得到和(13)式相类似的结果, 只不过必须用 f_{cn}^2 和 S_n^2 分别代替(13)式中的 f^2 和 $(n\pi)^2$, 且 n 不再延伸至无穷. 可见我们的计算格式确实没有漏掉任一支谱点, 也没有增入伪谱, 只不过每支谱点为有限个. 不难证明, 我们也有类似的展开定理.

由于 $\sigma_{1n}=0$, 矩阵 L 的病态性也是明显的. 当 $n\pi\delta y/2 \ll 1$ 时, f_{cn} 和 S_n 分别与 f 和 $m\pi$ 很接近, 计算得到的谱点有足够的精度. 但在高频部分, 即 $n\pi\delta y/2$ 足够大, 或即当 $N-1 > n \gg 2/\pi\delta y$, 计算谱点有可观的误差. 显然, 当 $\delta y \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ 时, 计算谱点即是真谱点.

我们用统一的程序作过计算, 结果确与理论分析相符, 计算结果有很高的精度(叙述从略).

2. $U=0$ 但 $\beta \neq 0$ ($f=f_0+\beta y$ 不为常数)的情况

本特征值问题和球面情况本质上完全一致. 参照文献[12]第五章的讨论, 不难证明, 这时亦有三支离散谱, 但若 $m \neq 0$, 则对应于 σ_{1n} 的一支不再是无穷多个重迭谱点, 而是各个谱点取不同的不为零的数值, 就是说, 非带状特征波动中三支都是沿空间传播的, σ_{1n} 一支就是移动性的慢波, 在此为纯粹的 Rossby 波. 容易想象, 若波动的南北方向尺度很小, 即相应于很大的 n 时, 二维可压缩性的影响很小, 我们将得到准无辐散模式的结果, 即:

$$\sigma_{1n} \approx m \left[\bar{U} - \frac{\beta}{m^2 + n^2 \pi^2} \right]. \quad (20)$$

换言之, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_{1n} \rightarrow m\bar{U}$, 即 σ_{1n} 以 $m\bar{U}$ 为聚点.

由于 $\bar{U}=0$ 和 $\beta \neq 0$ 只是 $\bar{U}$ 和 β 为常数的特例, 我们将在下面一小节中再深入分析之.

3. $\bar{U}$ 为不等于零的常数的情况

若 $\bar{U}$ 为不等于零的常数, 但 $f \neq 0$, 则由 $dC_0^2/dy = -f\bar{U}$ 可知 C_0^2 不再为常数. 但此时可将(4)式化为

$$\hat{\mathcal{L}}(\bar{Y}) = \tilde{\sigma} \bar{Y}, \quad (21)$$

其中

$$\tilde{\sigma} = \sigma - m\bar{U}, \quad (22)$$

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -f & mC_0^2 \\ -f & 0 & -C_0^2 d/dy \\ m & d/dy & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

$\hat{\mathcal{L}}$ 与 $\bar{U}=0$ 时的 $\mathcal{L}$ 无异, 只不过在其中以系数形式出现的 C_0^2 不是常数; 又数 $\tilde{\sigma}$ 起 σ 的作用 ($\tilde{\sigma}$ 即为都卜勒频移). 易知: 在 $v(0) = v(1) = 0$ 条件下 $\hat{\mathcal{L}}$ 是自伴算子, 即

$$(\hat{\mathcal{L}}(\bar{Y}_1), \bar{Y}_2) = (\bar{Y}_1, \hat{\mathcal{L}}(\bar{Y}_2)), \quad (24)$$

其中对于两向量函数 $\vec{Z}_k \equiv (u_k, v_k, \phi_k)$, $k=1, 2$, 我们定义内积为

$$(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2) \equiv \int_0^1 \left[\frac{1}{C_0^2} (u_1 u_2 + v_1 v_2) + \phi_1 \phi_2 \right] dy, \quad (25)$$

而 $(\vec{Y}, \vec{Y})$ 就是能量的二倍.

由于 $\mathcal{L}$ 具有上述性质, 利用文献[12]第五章的方法, 即先将 u, v, ϕ, C_0^2 和 f 展开三角级数, 截取有限项, 求近似特征值和特征函数, 然后再让项数趋于无穷, 并利用能量守恒性, 即可证明本问题有可数无穷多个离散谱, 且为实数; 特征函数组两两正交, 即设 $\vec{Y}_1 \equiv (u_1, v_1, \phi_1)$ 和 $\vec{Y}_2 \equiv (u_2, v_2, \phi_2)$ 为分别对应于 $\tilde{\sigma}_1$ 和 $\tilde{\sigma}_2$ 的两组特征函数, 且 $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, 则有

$$(\vec{Y}_1, \vec{Y}_2) \equiv \int_0^1 \left[\frac{1}{C_0^2} (u_1 u_2 + v_1 v_2) + \phi_1 \phi_2 \right] dy = 0, \quad (\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2) \quad (26)$$

且特征函数组是完备的, 由此容易进一步得到展开定理.

