第 14 卷 第 4 期
1990 年 12 月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol. 14, No. 4
Dec., 1990

关于大气中非线性重力内波的调制

罗德海

（中国科学院大气物理研究所）

提　要

本文利用多重尺度方法研究了大气中重力内波的非线性问题，指出，当大气中的 Brunt-Väisälä 频率随高度变化时，我们可以得到一个非线性 Schrödinger 方程，同时还指出，当 N^2 按 $N^2=N_0^2+\nu\cos nz$ $(\nu>0)$和 $N^2=N_0^2+\nu\sin nz$ $(\nu>0)$分布时，可得到如下结论：当大气中的重力内波的波数满足 $3n^2-k^2<0$ 时，大气中的重力内波可能会出现 Benjamin-Feir 不稳定，也就是说，大气中垂直方向的波长较长、水平方向的波长较短的重力内波容易出现 Benjamin-Feir 不稳定.

关键词：重力内波；多重尺度法；非线性 Schrödinger 方程；Benjamin-Feir 不稳定.

一、引　　言

在大气中，波的振幅通常是随时间、空间缓慢变化的，过去人们仅仅在线性的情况下对此问题进行研究. 70 年代初期，Lighthill[1] 开始研究深水中波包的非线性演变过程，随后 Chu 和 Mei[2] 又对此问题进行了改进，并研究了波包在长时间内的演变、80 年代初期 Yuen 和 Lake[3] 等在实验和数值计算方面对该问题进行了广泛深入的研究，揭示了许多新的现象.本文利用多重尺度方法研究了大气中重力内波的非线性问题，指出在 Brunt-Väisälä 频率随高度变化的情况下，非线性重力内波的波振幅满足非线性 Schrödinger 方程.

二、非线性 Schrödinger 方程

在不考虑摩擦作用的情况下，(x, z)平面内的重力内波方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+J(\psi,\nabla^2\psi)-g/\bar{\theta}_0\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\theta}{\partial t}+J(\psi,\theta)+\dfrac{\partial\bar{\theta}_0}{\partial z}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $J(A,B)=\dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial B}{\partial z}-\dfrac{\partial B}{\partial x}\dfrac{\partial A}{\partial z}$ 为 Jacobi 行列式，ψ，θ 为扰动流函数和扰动位温，$\overline{\theta_0}$ 为基本位温.

引入缓变坐标

1987年5月13日收到，1988年3月24日收到再改稿

$$\tau=\varepsilon t,\ T=\varepsilon^2 t,\ X=\varepsilon x,\ \xi=\varepsilon^2 x \tag{2}$$

于是可得变换

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \to \dfrac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial \tau}+\varepsilon^2\dfrac{\partial}{\partial T}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \to \dfrac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^2\dfrac{\partial}{\partial \xi}. \end{cases} \tag{3}$$

将 ψ，θ 分别展成下列级数：

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\psi_n,\qquad \theta=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\theta_n. \tag{4}$$

把(3)和(4)式分别代入方程(1)有

$$O(\varepsilon'):\begin{cases} M(\psi_1,\theta_1)=0, \\ N(\psi_1,\theta_1)=0, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $M(A_0,B_0)=\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla^2 A_0-g/\overline{\theta_0}\dfrac{\partial B_0}{\partial x}$，$N(A_0,B_0)=\dfrac{\partial B_0}{\partial t}+\dfrac{\partial\overline{\theta_0}}{\partial z}\dfrac{\partial A_0}{\partial x}$.

