

34层线性球面原始方程谱模式与 模式大气对地形强迫的响应*

严邦良 黄荣辉

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文建立了一个34层包括牛顿冷却、Rayleigh摩擦和非绝热加热线性原始方程谱模式,用此模式对地形强迫为下边界条件进行时间积分.结果表明,此模式计算稳定,有较好的精度及计算时间节省的特点.模式的积分结果还表明,此模式对球面大气准定常行星波的形成和传播有较好的描写能力.

关键词:线性化原始方程谱模式;计算稳定;节省时间.

一、引 言

对于地球大气中准定常行星波的形成已有不少研究.早在50年代Charney和Eliassen(1949),Bolin(1950),Gambo(1956)研究了地形强迫对中纬度地区准定常行星波的作用^[1-3];而Smagorinsk(1953),Sankar-Rao(1965)研究了热源在中纬度准定常行星波形成中的作用^[4,5].

然而上面的工作都是运用两层模式来研究的.黄荣辉与岸保(1981)指出由于准定常行星波会垂直传播,而两层模式对此无能为力^[6].所以,只有用多层模式才能正确描述大气中准定常行星波的形成.随后黄荣辉与岸保(1982)设计了一个定常准地转34层模式来研究地形与热源在球面大气准定常行星波形成中的作用^[7].林本达(1982),Lindzen等(1982)则运用定常线性原始方程模式来研究准定常行星波的形成^[8,9].

但是,上面所述这些模式都是定态模式,用这种模式不能研究准定常行星波的形成与传播过程.为此,我们设计了一个34层非定常线性球面大气原始方程谱模式来研究全球地形与热源强迫下准定常行星波的形成过程.

二、模式方程、边界条件及谱系数方程

1. 模式方程

在本文中,我们采用包含Rayleigh摩擦原始方程组的滑度方程和散度方程的形式以

1988年9月12日收到,1989年2月20日收到修改稿.

* 本研究得到大气科学与地球流体动力学数值模拟开放实验室部分资助.

及包括 Newtonia 冷却及水平涡旋热力扩散的热流量方程. 在水平方向采用球面坐标. 而在垂直方向采用 $Z(= -H_0 \ln p / p_0)$ 坐标. 它的线性方程组如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{a \cos \theta} \frac{\partial D'}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{D}}{\partial \theta} v' + \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} w' + \frac{2}{a^2 \cos \theta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \frac{\partial v'}{\partial \lambda} \\ + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial \lambda} + \frac{2}{a^2} \bar{u} u' + \frac{2 \sin \theta}{a^2 \cos \theta} \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \theta}{a^2 \cos \theta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} u' \\ = -\nabla_h^2 \phi' + 2\Omega \sin \theta \xi' - \frac{2\Omega}{a} \cos \theta u' - K_r D' + k_h \nabla_h^2 D', \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{a \cos \theta} \frac{\partial \xi'}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \theta} v' + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} w' + \bar{D} \xi' \\ + 2\Omega \sin \theta D' + \bar{\xi} D' + \frac{2\Omega}{a} \cos \theta v' - \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial \theta} = -K_r \xi' + k_h \nabla_h^2 \xi', \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} = \frac{RT}{H_0}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z} - w' = -D' \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{a \cos \theta} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} + \frac{\bar{v}}{a} \frac{\partial T'}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} v' + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{R}{c_p H_0} \right) w' + \bar{w} \frac{\partial T'}{\partial z} + \frac{R}{c_p H_0} \bar{w} T' \\ = \frac{1}{c_p} \frac{d\theta}{dt} - K_x T' + k_h \nabla_h^2 T', \end{aligned} \quad (5)$$

其中 D' 为扰动散度, ξ' 为扰动涡度, ϕ' 为扰动位势高度, W' 为垂直速度, T' 为扰动温度, u' 为扰动风场的东西分量, v' 为扰动风场的南北分量. $x = \sin \theta$, θ 为纬度; $Z = -H_0 \ln p / p_s$, p_s 为一参考气压. 本文取 $p_s = 1000 \text{ Pa}$, H_0 为大气的标高; Q 为加热场; K_r , K_x 分别为 Rayleigh 摩擦和牛顿冷却系数; k_h 为扩散系数; Δ_h^2 为球面拉普拉斯算子; λ 为经度; u' , v' 和 D' , ξ' 之间的关系是

$$u' = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (6)$$

$$v' = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad (7)$$

且

$$D' = \nabla_h^2 \chi, \quad (8)$$

$$\xi' = \nabla_h^2 \psi \quad (9)$$

这里 χ 为势函数, ψ 为流函数.