经过仔细的分析可知这无穷多个离散谱可分为三支, 特别是当 $\bar{U}/C_0^2 \ll 1$ 和 $\bar{U} \ll 1$ 及 $\beta \ll 1$ 时, 可以利用摄动法求得和 (12) 及 (13) 式一一对应的特征函数和特征值, 而有

$$\begin{cases} \sigma_{1n} = m\bar{U} + \tilde{\sigma}_{1n} = m(\bar{U} + b_{1n}), \\ \sigma_{2n} = m\bar{U} + \tilde{\sigma}_{2n} = m(\bar{U} + b_{2n}), \\ \sigma_{3n} = m\bar{U} + \tilde{\sigma}_{3n} = m(\bar{U} - b_{3n}), \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

只要常数 $\bar{U}$ 和 β 之任一不为零, b_{1n} 均为依赖于指标 n 的不为零的实数. 特别是, 对于很大的 n , (20) 式仍然正确, 亦即 σ_{1n} 以 $m\bar{U}$ 为聚点. 即使 $\beta=0$ 但 $\bar{U} \neq 0$, 这也是对的. 其实因为 $C_0^2(y) = C_{00}^2 - f_0 \bar{U} y - \beta \bar{U} y^2 / 2$, 自由表面的倾斜和地形坡度是等效的, 都可以起 $df/dy \neq 0$ 同样的效果, 产生所谓的地形 Rossby 波.

今用差分法求近似解. 如果先后将含有系数 $m\bar{U}$ 的项从 L 中抽出而并入 (10) 式的右端, 则有

$$\tilde{L}Y = (\sigma - m\bar{U})Y, \quad (28)$$

$\tilde{L}$ 就是 $\mathcal{L}$ 的差分近似. 可以想象, 我们可以得到大体上同样的结论. 特别是, 如果 $Y^{(1)}$ 和 $Y^{(2)}$ 分别是 (8) 式对应于 σ_1 和 σ_2 的特征函数, 分别记当 σ 取 σ_1 和 σ_2 时的方程 (8) 为 $(8)_1$ 和 $(8)_2$, 用 $C_{0j-\frac{1}{2}}^{-2} u_{j-\frac{1}{2}}^{(2)}$ 和 $C_{0j}^{-2} v_j^{(2)}$ 分别乘 $(8)_1$ 第一和第二个方程, 用 $C_{0j-\frac{1}{2}}^{-2} u_{j-\frac{1}{2}}^{(1)}$ 和 $C_{0j}^{-2} v_j^{(1)}$ 分别乘 $(8)_2$ 第一和第二个方程; 然后相加并两两相减, 就可得到当 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 时特征向量的正交性, 即

$$\sum_{j=1}^N [C_{0j-\frac{1}{2}}^{-2} u_{j-\frac{1}{2}}^{(1)} u_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} + C_{0j}^{-2} v_j^{(1)} v_j^{(2)} + \phi_{j-\frac{1}{2}}^{(1)} \phi_{j-\frac{1}{2}}^{(2)}] \delta y = 0, \quad (29)$$

它就是在网格函数情况下相应于 (26) 式的表达式. 由此不难得到相应的展开公式.

图 2 是用 (11) 式计算得到的特征值的分布. 在该计算中 $\bar{U}=0.3, f=1$ ($\beta=0$), $m=2$, 并取 C_0 的最小值为 1, 此时 C_0 最大值为 1.3 (以上均取无量纲量, 下同). 由图可见, 随着格点数 N 的增加, 特征值的个数增多, 但特征值之间无加密现象 ($\sigma=0.6$ 的邻域除外, 那是一个聚点), 且随着 N 的增大, 各个特征值趋向于极限值, 故确为离散谱点. 这些离散谱点按 σ 的大小分布在三个区域, 当取 $N=40$ 时有: $\sigma_{1n} \rightarrow 0.6, 2.8 < \sigma_{2n} < 89.7, -88.5 < \sigma_{3n} < -1.5$. 由于我们取 $m=2$, 相应的波速 $C=\sigma/m$ 为: $C_{1n} \rightarrow 0.3, 1.4 < C_{2n} < 44.8, -44.2 < C_{3n} < -0.75$, 注意到 $\bar{U}=0.3$, 故 σ_{1n} (或 C_{1n}) 对应于慢波, 且 C_{1n} 以 $\bar{U}$ 为聚点; 而 σ_{2n}, σ_{3n} 或 (C_{2n}, C_{3n}) 则对应于顺风 and 逆风传播的快波. 这三支波动均是稳定的 (σ 为实数), 且可清楚地区分开来.