$$O(\varepsilon^2):\begin{cases} M(\psi_2,\theta_2)=-\left\{2\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial X}+\dfrac{\partial}{\partial\tau}\nabla^2\psi_1+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial z}\nabla^2\psi_1\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi_1\right\}+g/\overline{\theta_0}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial X}, \\ N(\psi_2,\theta_2)=-\left\{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\tau}+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial z}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{\partial\overline{\theta_0}}{\partial z}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial X}\right\}. \end{cases} \tag{6}$$

$$O(\varepsilon^3):\begin{cases} M(\psi_3,\theta_3)=-\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\left[2\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial X}+\left(\dfrac{\partial^2}{\partial X}+2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}\right)\psi_1\right]\right. \\ \qquad+\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left(\nabla^2\psi_2+2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial X}\right)+\dfrac{\partial}{\partial T}\nabla^2\psi_1+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \qquad\cdot\left(\nabla^2\psi_2+2\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial X}\right)+\left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial X}+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)\dfrac{\partial}{\partial z}\nabla^2\psi_1 \\ \qquad-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\psi_2+2\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial X}\right)+\dfrac{\partial}{\partial X}\nabla^2\psi_1\right] \\ \qquad\left.-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi_1\right\}+g/\overline{\theta_0}\left(\dfrac{\partial\theta_2}{\partial X}+\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\xi}\right), \end{cases} \tag{7}$$

$$
N(\psi_1, \theta_1) = -\left\{ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_1}{\partial T} + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial X} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\theta_0}}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right) \right\}.
$$

设方程(5)的解为

$$
\begin{cases} \psi_1 = A(\tau, T, X, \xi)\varphi(z)e^{i(kx-\omega t)} + cc, \\ \theta_1 = B(\tau, T, X, \xi)\Theta(z)e^{i(kx-\omega t)} + cc, \end{cases} \tag{8}
$$

其中 cc 表示前项的共轭. 将上式代入方程(5)可得

$$
\begin{cases} \left(\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} - k^2\varphi \right) A + gk / (\overline{\theta}_0 \omega) \Theta B = 0, \\ \left(\dfrac{\partial \overline{\theta}_0}{\partial z} k\varphi \right) A - \omega \Theta B = 0. \end{cases} \tag{9}
$$

由上式可得

$$
\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left(\frac{N^2k^2}{\omega^2} - k^2 \right) \varphi = 0, \tag{10}
$$

其中 $N^2 = (g / \overline{\theta_0}) \dfrac{\partial \overline{\theta_0}}{\partial z}$. 其边界条件为

$$
\varphi(0) = \varphi(H) = 0. \tag{11}
$$

将(8) 式代入方程(6)可得

$$
\begin{cases} M(\psi_2, \theta_2) = -\left\{ \left[2\omega k\varphi \dfrac{\partial A}{\partial X} + \left(\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} - k^2\varphi \right) \dfrac{\partial A}{\partial \tau} - (g / \overline{\theta}_0) \dfrac{\partial B}{\partial X} \Theta \right] e^{i(kx-\omega t)} + \left[ikA^2\varphi \left(\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} - k^2\varphi \right) - ik\dfrac{d\varphi}{dz} A^2 \left(\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} - k^2\varphi \right) \right] e^{2i(kx-\omega t)} + cc \right\}, \\ N(\psi_2, \theta_2) = -\left\{ \left[\dfrac{\partial B}{\partial z} \Theta + \dfrac{\partial \overline{\theta_0}}{\partial z} \varphi \dfrac{\partial A}{\partial X} \right] e^{i(kx-\omega t)} + \left[ik\varphi AB \dfrac{d\varphi}{dz} - ABik \dfrac{d\varphi}{dz} \Theta \right] e^{2i(kx-\omega t)} + cc \right\}. \end{cases} \tag{12}
$$

方程组(12)中消除长期项有

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial A}{\partial \tau}-\dfrac{2\omega^3}{N^2k}\dfrac{\partial A}{\partial X}+\dfrac{\omega^2}{\dfrac{\partial\overline{\theta_0}}{\partial z}k^2}\dfrac{\Theta}{\varphi}\dfrac{\partial B}{\partial X}=0,\\ \dfrac{\partial B}{\partial \tau}+\dfrac{\partial\overline{\theta_0}}{\partial z}\dfrac{\varphi}{\Theta}\dfrac{\partial A}{\partial X}=0.\end{array}\right. \tag{13}$$