为了计算上的方便, 把方程组 (1) — (5) 无量纲化, 并引入无量纲参数和无量纲变量如下:

若令 Ω 为地球自转角速度, a 为地球半径, R 为气体常数. 带“'”的量有量纲, 不带“'”的量无量纲, 则有以下关系:

$$\begin{aligned} u &= u' \cos \theta / (2\Omega a), & v &= v' \cos \theta / (2\Omega a), \\ w &= w' / (2\Omega H_0), & \Phi &= \phi' / (2\Omega a)^2, \\ T &= T' R / (2\Omega a)^2, & Q &= Q' R / (2\Omega a)^2 (2\Omega c_p), \\ D &= D' / (2\Omega), & \xi &= \xi' / (2\Omega). \end{aligned}$$

把上述关系式代入(1)一(5)式则可得到无量纲方程如下:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{1-x^2} \frac{\partial D}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} v + \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} w + \frac{2}{1-x^2} \left[\frac{x}{1-x^2} \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \left[\frac{2\bar{u}}{(1-x^2)^2} + 1 \right] u + \frac{2\bar{u}}{1-x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - x\xi = -\nabla^2 \phi - k_r D + k_h \nabla^2 D, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{1-x^2} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} + 1 \right) v + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} w + \bar{D}\xi + (x + \bar{\xi})D - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} = -k_r \xi + k_h \nabla^2 \xi, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{1-x^2} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{x}{1-x^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} v + \sigma(z)w = \frac{d\theta}{dt} - k_r T + k_h \nabla^2 T, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = T, \quad (13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} - W = -D, \quad (14)$$

其中 k_r, k_h, k_a, ∇^2 分别是相应的无量纲量和算子, $\sigma(z)$ 是无量纲的静力稳定参数, 同时无量纲变量 u, v 和 D, ξ 的关系是

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - (1-x^2) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (15)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + (1-x^2) \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (16)$$

$$D = \nabla^2 \chi, \quad (17)$$

$$\xi = \nabla^2 \psi. \quad (18)$$

2. 边界条件

i) 下边界条件

我们假设模式的下边界条件主要是由于气流爬越地形所产生的强迫, 它的无量纲方程是

$$W_s = \frac{\bar{u}}{1-x^2} \frac{\partial G_H}{\partial \lambda}, \quad \text{在 } Z=0. \quad (19)$$

其中 G_H 为无量纲地形函数.

ii) 上边界条件

为方便起见, 在 $z=H_z$ 处 (H_z 为模式顶高度)

$$w = \phi = D = \xi = T = 0. \quad (20)$$

3. 谱系数方程

在这一节中, 我们从模式方程出发, 利用球函数正交特点来求得模式方程的谱系数方程. 若令 $\hat{H}$ 为(10)一(14)中任一变量, 它按球函数的展开式可表达为

$$\hat{H}(x, \lambda, z) = \sum_{l=m} P_l^m [\hat{H}_{A,l,m}(z) \cos m\lambda + \hat{H}_{B,l,m} \sin m\lambda], \quad (21)$$

其中 P_l^m 为缔合勒让得多项式. 把(21)式代入(10)一(18)式并进行正交化处理便可得到各变量和边界条件的谱系数方程如下:

$$\frac{\partial D_{A,L}^M}{\partial t} = L(L+1) \phi_{A,L}^M - \pi_{1,r}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial D_{B,L}^M}{\partial t} = L(L+1) \phi_{B,L}^M - \pi_{2,r}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \xi_{A,L}^M}{\partial t} = -\pi_{3,r}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \xi_{B,L}^M}{\partial t} = -\pi_{4,r}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial T_{A,L}^M}{\partial t} + \sigma(z) W_{A,L}^M = -\pi_{5,r}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial T_{B,L}^M}{\partial t} + \sigma(z) W_{B,L}^M = -\pi_{6,r}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \phi_{A,L}^M}{\partial z} = T_{A,L}^M, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \phi_{B,L}^M}{\partial z} = T_{B,L}^M, \quad (29)$$

$$\frac{\partial W_{A,L}^M}{\partial z} - W_{A,L}^M = -D_{A,L}^M, \quad (30)$$

$$\frac{\partial W_{B,L}^M}{\partial z} - W_{B,L}^M = -D_{B,L}^M. \quad (31)$$

其中

$$\pi_{1,r} = \sum \{ I_1 D_{B,L}^M + I_4 u_{B,e}^M + I_5 W_{B,L}^M + (I_6 + I_7) u_{A,L}^M - I_8 \xi_{A,e}^M \} + u_{A,L}^M + [K_R + K_h(L+1)L] D_{A,L}^M \quad (32)$$