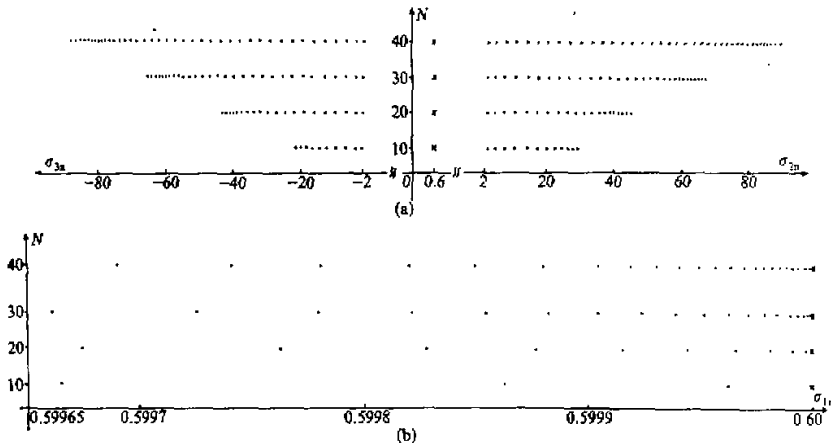


图 2 $\bar{U}=0.3, f=1, m=2, C_{0 \min}=1$ 情况下的谱点分布

(a) 离散谱和聚点, $\cdot$ 为离散谱, $\times$ 为聚点;

(b) 是 (a) 的部分放大, 可见和慢波对应的离散谱趋向聚点的情况, $\times$ 为聚点.

为了考察 β 的变化对特征波动的影响, 我们还取 $\beta=0.3$ (即 $f=1+0.3y$, 其它参数不变) 作了计算, 计算结果表明此时相应的特征值 σ_{1n} 略有减少, 说明 β 使慢波的波速变慢; 且当 n 增大时 β 的影响减小, 表 1 给出了这二种情况计算得到的前几个 σ_{1n} 值, 这些和 (20) 式是相吻合的.

表 1 β 对 σ_{1n} 的影响

$\beta=0$	0.565	0.588	0.594	0.597	0.598
$\beta=0.3$	0.560	0.587	0.594	0.597	0.598

还需指出, 由表可见, 即使取 $\beta=0$, 但因 C_0^2 不为常数, σ_{1n} 取不同的数值, 而 $\sigma_{1n} - m\bar{U} \neq 0$.

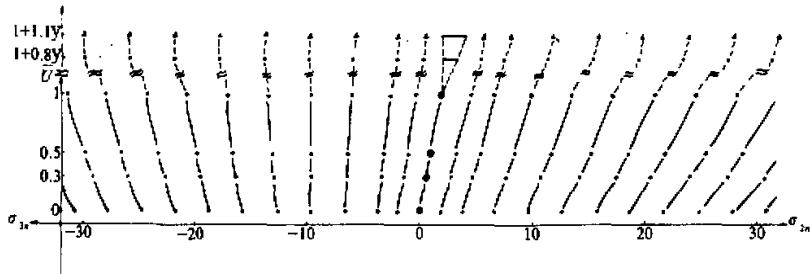
在本计算中, 由于考虑 β 后平均的 f 值大于 1, 对应于快波的特征值的绝对值 $|\sigma_{2n}|, |\sigma_{3n}|$ 略有增加, 即波速略有加快. 表 2 给出了这二种情况前五对快波的特征值, 表中 E 表示向东传播的快波, w 表示向西传播的快波. 由表 2 可见, β 使向东传播的 σ_{2n} 值和向西传播的 $|\sigma_{3n}|$ 值增加的幅度不完全相同, 但随着 n 的增大, 增加的幅度趋于相同, 即只是由于平均 f 的增加, 而 df/dy 的影响并不大.