并且有

$$\left\{\begin{array}{l}M(\psi_2,\theta_2)=-ikA^2F(\varphi)e^{2i(kx-\omega t)}+cc,\\ N(\psi_2,\theta_2)=-ikABG(\varphi,\Theta)e^{2i(kx-\omega t)}+cc,\end{array}\right. \tag{14}$$

其中 $F(\varphi)=-\left[\dfrac{N^2k^2}{\omega^2}\right]'\varphi^2$，$G(\varphi,\Theta)=\varphi\dfrac{d\Theta}{dz}-\Theta\dfrac{d\varphi}{dz}$.

设方程(14)中 ψ_2, θ_2 的表达式为

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_2=A_2(\tau,T,X,\xi)\varphi_2(z)e^{2i(kx-\omega t)}+cc,\\ \theta_2=B_2(\tau,T,X,\xi)\Theta_2(z)e^{2i(kx-\omega t)}+cc.\end{array}\right. \tag{15}$$

将上式代入方程(14)有

$$\left\{\begin{array}{l}-2i\omega\left[\dfrac{d^2\varphi_2}{dz^2}-4k^2\varphi_2\right]A_2-(2g/\overline{\theta_0})ik\Theta_2B_2=-ikA^2F(\varphi),\\ -2i\omega\Theta_2B_2+\dfrac{\partial\overline{\theta_0}}{\partial z}2ikA_2\varphi_2=-ikABG(\varphi,\Theta).\end{array}\right. \tag{16}$$

再将(9)式中 B 代入方程(16)，可以看出 A_2, B_2 均与 A^2 成比例，又因 A_2、B_2 是 τ, T, X, ξ 的函数，因此不妨取 $A_2=B_2=A^2$，同时把 Θ_2 消去可得

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\varphi_2}{dz^2}+\left(\dfrac{N^2k^2}{\omega^2}-4k^2\right)\varphi_2=\dfrac{k}{2\omega}F(\varphi)-\dfrac{N^2k^2}{2\omega^3}\dfrac{\varphi}{\Theta}G(\varphi,\Theta),\\ \varphi(0)=\varphi(H)=0.\end{array}\right. \tag{17}$$

同样，可把(8)和(15)式代入方程(7)中的第一式，并消除长期项可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi\right)\frac{\partial A}{\partial T}+2k\omega\varphi\frac{\partial A}{\partial \xi}-(g/\overline{\theta_0})\Theta\frac{\partial B}{\partial \xi}\\ &+i\left[-\omega\varphi\frac{\partial^2A}{\partial X^2}+2k\varphi\frac{\partial^2A}{\partial\tau\partial X}\right]+iA^*B_2\left[-k\varphi\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\varphi_2}{dz^2}-4k^2\varphi_2\right)\right.\\ &+2k\varphi_2\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi\right)-\frac{d\varphi}{dz}2k\left(\frac{d^2\varphi_2}{dz^2}-4k^2\varphi_2\right)\\ &\left.+\frac{d\varphi_2}{dz}k\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi\right)\right]=0.\end{aligned} \tag{18}$$

利用方程 (9)和 $B_2=A^2$，于是(18)式变为

$$I\frac{\partial A}{\partial T}+I_1\frac{\partial A}{\partial \xi}-iI_2\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}-iI_3|A|^2A=0, \tag{19}$$

其中 $I=\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi$， $I_1=\left(-\frac{N^2k}{\omega}+2k\omega\right)\varphi$， $I_2=\omega\left(-3+\frac{4\omega^2}{N^2}\right)\varphi$，

$I_3=k\varphi\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\varphi_2}{dz^2}-4k^2\varphi_2\right)-2k\varphi_2\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi\right)+\frac{d\varphi}{dz}2k\left(\frac{d^2\varphi_2}{dz^2}-4k^2\varphi_2\right)$

$-\frac{d\varphi_2}{dz}k\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi\right)$. 在上式两边同时乘以 φ，然后在区间 $[0, H]$ 上积分有

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial T}+c_g\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)+\beta\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}+\delta|A|^2A=0, \tag{20}$$

其中 $c_g=\frac{\int_0^H\varphi I_1dz}{\int_0^H\varphi Idz}$，$\beta=\frac{\int_0^H\varphi I_2dz}{\int_0^H\varphi Idz}$，$\delta=\frac{\int_0^H\varphi I_3dz}{\int_0^H\varphi Idz}$. 上式就是非线性 Schrödinger 方程.