$$\pi_{2,r} = \sum \{ -I_2 D_{A,L}^M - I_4 v_{A,L}^M - I_5 W_{A,L}^M + (I_6 + I_7) u_{B,L}^M - I_8 \xi_{B,L}^M \} + u_{B,L}^M + [K_R + K_h(L+1)L] D_{B,L}^M \quad (33)$$

$$\pi_{3,r} = \sum \{ I_1 \xi_{B,L}^M + I_9 v_{A,e}^M + I_{10} W_{A,e}^M + I_{12} D_{A,L}^M - I_{14} W_{A,L}^M \} + v_{A,L}^M + [K_R + K_h(L+1)L] \xi_{A,L}^M \quad (34)$$

$$\pi_{4,r} = \sum \{ -I_8 \xi_{A,L}^M + I_9 v_{B,e}^M + I_{10} W_{B,L}^M + I_{12} D_{B,L}^M - I_{14} W_{B,L}^M \} + v_{B,L}^M + [K_R + K_h(L+1)L] \xi_{B,L}^M \quad (35)$$

$$\pi_{5,r} = \sum [I_1 T_{B,L}^M - I_{15} v_{A,L}^M] - \frac{d\theta_{A,L}^M}{dt} + [K_a + K_h(L+1)L] T_{A,L}^M \quad (36)$$

$$\pi_{6,r} = \sum [-I_1 T_{A,L}^M - I_{15} v_{B,L}^M] - \frac{d\theta_{B,L}^M}{dt} + [K_a + K_h(L+1)L] T_{B,L}^M \quad (37)$$

(32)~(37)中谱系数的标号意义如下:

A, B, M, L 的意义同(21)式. $\sum_{l=M}^{M+|L|} = \sum$, 在本文中 $|L|=15$. $\pi_{i,r}$ 中的 r 为垂直格点的

标号. I_i 为如下积分表达式:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1}^1 \frac{M\bar{u}}{1-x^2} p_l^M p_L^M dx, \\
I_4 &= \int_{-1}^1 \frac{M}{1-x^2} \left[\frac{x}{1-x^2} \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] p_l^M p_L^M dx, \\
I_5 &= \int_{-1}^1 \frac{M}{1-x^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} p_l^M p_L^M dx, \\
I_6 &= \int_{-1}^1 \frac{2\bar{u}}{(1-x^2)^2} p_l^M p_L^M dx, \\
I_7 &= \int_{-1}^1 \frac{2\bar{u}x}{1-x^2} \frac{\partial p_l^M}{\partial x} p_L^M dx, \\
I_8 &= \int_{-1}^1 x p_L^M p_l^M dx, \\
I_9 &= \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} p_L^M p_l^M dx, \\
I_{10} &= \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} p_L^M p_l^M dx, \\
I_{12} &= \int_{-1}^1 (x + \bar{\xi}) p_L^M p_l^M dx, \\
I_{14} &= \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial p_l^M}{\partial x} p_L^M p_l^M dx, \\
I_{15} &= \int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} p_L^M p_l^M dx.
\end{aligned}$$

下边界条件的谱系数方程是

$$W_{S.A.L}^M = \sum I_i G_{H.B}^M, \quad (38)$$

$$W_{S.B.L}^M = \sum -I_i G_{H.A}^M, \quad (39)$$

其中 $G_{H.A}^M$ 、 $G_{H.B}^M$ 是无量纲地形函数的谱系数。(15)、(16)的谱系数关系是

$$u_{A.L}^M = -\frac{M}{L(L+1)} D_{B.L}^M + \sum \frac{I_{16}}{L(L+1)} \xi_{A.L}^M, \quad (40)$$

$$u_{B.L}^M = \frac{M}{L(L+1)} D_{A.L}^M + \sum \frac{I_{16}}{L(L+1)} \xi_{B.L}^M, \quad (41)$$

$$v_{A.L}^M = -\frac{M}{L(L+1)} \xi_{B.L}^M - \sum \frac{I_{16}}{L(L+1)} D_{A.L}^M, \quad (42)$$

$$v_{B.L}^M = \frac{M}{L(L+1)} \xi_{A.L}^M - \sum \frac{I_{16}}{L(L+1)} D_{B.L}^M. \quad (43)$$

$$\text{其中 } I_{1,6} = \int_{-1}^1 \frac{\partial p_l^M}{\partial x} p_l^M (1-x^2) dx.$$