表 2 β 对快波频率 σ_{2n} 和 σ_{3n} 的影响

(E 和 W 分别表示顺风 and 逆风传播的快波)

σ	1		2		3		4		5	
	E	W	E	W	E	W	E	W	E	W
1	2.78	-1.50	4.70	-3.50	7.72	-6.52	10.9	-9.74	14.2	-13.0
$1+0.3\gamma$	2.82	-1.52	4.75	-3.57	7.81	-6.61	11.1	-9.94	14.4	-13.2
$\Delta\sigma$	+0.04	+0.02	+0.05	+0.07	+0.09	+0.09	+0.2	+0.2	+0.2	+0.2

我们还取 $\bar{U}$ 为不同的常数作了计算, 观察 σ 随 $\bar{U}$ 的变化, 如图 3. 由图可见, 即使 $\bar{U}$ 大到接近甚至超过 C_0 时, 三支谱系仍然是明显可分的, 特别是对应于慢波的一支只分布在聚点 $m\bar{U}$ 的近旁, 在图中只好用一个大黑点表示之. 还需指出, 除了最靠近 $m\bar{U}$ 的两个顺风 and 逆风传播的重力-惯性波外, $|b_{2n}|$ 和 $|b_{3n}|$ 随 $\bar{U}$ 增大, 甚至 $|\sigma_{3n}|$ 也随 $\bar{U}$ 增大, 这难于作简单解释.

图 3 σ 随 $\bar{U}$ 的变化 ($f=1, m=2, N=40$)

图中只画出 $|\sigma| < 32$ 的部分, 下半部分为 $\bar{U}$ 等于常数的情况 ($\bar{U}=0, 0.3, 0.5, 1.0$), 小黑点“·”为谱点, 大黑点“●”为对应于慢波的高散谱的集合及聚点. 上半部为 $\bar{U}=1+0.8\gamma$ 和 $1+1.1\gamma$ 的情况, 高散谱分别用 $\circ$ 和 $\triangle$ 表示; 连续谱用线段表示, $m\bar{U}_{\min} < \sigma < m\bar{U}_{\max}$.

五、 $\bar{U}$ 为 γ 的线性函数时的情形

1. 连续谱的出现

如果 $\bar{U}$ 不为常数, 则算子 $\mathcal{L}$ 和 L 都是相当复杂的, 目前尚未有严格的理论可以判定 $\mathcal{L}$ 是否有离散谱和谐函数是否完备以及相应的展开问题. 如果离散谱不完备, 则必有连续谱. 今先作一定性分析: 若 $\sigma \geq m\bar{U}_{\max}$ 或 $\sigma < m\bar{U}_{\min}$, 其中 $\bar{U}_{\max}$, $\bar{U}_{\min}$ 为基本气流 $\bar{U}(\gamma)$ 的最大值和最小值, 则 $\sigma - m\bar{U} \neq 0$, 故将 (3) 式代入 (1) 式后方程没有奇点. 如果某一个这样的 σ 能使得 (1) 式有解且满足边条件 (2), 则对应的就是 (1) 式的一个特解, 所以在 $\sigma > m\bar{U}_{\max}$ 及 $\sigma < m\bar{U}_{\min}$ 区间中如有谱点则为离散谱. 但若 $m\bar{U}_{\min} \leq \sigma \leq m\bar{U}_{\max}$, 则存在某点 $\gamma = \gamma_c$, 使得 $\sigma - m\bar{U}(\gamma_c) = 0$, 此时方程 (1) 有奇点, 在一般情况下只存在广义解, 故此谱区为连续谱. 设 $|\bar{U}_{\min}|$ 和 $|\bar{U}_{\max}| \ll C_{0\min}$, 则由于连续谱在区间 $m\bar{U}_{\min} \leq \sigma \leq m\bar{U}_{\max}$, 可知连续谱区的扰动属

于慢波. 这表明慢波可由两分支组成, 一分支为离散谱(如果存在的话), 另一分支为连续谱. 还须说明的是, 连续谱区的任何一点所对应的谱函数不是方程组(1)的通常解, 故只有谱函数沿谱区的积分才可能构成(1)式的通常解.

另外, 若扰动的时空尺度都远小于基流者, 我们可以用 WKB 近似方法进行研究, 即取解为(12)式, 但 A, B, C 和 n 为 y 及 t 的缓变函数. 文献[6], [9]和[12]中已得出, 除慢波外, 还有两支快波, 即顺风 and 逆风传播的重力-惯性波. 三支波动的近似频率由(27)式给出, 只不过 $\bar{U}$ 和 n 分别为局地基流流速和局地波数, 而且 b_{2n} 和 b_{3n} 正好等于(13)式中的 σ_{2n} 和 σ_{3n} . 必须指出, 由此求得的 σ_{1n} 位于连续谱区, 这与连续谱并不矛盾, 因为波包正好是谱函数沿谱区积分的另一种表示或其近似. 还须指出, 要用 WKB 方法求出高阶近似则不是简单的. 为了证实上述定性分析结论, 我们采用数值计算方法.