利用(2)式，并令 $M=\varepsilon A$，于是方程(20)变为

$$i\left(\frac{\partial M}{\partial t}+c_g\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\delta|M|^2M=0. \tag{21}$$

引入坐标变换

$$\begin{cases}\tau_0=t,\\ \eta=x-c_gt,\end{cases} \tag{22}$$

于是方程(21)变为

$$i\frac{\partial M}{\partial \tau_0}+\beta\frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2}+\delta|M|^2M=0. \tag{23}$$

在方程(17)中，如果 Brunt－Väisälä 频率 N 为常数，这时 $F(\varphi)$，$G(\varphi, \Theta)$都为零，于是 A_2，B_2 的值无法确定，因而就无法得到非线性 Schrödinger 方程，可见只有当 N 是 z 的函数时，我们才能把(1)式化成非线性 Schrödinger 方程.

三、本征值问题

在大气中大气层结一般在垂直方向上都是非均匀分布的，为此可设

$$N^2=N_0^2+\nu Q(z), \tag{24}$$

其中 $N_0^2\gg\nu$，且 $Q(z)$ 仅为 z 的函数. 将上式代入方程(10)有

$$\begin{cases}\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left(\frac{N_0^2+\nu Q(z)}{c^2}-k^2\right)\varphi=0,\\ \varphi(0)=\varphi(H)=0,\end{cases} \tag{25}$$

方程中已使用了 $\omega=ck$．再将 c 和 φ 展成下列级数

$$\begin{cases} c=c_0+\nu c_1+\cdots, \\ \varphi=\varphi_0+\nu\varphi_1+\cdots. \end{cases} \tag{26}$$

将上式代入(25)式，有近似方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_0}{dz^2}+\left(\dfrac{N_0^2}{c_0^2}-k^2\right)\varphi_0=0, \\ \varphi_0(0)=\varphi_0(H)=0. \end{cases} \tag{27}$$

上式的解为

$$\varphi_0(z)=D_1\sin nz+D_2\cos nz, \tag{28}$$

其中 $n^2=\dfrac{N_0^2}{c_0^2}-k^2$．利用边界条件有

$$\varphi_0(z)=D_1\sin nz, \tag{29}$$

其中 $n=\dfrac{\pi}{H}$．将(29)式的平方模进行归一化有

$$\varphi_0(z)=\sqrt{\frac{2}{H}}\sin\ n\ z. \tag{30}$$

同理有

$$\Theta_0(z)=\sqrt{\frac{2}{H}}\ \sin\ nz. \tag{31}$$

将(30)和(31)式代入方程(20)中的系数 c_g，β中，可近似地求得

$$c_g=\left(\frac{N^2k}{\omega}-2k\omega\right)\Big/(k^2+n^2), \tag{32}$$

$$\beta=\omega\ \frac{3n^2-k^2}{(k^2+n^2)^2}. \tag{33}$$

利用(24)和(26)式，方程(17)可近似地改写为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi^2}{dz^2}+\left(\dfrac{N_0^2}{c_0^2}-4k^2\right)\varphi_2=-\dfrac{\nu}{2c_0^3}\,Q'\varphi_0^2, \\ \varphi_2(0)=\varphi_2(H)=0, \end{cases} \tag{34}$$