三、模式的差分方程与参数

1. 时间和空间差分格式及差分方程

为了叙述上的方便和清楚起见, 我们研究如下方程组的差分方程:

$$\frac{\partial D'}{\partial t} = L(L+1)\phi' - \mathcal{P}_{1,r}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \sigma(z)W' = -\mathcal{P}_{5,r}, \quad (45)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} = T', \quad (46)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z} - w' = -D'. \quad (47)$$

显然, (44) — (47) 式分别和 (22)、(23)、(26)、(27)、(28)、(29)、(30)、(31) 式相当。 $\mathcal{P}_{1,r}$ 、 $\mathcal{P}_{5,r}$ 分别和 $\pi_{1,r}$ 、 $\pi_{2,r}$ 、 $\pi_{5,r}$ 、 $\pi_{6,r}$ 相当。

在 (44) — (47) 式中作变换 $y' = y^{AZ}$, $y = e^{-AZ}y'$, $0 < A < 1$, 在这种变换下 (44) — (47) 式变成

$$\frac{\partial D}{\partial t} = L(L+1)\phi - \mathcal{P}_{1,r}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \sigma(z)W = -\mathcal{P}_{5,r}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + A\phi = T, \quad (50)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} - (1-A)w = -D. \quad (51)$$

其中 $\mathcal{P}_{1,r}$ 、 $\mathcal{P}_{5,r}$ 是经过 $y' = y^{AZ}$ 变换后的 $\mathcal{P}_{1,r}$ 、 $\mathcal{P}_{5,r}$ 。

对 (48) — (51) 式在垂直方向上进行差分. 在 $0 < Z < 92\text{km}$ (有量纲) 的区间内, 采用不等距的差分法, 把整个区间分成 34 层. 并设 ΔZ_r 为不等距垂直差分距离, ΔZ_r 在各层的取法见文献 [b]. 把 (50) 式写在 $r+1/2$ 层上, 就是

$$T_{r+1/2} = \frac{(2+A\Delta z_r)\phi_{r+1} - (2-A\Delta z_r)\phi_r}{2\Delta z_r} \quad (52)$$

把连续方程 (51) 写在 r 层上就是

$$\begin{aligned} [1 - 0.5(1-A)\Delta z_r^*] W_{r+1/2} - [1 + 0.5(1-A)\Delta z_r^*] W_{r-1/2} \\ = -\Delta z_r^* D_r, \end{aligned} \quad (53)$$

其中 $\Delta z_r^* = (\Delta z_r + \Delta z_{r+1})/2$, 作记号

$$F_{1,r} = 2 + A\Delta z_r, \quad F_{2,r} = 2 - A\Delta z_r,$$

$$E_{1,r} = 1 - 0.5(1-A)\Delta z_r^*, \quad E_{2,r} = 1 + 0.5(1-A)\Delta z_r^*$$

则 (52)、(53) 式变成

$$T_{r+1/2} = \frac{F_{1,r} \phi_{r+1} - F_{2,r} \phi_r}{2\Delta z_r} \quad (54)$$

$$E_{1,r} W_{r-1/2} - E_{2,r} W_{r-1/2} = -\Delta z_r^* D_r \quad (55)$$

时间差分采用半隐式差分方法, 并取时间步长为 Δt , 则(48)、(49)式的时间差分方程是

$$\frac{D^{n+1} - D^{n-1}}{2\Delta t} = L(L+1) [\beta_1 \phi^{n+1} + \beta_2 \phi^n + \beta_3 \phi^{n-1}] - \mathcal{P}_{1,r} \quad (56)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n-1}}{2\Delta t} + \sigma(z) [\beta_1 W^{n+1} + \beta_2 W^n + \beta_3 W^{n-1}] = \mathcal{P}_{5,r} \quad (57)$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是时间方向的平滑系数 $\mathcal{P}_{1,r}, \mathcal{P}_{5,r}$ 中的摩擦项都是取 $(n-1) \Delta t$ 时刻的值. 整理后有

$$D^{n+1} = 2\Delta t L(L+1) \beta_1 \phi^{n-1} + \Gamma_{1,r}, \quad (58)$$

$$T^{n+1} = -2\Delta t L(L+1) \beta_1 W^{n+1} + \Gamma_{5,r}, \quad (59)$$

其中

$$\begin{aligned} T_{1,r} &= 2\Delta t L(L+1)(\beta_2 \phi^n + \beta_3 \phi^{n-1}) + D^{n-1} - 2\Delta t \mathcal{P}_{1,r} \\ \Gamma_{5,r} &= T^{n-1} - 2\Delta t \mathcal{P}_{5,r} - 2\Delta t \sigma(z) (\beta_2 W^n + \beta_3 W^{n-1}) \end{aligned}$$