今先取基本气流 $\bar{U}$ 为 y 的线性函数

$$\bar{U} = U_0 + U_1 y, \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (30)$$

其中 U_0 和 U_1 为两常数, 且 $U_1 \neq 0$. 按文献[9], [11]和[12]的理论结果, 此时若 U_1 足够小, 则不出现不稳定, 即谱点必须为实数. 此外, 在准地转近似下(即应用准地转模式), 文献[9]和[10]研究过基流(30)的谱分布, 那里得到: 在 $\beta \neq 0$ 情况下, 既有离散谱, 也有连续谱, 且离散谱只有有限个. 本文改用原始方程即(11)式进行计算, 取 $U = 0.3 + 0.3y$, $0 < y < 1, f = 1, m = 2$, C_0 的最小值为 1, 最大值为 1.45. 图 4(a) 为计算得到的两支离散谱, 它们都为实数, 可见它们分别对应于顺风 and 逆风传播的快波(重力-惯性波), 此时有 $\sigma_{2n} > 3.1$ 和 $\sigma_{3n} < -2.4$, 这相应于 $C_{2n} > 1.55$ 和 $|C_{3n}| > 1.2$. 计算得到的连续谱如图 4(b) 所示, 可见, 在区间 $0.6 < \sigma_{1n} < 1.2$, 随着格点 N 的增加, 谱点加密, 而每一谱点并不趋向极限, 显然该区为被计算歪曲了的连续谱区. 注意到在此 $\bar{U}_{\min} = 0.3$, $\bar{U}_{\max} = 0.6, m = 2$, 放在此数值计算中得到的连续谱属于慢波, 与上面的定性分析一致. 在此, 我们要指出的是在该个例中慢波仅有连续谱而不存在离散谱, 与文献[10]的结果不同, 这可能是在本计算中取了 $\beta = 0$ 的缘故.

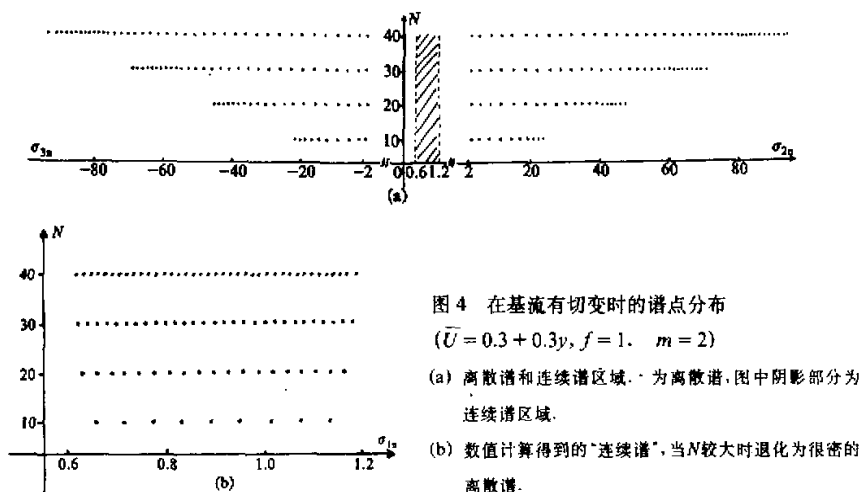


图 4 在基流有切变时的谱点分布

($\bar{U} = 0.3 + 0.3y, f = 1, m = 2$)

(a) 离散谱和连续谱区域. · 为离散谱, 图中阴影部分为连续谱区域.

(b) 数值计算得到的“连续谱”, 当 N 较大时退化为很密的离散谱.

我们还对 U_0 和 U_1 较大的情况作了计算, 结果如图 3 上半部分及图 5 所示, 其中图 3

上半部分为 $\bar{U} = 1 + 0.8y$ 及 $\bar{U} = 1 + 1.1y$, $f=1$, $m=2$, $N=40$. 而图 5 则为 $C_{kn} = \sigma_{kn} / m$ 随 U_1 的变化, 其中取 $U_0=1$, $f=1$, $m=4$, $N=30$. 在这些计算中, 由于 $\beta=0$, 且 $\partial^2 \bar{U} / \partial y^2 = 0$, “慢波”仍只由连续谱组成; 而靠近 $m\bar{U}_{\min}$ 和 $m\bar{U}_{\max}$ 的谱点是由原来(小 U_0 和小 U_1 时)的重力-惯性波转变而成的, 但因其相速已接近于基本气流速度, 不难想象其结构是某种介于“慢波”和重力-惯性波的混合, 或可称为“混合波”(详见本文第二部分关于谱函数的分析). 此外, 当 $U_1 > 2$ 时, 图 5 中还有复数谱点(不稳定波), 详见下节.