其中 $\varphi'=\dfrac{dQ}{dz}$．在大气中，大气层结 N^2 经常有下列两种分布：

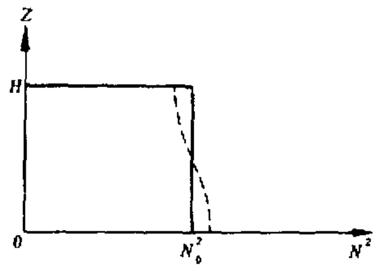

图1　$v>0$　$Q=\cos nz$

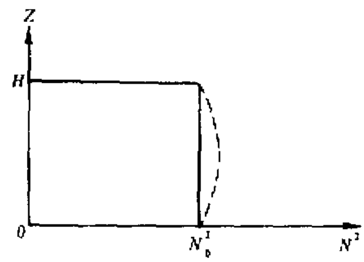

图2　$v>0$　$Q=\sin nz$

(1) 当N^2按图1分布时，方程(34)变为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_2}{dz^2}+\left(\dfrac{N_0^2}{c_0^2}-4k^2\right)\varphi_2=\left(\dfrac{2}{H}\right)\dfrac{vn}{2c_0^3}\sin^3 nz\ , \\ \varphi_2(0)=\varphi_2(H)=0. \end{cases} \tag{35}$$

显然上式的解为

$$\varphi_2(z)=-\frac{v}{4c_0^3Hk^2}\sin nz+\frac{vn}{4c_0^3H(8n^2+3k^2)}\sin 3nz \tag{36}$$

因此利用(30)，(36)式有

$$\delta=-\frac{(24n^2+10k^2)(vn)^2}{16k(8n^2+3k^2)c_0^5H(k^2+n^2)}\ . \tag{37}$$

(2) 当N^2按图2分布时，同样可得到

$$\delta=-\frac{(nv)^2(4n^2+3k^2)}{24kHc_0^5(8n^2+3k^2)(k^2+n^2)}\ . \tag{38}$$

这样，我们便可近似地确定非线性Schrödinger方程的系数．当然，这种方法对于强切变的$N(z)$是不合理的．

四、Benjamin－Feir不稳定

作变换

$$M=a\exp[i\int\rho d\eta]\ , \tag{39}$$

将上式代入方程(23)，然后分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a^2}{\partial\tau_0}+2\beta\dfrac{\partial}{\partial\eta}(\rho a^2)=0\ , \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial\tau_0}+\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[\beta\left(\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial^2 a^2}{\partial\eta^2}-\rho^2\right)+\delta a^2\right]=0. \end{cases} \tag{40}$$

假定小扰动是迭加在定常振幅上的缓变调制波、这时可设上式的解为

$$\begin{cases} a=a_0+\hat{a}\exp\left[i(m\eta-\Omega\tau_0)\right], \\ \rho=\hat{\rho}\exp\left[i(m\eta-\Omega\tau_0)\right]. \end{cases} \tag{41}$$

将上式代入方程(44)，有

$$\begin{cases} -i\Omega\hat{a}+\beta a_0 im\hat{\rho}=0, \\ \hat{a}\left[\dfrac{\beta}{a_0}(im)^2+2\delta a_0(im)\right]+i\Omega\hat{\rho}=0. \end{cases} \tag{42}$$

由此可得调制波的频散关系为

$$\Omega=\pm m\sqrt{\beta^2m^2-2\beta\delta a_0^2}. \tag{43}$$

从上式可以看出，当 $\beta\delta<0$ 时，平方根总是实数，这时 Ω 为实数，因而扰动是中性的，但当 $\beta\delta>0$，并且 m 满足

$$-\sqrt{2}\,a_0\sqrt{\delta/\beta}<m<\sqrt{2}\,a_0\sqrt{\delta/\beta} \tag{44}$$

时，Ω 为虚数，这时扰动随时间指数增长，因而扰动是不稳定的，也就是说在 $\beta\delta>0$ 的情况下，并且波的定常振幅 a_0 满足 $a_0^2>\dfrac{\beta m^2}{2\delta}$ 时，重力内波会出现不稳定，定常振幅 a_0 越大，出现不稳定的可能性就越大.