在(54)、(55)、(58)、(59)式中消去 D, T, W 可得到 ϕ 的差分方程是

$$\begin{aligned} -A_1 \phi_{r+1}^{n+1} + [A_2 + 2A_4 \Delta t L(L+1) \beta_1] \phi_r^{n+1} - A_3 \phi_{r-1}^{n+1} &= A_4 T_{1,r} \\ -2\Delta z_{r-1} E_{1,r} T_{5,r+1/2} + \frac{\sigma(z_r + 1/2)}{\sigma(z_r - 1/2)} 2\Delta z_{r-1} E_{2,r} \Gamma_{5,r-1/2}, \end{aligned} \quad (60)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= E_{1,r} * F_{1,r} \frac{\Delta z_{r-1}}{\Delta z_r}, \\ A_2 &= E_{1,r} * F_{2,r} \frac{\Delta z_{r-1}}{\Delta z_r} + \frac{\sigma(z_r + 1/2)}{\sigma(z_r - 1/2)} E_{2,r} * F_{1,r}, \\ A_3 &= \frac{\sigma(z_{r+1/2})}{\sigma(z_{r-1/2})} E_{2,r} * F_{2,r}, \quad A_4 = 4\Delta z_{r-1} \Delta t \sigma(z_{r+1/2}) \beta_1 \Delta z_r^*. \end{aligned}$$

关于 ϕ^{n+1} 在下边界上的方程是

$$\begin{aligned} q_1 \phi_1^{n+1} + q_2 \phi_2^{n+1} &= -2\Delta t \Delta z_1^2 \beta_1 \sigma(z_{1+1/2}) \\ &\quad + 2\Delta z_1 \{ -\Gamma_{5,1/2} + 2\Delta t \sigma(z_{1/2}) \beta_1 [1 + 0.5\Delta z_1 (1-A) w_1] \}, \end{aligned} \quad (61)$$

其中

$$\begin{aligned} q_1 &= (2 - A \Delta z_1) + 4\Delta t^2 \Delta z_1^2 \beta_1^2 \sigma(z_{1/2}) L(L+1), \\ q_2 &= 2 + A \Delta z_1. \end{aligned}$$

从 q_i 和 A_j 的表示式可以看到, 若 $\sigma(z_r) < \sigma(z_{r+1})$, 且 A 不取得很小, 就会发生 $q_1 < q_2$, $A_2 + A_4 < A_1 + A_3$, 因而产生计算不稳定. 只有当 $A=0$ 时, 差分方程(60)才是一个稳定的计算格式.

在本研究中我们取 $A=0$, $\Delta t=0.525$ (有量纲时间为一小时), $\beta_1=\beta_3=0.5$, $\beta_2=0$.

由 D 和 ϕ 的关系式同样可以得到关于 D 的一个方程组. 因此, 我们的计算过程是: 运用方程组先求出 ϕ , D , 再由热力学方程求出 T , 由连续方程求出 W .

关于涡度方程的谱系数方程 (24)、(25) 的解法是采用时间中央差.

最后可用方程 (40) — (43) 求出 u , v 的谱系数.

本文的计算用三步法起步, 并用时间向前差计算第一步. 关于时间向前差的差分方程及其推导过程不再给出.

2. 参数

牛顿冷却系数的取法如图 1^[7], Rayleigh 摩擦系数在 48km 以下取常数, 而在 48km 以上取一随高度增加的分布来控制上边界反射的反射波, 取法如下:

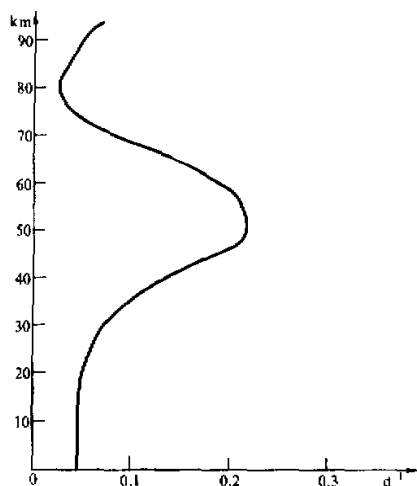


图 1 牛顿冷却系数 (单位: $10^{-8} s^{-1}$)

$$K_n = \begin{cases} 8.6 * 10^{-8} s^{-1}, & Z \leq 48 \text{ km}, \\ 8.6 * 10^{-8} s^{-1} \left\{ 1 + 20 * \left[1 - \exp \left(-\frac{Z-48}{5} \right) \right] \right\}, & Z > 4.8 \text{ km}. \end{cases}$$