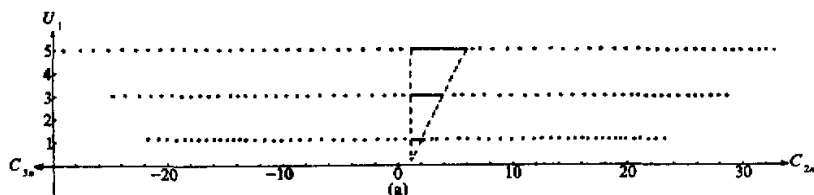


图 5 不同切变基流下的谱点分布

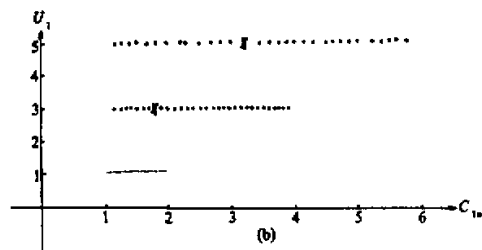
($\bar{U} = 1 + U_1 y$, $f=1$, $m=4$, $N=30$)

(a) 计算所得的全部谱点, 其中 $\cdot$ 为离散谱; “连续谱”区由直线段表示.

(b) 计算得到的“连续谱”区的谱点 $\times$ 和复数谱点 $\times$ (图中给出 C_r 的位置, 而其复数值为:

当 $\bar{U} = 1 + 3y$ 时, $C \approx 1.8 \pm i \cdot 0.7 \times 10^{-2}$;

当 $\bar{U} = 1 + 5y$ 时, $C \approx 3.2 \pm i \cdot 0.2 \times 10^{-1}$).



2. 纯粹的超高速不稳定

当基流满足不稳定判据时可能出现不稳定, 此时存在复数的谱点. 对于复数的 σ , 显然方程(4)无奇点, 故必是离散谱, 尽管也可以存在聚点.

曾庆存在文献[11]中已从理论上阐明了旋转正压大气中非地转运动的不稳定问题, 指出有三类不稳定, 即广义正压不稳定、惯性不稳定和超高速不稳定, 并给出了运动失稳的必要条件和运动稳定的若干充分条件. 注意到 QR 方法可以计算出复数的谱点, 我们用(11)式作了计算, 这样, 既求得了谱点分布和谐函数结构, 同时也检验了文献[11]中给出的一系列判据.

设基流仍为(30)式, 且 U_0, U_1 均大于零. 此时基流的位涡度 $\bar{q} = C_0^{-2}(f - U_1)$. 为简单起见, 设 f 为大于零的常数, 则有 $d\bar{q}/dy = C_0^{-4}(f - U_1)(U_0 + U_1 y)$. 依文献[11]中定理 2 的推论 1, 若在流体内 $d\bar{q}/dy$ 或 $\bar{U}d\bar{q}/dy$ 不变号, 而总切变 $|\bar{U}_{\max} - \bar{U}_{\min}| \leq (C_0)_{\min} - \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 为小量, 则运动是稳定的. 在上面假设的条件下, 在线性切变中显然 $d\bar{q}/dy$ 或 $\bar{U}d\bar{q}/dy$ 均不变号, 故运动是稳定的充分条件是:

$$|\bar{U}_{\max} - \bar{U}_{\min}| = |U_0 + U_1 - U_0| = U_1 \leq (C_0)_{\min} - \varepsilon. \quad (31)$$

在前面计算的个例中因取 $(C_0)_{\min} = 1$, $U_1 < 1$, 故(31)式成立, 因而没有计算出

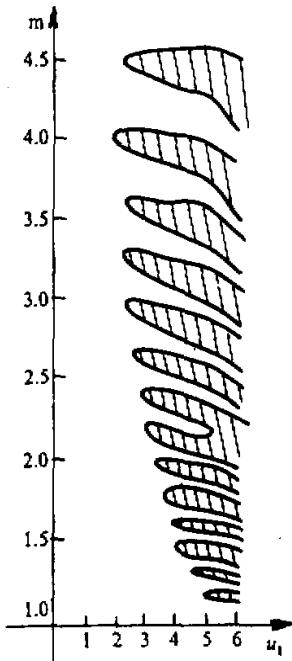


图 6. 不稳定性和切变 U_1 及波数 m 的关系

阴影部分为不稳定区域. 基流为 $\bar{U} = 1 + U_1 y$, 计算中取 $\Delta m = 0.05$.