利用(32)，(33) 和(38)式，可以看出，对于东移的重力内波，也就是 $\omega>0(c_0>0)$，这时，只有当 $3n^2-k^2<0$ 时，才有 $\beta\delta>0$；对于西移的重力内波，当 $3n^2-k^2<0$，同样有 $\beta\delta>0$. 因此不管重力内波是东移还是西移，只要当重力内波的波数满足 $3n^2-k^2<0$ 时，大气中的重力内波便可以产生不稳定. 这种不稳定首先由 Benjamin 和 Feir[4] 研究深水波中的Stokes波时发现的，故称 Benjamin－Feir 不稳定，也叫边带(Side－band)不稳定. 这种不稳定不同于线性理论中的层结不稳定，由此可见即使在层结稳定的情况下，只要当重力内波的波数满足 $3n^2-k^2<0$ 时，这时扰动便可以产生不稳定，也就是说，在大气中，只有对于垂直方向波长较长，而水平方向波长较短的重力内波，其扰动能够产生 Benjamin－Feir 不稳定.

令 $\dfrac{\partial\Omega}{\partial m}=0$，这时在 $m=\sqrt{\dfrac{\delta}{\beta}}a_0$ 处，$2m\Omega$ 有最大不稳定增长率，亦即

$$\max|2m\Omega|=|\delta|\,a_0^2. \tag{45}$$

取 $N_0=10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$，$\nu=10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$，$H=L_x=20\,\mathrm{km}$，这时最大不稳定增长率随振幅变化的曲线如图 3 和图 4 所示.

图 3 和图 4 分别是大气层结按图 1 和图 2 分布时 Benjamin－Feir 不稳定的最大增长率随振幅的变化曲线，从图中，我们可以看出，对于同样大小的振幅 a_0，大气层结按图 1 分布时，最大不稳定增长率随振幅增长较快一些，从上面的讨论可以看出，本文所得到的 Benjamin－Feir 不稳定，只对垂直方向的波长较长，水平方向波长较短的重力内波才成立.

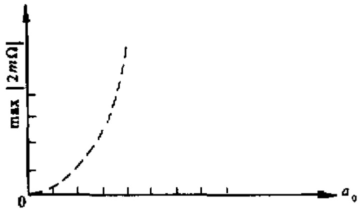

图3 $\nu>0$ $Q=\cos nz$ $\Delta a_0=\sqrt{10}\times10^9$

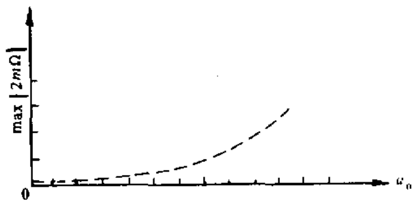

图4 $\nu>0$ $Q=\sin nz$ $\Delta a_0=\sqrt{10}\times10^9$

五、结 论

从上面的讨论我们可以得到如下结论:

(1) 当大气层结N^2是Z的函数时，我们得到了非线性 Schrödinger 方程.

(2) 当大气中重力内波的波数满足$3n^2-k^2<0$时，重力内波可能会产生 Benjamin－Feir 不稳定，也就是说当大气层结处于稳定状态时，对于垂直方向波长较长，水平方向波长较短的重力内波，大气中容易出现 Benjamin-Feir 不稳定.

参 考 文 献

[1] Lighthill, M. J. 1967, Some special cases by the whitham theory, *Proc. R. Soc. Lond.*, A**299**, 28－53.

[2] Chu, V. C and C. C. Mei, 1971, The nonlinear Schrödinger evolution of Stokes waves in deep water, *J. Fluid. Mech.*, **47**, 337－352.

[3] Yuen, H. C and B. M. Lake, 1980, Instablity of waves on deep water, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, **12**, 303－334.

[4] Benjamin, T. B and J. E. Feir, 1967, The disintegration of wave trains on deep water, *J. Fluid. Mech.*, **27**, 417－430.