热力扩散系数取法与 Rayleigh 摩擦系数相同, 表示式是:

$$K_h = \begin{cases} 3.646 * 10^{-8} s^{-1}, & Z \leq 48 \text{ km}, \\ 3.646 * 10^{-8} s^{-1} \left\{ 1 + 5 * \left[1 - \exp \left(\frac{Z-48}{5} \right) \right] \right\}, & Z > 48 \text{ km}. \end{cases}$$

为简单起见, 垂直静力稳定度 $\sigma(Z)$ 只取与高度有关的函数, 且它的值是根据 1966 年美国标准大气温度计算得来的.

四、北半球冬季模式大气对地形强迫的响应

正如引言中所述, 模式大气对全球地形与热源的响应已有不少研究, 得到了不少结果. 我们用本文所设计的模式来研究模式大气对地形强迫的响应.

计算分别对 $m=1, 2, 3$ 进行. 基本气流取法如图 2, 全球地形取法同 Berkořsky 和 Bertoni(1955)^[10], 对于 $m=1, 2$ 的振幅如图 3.

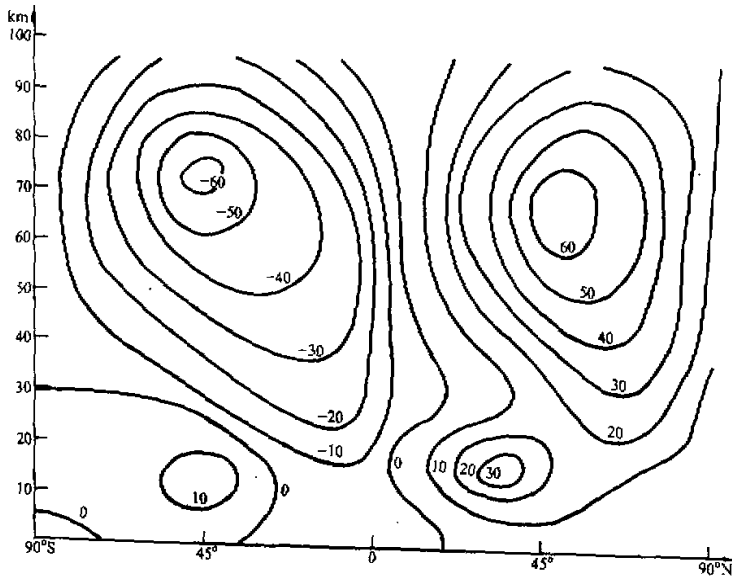
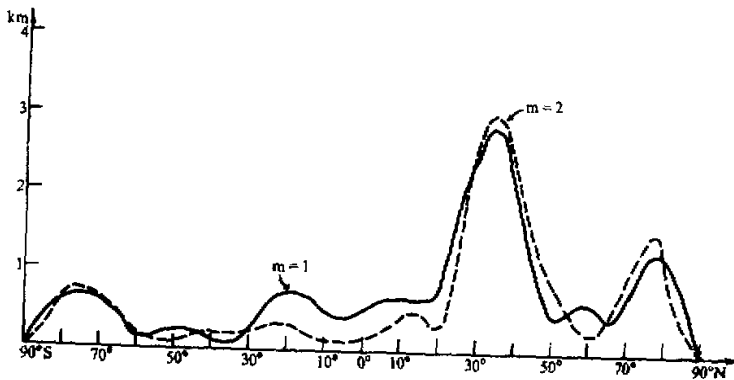


图 2 基本气流的分布

图 3 $m=1.2$ 时地形振幅图

实线代表 $m=1$, 虚线代表 $m=2$, 单位: m

所有变量的初值都取为零.通过三步法起步积分至 60 天.图 4 是 $k=1$ 时,在 45°N , 12km 高处的振幅随时间的变化.从图中可以清楚地看到,此处的振幅在 10 天以后就已基本稳定,随时间变化不大,说明此模式计算稳定.由于北半球是冬季而南半球是夏季,已有的结果说明,行星波在夏季基本气流中不易向上传播,并且南半球的地形强迫比北半球弱得多,因而振幅的值是很小的.本文的结果也是如此.因此,我们对南半球的结果不作分析.