复的特征值, 运动是稳定的, 如图 3 和图 4 (除 $\bar{U} = U_0 + 1.1y$ 情况外). 今改取 $\bar{U} = 1 + 1.1y, 1 + 1.5y, 1 + 2y, 1 + 3y, 1 + 4y, 1 + 5y, 1 + 6y$, 但仍取 $(C_0)_{\min} = 1$. 计算中发现: 当基流为 $\bar{U} = 1 + 1.1y$ 和 $1 + 1.5y$ 时, 尽管此时条件 (31) 已不成立, 但三支波动全部的特征值是实数, 故而三支波动均是稳定的 (这与理论判据并不矛盾, 因 (31) 式是稳定的充分条件). 当增大切变, 取 $\bar{U} = 1 + 2y$ 时, 则出现了一对复根, 即有不稳定波出现, 继续增大切变, 则出现二对甚至更多的复根, 见图 5b 和图 6.

不稳定对 m 有选择性, 对给定的切变 U_1 , 具有某些 m (x 方向的波数) 值的波动是不稳定的, 而具其他 m 的波动就是稳定的. 图 6 为取不同的 U_1 和 m 的计算结果. 由图可见, $m=4$ 附近最先产生不稳定. 值得注意的是在 m 轴上每个不稳定区域的两旁均有稳定的区域, 反映出不稳定对 m 的选择性. 下面我们来分析该不稳定的性质: 在线性切变基流的情形下, 由于 $d\bar{q}/dy$ 不变号, 故既没有正压不稳定, 也没有惯性不稳定, 只可能有超高速不稳定^[11]. 由此可知该不稳定就是纯粹的超高速不稳定. 这里还要指出的是当发生超高速不稳定时, 具有复数特征值的一对波动其相速度是相同的, 无论从相速和结构上都难于说明它们是属于快波还是慢波. 其实, 按文献[12]第十一章, 当基流速度 $\bar{U}$ 增大 (在我们这里应是 $\bar{U}$ 和 U_1 都增大) 时, 对于头一二个 n , 顺风传播的快波 $|\sigma_{2n}|$ 增大, 逆风传播的快波 $|\sigma_{3n}|$ 减小. 当 $\bar{U}$ 增大到超过 $|C_0|$, 到达某一临界值时, $|\sigma_{3n}| = \sigma_{1n}$; 再增大 $\bar{U}$ (和 U_1), 则这对波动变为不稳定——增长或衰减. 所以我们只能说此时有一对不稳定波和一个顺风快速传播的重力惯性波 (即 σ_{2n}), 不稳定波具有混合波性质.

六、非线性切变基流情况

在一般情况下, 我们有离散谱和连续谱, 而且在文献[11]中已指出, 若有 $\bar{U}d\bar{q}/dy$ 变号, $f(f - d\bar{U}/dy)$ 在某区域为负, 且 $|\bar{U}_{\max} - \bar{U}_{\min}|$ 超过临界值, 此时广义正压不稳定、惯性不稳定和超高速不稳定可同时存在, 或者存在某些混合类型的不稳定.

我们曾取以下基流进行了数值计算:

$$\bar{U} = Ay \exp(0.5 - y^2 / 0.08), \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (32)$$

计算中还取 $f=1, m=2$. 该基流 $\bar{U}(y)$ 如图 7 所示, 在 $y=0.2$ 处, $\bar{U}$ 有最大值 0.24. 这种急流型的基流有 $\bar{U}d\bar{q}/dy$ 变号, 故有可能出现广义正压不稳定^[11, 12]. 数值计算的结果也表明慢波的确有复数的谱点. 图 8 给出取 $A=8$ 时得到的复数谱点 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ 的分布 (取 $N=40$), 由图可见对于不稳定的慢波, 相速 (C_r) 越快, 增长率 ($|\sigma_i|$) 越大.

在我们的数值计算中还发现, 当取 $A < 9$ 时仅存在慢波的广义正压不稳定; 而当 $A >$

9.5 时, 除有慢波的不稳定外, 最慢的一对“快波”(即混合型波, 在 y 方向有最简单的结构, 在本文的第二部分还要详细讨论) 也对应于复数谱点, 亦即该对特征波也是不稳定的; 其它快波则是稳定的, 即有实数离散谱.

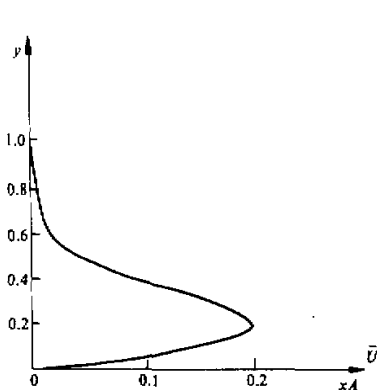


图 7 基流廓线
(由公式(32)给出)

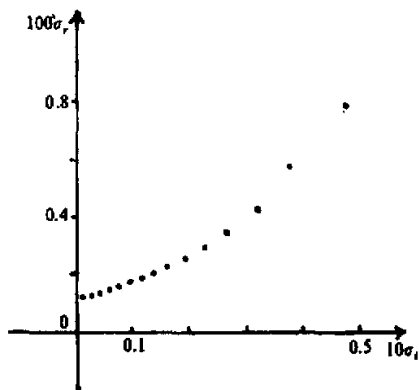


图 8 当取 $\bar{U} = 8y \exp(0.5 - y^2 / 0.08)$, $f = 1, m = 2$ 时
慢波复数谱点 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ 的分布. $\cdot$ 为复数的离散谱点

在本数值计算个例中, 混合型波出现不稳定, 可能是由于不仅有 $\bar{U}d\bar{q}/dy$ 变号, 且当取 $A > f/\sqrt{e}$ 时(在我们的数值计算中 f 取 1, 故 $A > 1/\sqrt{e} = 0.6065$), 还有 $f(f - d\bar{U}/dy) < 0$; 此外, 若 $|\bar{U}_{\max} - \bar{U}_{\min}| \approx 0.2A > (C_0)_{\min} = 1$, 即 $A > 5$ 时, $|\bar{U}_{\max} - \bar{U}_{\min}|$ 超过临界值. 可见当 $A > 9.5$ 时出现的混合型波的不稳定就是文献[11]中指出的某些与惯性不稳定和超高速不稳定相联的混合类型的不稳定, 它与慢波的广义正压不稳定同时存在.

在本计算中, 我们没有研究纯粹的对称不稳定, 因它对应于 $m = 0$, 我们拟作另外计算.

七、结 语

在正压原始方程组(1)中存在有三支谱系. 当基流为稳定时, 这三支谱系均是实的, 其中两支为离散谱, 分别对应于顺风 and 逆风传播的重力惯性波(快波), 另一支则对应于 Rossby 波(慢波). 当基流无切变时, 慢波由离散谱点组成, 慢波相速以基流速度为聚点; 且当基流为零和科氏参数为常数时退化为无穷维重迭谱点, 与聚点重合. 当基流有切变时, 慢波由离散谱和连续谱组成, 其中离散谱还可能不存在. 当基流速度接近或超过 C_0 时, 最靠近“慢波”的二个或几个原来的重力-惯性波转化为混合型波. 当基流为不稳定时, 则存在复数的谱点(此时该谱点必定是离散谱). 理论分析和数值计算都得到了广义正压不稳定, 超高速不稳定和混合类型的不稳定, 其中广义正压不稳定属于慢波. 我们将在本文的第二部分中讨论相应的谱函数.

致谢: 本工作中与黄荣辉研究员进行了有益的讨论, 戴淑玲同志做了部分上机计算, 王婉文、孙燕斌二同志帮助绘图, 袁海明同志打印了文章手稿, 谨此致谢.

参 考 文 献

- [1] Charney, J.G., 1947, The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Met.*, 4, 125-162.
- [2] Eady, E.T., 1949, Long waves and cyclone waves, *Tellus*, 1, No.3, 33-52.
- [3] Kuo, H.L., 1952, Three-dimensional disturbances in a baroclinic zonal current, *J. Met.*, 9, 260-272.
- [4] Case, K.M., 1960, Stability of Inviscid Plane Couette Flow, *The physics of fluid*, 3, 143-148.
- [5] Burger, A.P., 1966, Instability associated with the continuous spectrum in a baroclinic flow, *J. Atmos. Sci.*, 23, 272-277.
- [6] 曾庆存、卢佩生, 1980, 非均匀基流上扰动的演变, 中国科学, 第12期, 1193-1202.
- [7] 李荣凤、张铭, 1983, 正压原始方程特征值的计算, 全国大气物理数值试验学术会议, 大连.
- [8] 李荣凤、曾庆存, 1984, 旋转二维流动的谱和不稳定问题的计算, 第二次全国计算流体力学会议, 无锡.
- [9] Zeng Q.C., P.S. Lu, R.F. Li and C.G. Yuan, 1986, Evolution of large scale disturbances and their interaction with mean flow in a rotating barotropic atmosphere—Part I, II, *Advances in Atmospheric Sciences*, 3, No.1, 2, PP.39-58, 172-188.
- [10] 卢佩生、卢理、曾庆存, 1986, 正压准地转模式的谱和扰动的演变, 中国科学, B辑, 第11期, 1225-1233.
- [11] 曾庆存, 1986, 非地转不稳定, 中国科学B辑, 第4期, 434-440.
- [12] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社, 460-468.