图 5 和图 6 分别是纬向波数 1 与 2 的振幅与位相分布. 从图 5 可以看到, 在离地面 40km, 65°N 处有一高值中心, 其最大值是 155m. 在 45°N 和离地面 12km 高处有另一高值中心, 其最大值是 41m. 这个结果与文献[7]的结果有很好的—致性.

从图 6 可以看到, 在 65°N 和离地面 28km 的高度上有一个最大值中心, 其最大值是 221m. 与文献[7]不一致的是, 在低纬地区已不存在第二高值中心.

黄荣辉与岸保(1983)^[11]指出, 行星波在冬季基本气流中传播, 存在着两支波导, 分别从中纬度附近出发, 一支传向赤道, 另一支传向极地, 然后在高纬度传向平流层. 因而在模式大气对半球地形强迫响应的行星波振幅图中可以有两个高值中心, 一个位于高纬度, 一个位于低纬度. 本文对 $m=1$ 的积分结果也说明, 行星波在冬季北半球基本气流中的传播存在两支波导, 一支指向赤道, 一支指向极地(见图 5).

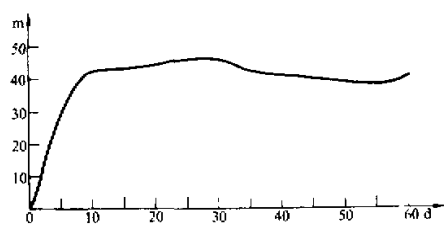


图 4 $k=1$ 时在 45°N 12km 处
振幅随时间的变化 单位: m

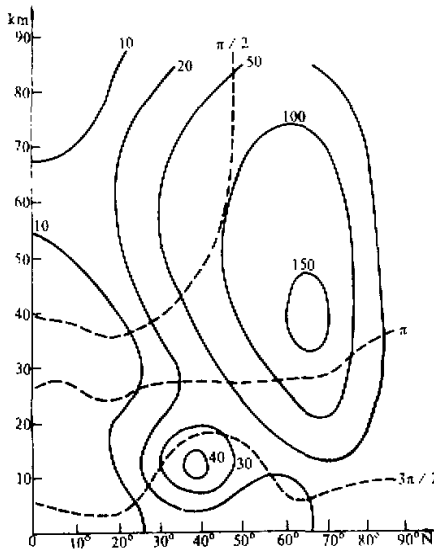


图 5 $m=1$ 时模式大气对全球地形强迫的
行星波振幅垂直分布

(实线, 单位: m) 和位相分布 (虚线)

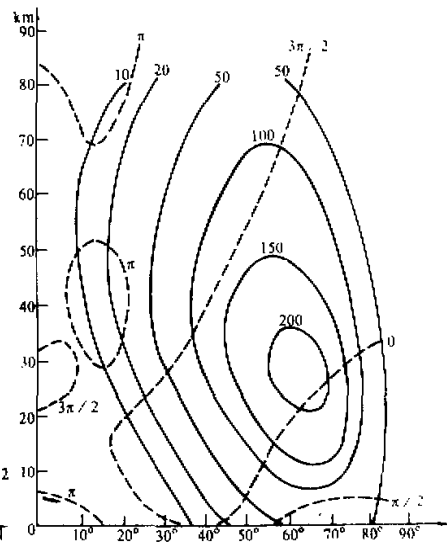


图 6 $m=2$ 时, 其它同图 5

本文对于 $m=2$ 的积分结果, 在中纬度没有第二个高值中心, 但从计算过程中能量传播的方向来看, 可清楚地见到, 当 $m=2$ 时同样存在两个能量传播的通道, 一个指向低纬

度,另一个指向高纬度.因此, $m=2$ 的积分结果也证明了北半球冬季基本气流中存在着两支波导(这个问题的详细情况将另文给出).

图 7 是 30km 高的位势高度场.从图可见,在北半球高纬度地区有两个扰动负值区和两个扰动正值区.其中一个正值区位于欧洲大陆和大西洋沿岸,另一正值中心位于太平洋西岸的鄂霍次克海附近.负值中心一个位于北美大陆上空,另一个位于乌拉尔山地区.

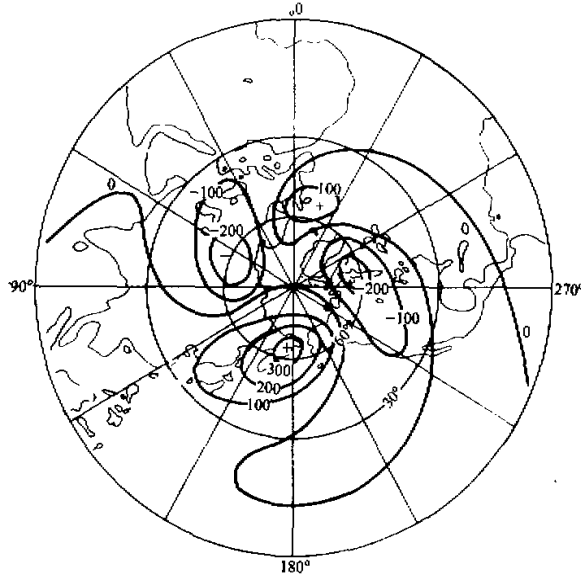


图 7 模式大气对全球地形强迫在 30km 处位势高度场的分布
(单位: m)

五、结论与讨论

本文设计了一个 34 层包括牛顿冷却、Rayleigh 摩擦和非绝热加热线性原始方程谱模式.用此模式对以全球地形强迫为下边界条件的积分表明,此模式具有计算稳定,且对球面大气准定常行星波的形成和传播有较好的描写能力.本文的求解过程所建立的方程组的矩阵是三对角的.众所周知,三对角矩阵方程组的求解是省计算时间的.

本文还得到了在方程中作变量变换 $y' = ye^{Az}$, 当 $\sigma(Z_t) < \sigma(Z_{t-1})$ 时, A 要取得很小,否则会发生计算不稳定.

本文的计算结果也证明,在北半球冬季基本气流中存在着两支波导,一支指向赤道,一支指向极地.

本文所设计的模式是一个线性非定常模式,线性方程组在某种基本气流条件下会产生不稳定,这种不稳定是线性的,解会随着时间无限地增长.在实际大气中,基本气流也是随着时间变化的.扰动对基本气流的改变起着重要的作用.因此,更完善的模式应包括

有扰动对基本气流的相互作用。

参 考 文 献

- [1] Charney, J.G. and A.Eliassen 1949, A numerical method for predicting the perturbations in the middle-latitude westerlies, *Tellus*, **1**, 38—54.
- [2] Bohn, B., 1950, On the influence of the earth's orography on the general Character of the westerlies, *Tellus*, **2**, 184—195.
- [3] Gambo, K., 1956, The topographical effect upon the jet stream in the westerlies, *J. Meteor. Soc. Japan*, **34**, 24—28.
- [4] Sankar-Rao, M., 1965, On the influence of the vertical distribution of stationary heat sources and sink in the atmosphere, *Mon. Wea. Rev.*, **93**, 417—420.
- [5] Smagorinsky, J., 1953, The dynamical influence of stationary mean motions of the atmosphere, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **79**, 342—366.
- [6] Huang Ronghui, and K.Gambo, 1981, The response of a model atmosphere in middle latitude to forcing by topography and stationary heat sources, *J. Meteor. Soc. Japan*, **59**, 200—237.
- [7] Huang Ronghui, and K.Gambo, 1982, The response of a hemispheric multi-level atmosphere to forcing by topography and stationary heat sources, part I, II, *J. Meteor. Soc. Japan*, **60**, 78—108.
- [8] Lin BendA, 1982, The behavior of winter stationary Planetary waves forced by topography and diabatic heating, *J. Atmos. sci.*, **39**, 1206—1226.
- [9] Lindzen, R.S., T. ASO, and D.Jacqmin, 1982, Linearized calculations of stationary waves in the atmosphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, **60**, 66—77.
- [10] Berkofsky, L. and E.A.Berton, 1955, Mean topographic charts for the entire earth, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **36**, 350—354.
- [11] 黄荣辉, 岸保二郎, 1983, 关于冬季北半球定常行星波传播另一支波导的研究, 中国科学, B 辑, 第 10 期, 940—950.

LINEARIZED GLOBAL SPECTRAL MODEL OF PRIMITIVE EQUATION WITH 34-LEVEL AND RESPONSE OF MODEL ATMOSPHERE TO FORCE OF TOPOGRAPHY

Yan Bangliang and Huang Ronghui

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

In this paper, a linearized spectral model of the primitive equation with 34-level including Newtonian cooling, rayleigh friction and diabatic heating was established. The time integrating of the model was carried out by taking the topography forcing as the lower boundary condition. The integrating results show that the model is stable and has the advantages of time saving and high precision in the calculation. It also shows that the model has strong describing ability on the formation and transportation of stationary planet waves.

Key words: A linearized spectral model of the primitive equation; stable and time saving in the calculation.