

二维界面流的稳定性及相路 方程的椭圆型条件

欧阳首承 朱克云

(成都气象学院气象系)

提 要

针对天气实践的一些问题,本文改变了文献[1]的某些作法,分别就上、下行波的稳定性情况,切变邻近区域相路方程的类型条件作了较细致的讨论.结果表明:不稳定极易发生在背急流方向而立的左侧,并在不连续界面的两侧其稳定性是不同的,其相路方程也是有条件的——急流轴及其左侧邻近地区,一般满足椭圆型条件,而其右侧则有可能出现双曲型,从而揭示了扰动沿东西向传播时不稳定易于维持的原因,并与天气实践吻合.

关键词: 椭圆型或双曲型相路方程;行波;急流;切变;稳定性.

一、引 言

对切变及其邻近的扰动问题,可视为基于基流上的扰动,或者是作为基流主体边缘(或界面)扰动的物理问题,利用低谱(高截断)或弱非线性近似处理,似乎有一定的合理性^[2,3],所以本文基于[1]的基础,把水平切变视为基流边缘(或界面扰动),进行了级数截断处理.除了讨论了上、下行波(即沿特征线上传、下传的波动)的稳定性情况外,还针对其相应方程的特征根轨线的性态建立了相路方程,据不同情况,其相路方程的类型是有条件的.一定条件下,会转化为双曲型,并指出了扰动分别沿 x 、 y 、 z 方向传播的具体特征和方程类型的转化条件.其中^[1] $\frac{d\bar{u}}{dy} \approx 0$ 只是本文的一种特例.所以,本文某些结果除了扩展[1]之外,也指出了某些稳定性得已维持与否的实质问题,并具有实际性.

二、基本方程组

引入不考虑 w (上升运动) 与相应变量的垂直变化相互作用项的扰动方程组为^[1]:

1988年5月20日收到,1989年3月31日收到再改稿.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\bar{u} + u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\bar{u} + u) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\bar{u} + u) \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\rho}{\rho}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) + (\bar{u} + u) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) - \frac{N^2}{g} w = 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\bar{u} = \bar{u}(y)$ 为基本气流的流速, 仅为 y 的函数, $f = \text{Const.}$, N 是 Brunt-Vaisala 频率, 取为常数. 其余均为气象上常用符号.

(1) 式除了是二维流体外并考虑了基流切变与 v 的相互作用项, 系多变量非线性方程. 为此, 引入

$$\begin{cases} u = U(\xi), \quad v = V(\xi), \quad w = W(\xi), \\ p = P(\xi), \quad \frac{\rho}{\rho} = \pi(\xi), \\ \xi = kx + my + nz - vt, \end{cases} \quad (2)$$

(2) 式代入 (1) 式, 经演算整理, 有

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\xi} = \frac{1}{AB} (a_1 U + b_1 V + c_1 \pi) = F(U, V, \pi), \\ \frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{AB} (a_2 U + b_2 V + c_2 \pi) = G(U, V, \pi), \\ \frac{d\pi}{d\xi} = \frac{1}{ngB} (a_3 U + b_3 V) = H(U, V), \end{cases} \quad (3)$$

式中, $A = k^2 + m^2 + n^2$, $B = -v + k\bar{u} + kU + mV$,

$$a_1 = kmf, \quad b_1 = (m^2 + n^2) \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right), \quad c_1 = kng,$$

$$a_2 = -f(k^2 + n^2), \quad b_2 = -km \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right), \quad c_2 = mng,$$

$$a_3 = -kN^2, \quad b_3 = -mN^2.$$

(3) 式的右端不显含 ξ , 属于一阶自治系统的常微分方程组. 按常微分方程的定性分析,

$\frac{dU}{d\xi}$, $\frac{dV}{d\xi}$, $\frac{d\pi}{d\xi}$ 同时为零的平衡点是:

$$(U, V, \pi) = (0, 0, 0)$$

其物理意义是大气处于未扰动的静止状态.将(3)式的右端在平衡点附近作 Taylor 级数展开,则有

$$\begin{cases} F(U, V, \pi) = \frac{1}{A(-v + k\bar{u})} \left(a_1 U + b_1 V + c_1 \pi - \frac{ka_1}{-v + k\bar{u}} U^2 + \dots \right), \\ G(U, V, \pi) = \frac{1}{A(-v + k\bar{u})} \left(a_2 U + b_2 V + c_2 \pi + \frac{ka_2}{-v + k\bar{u}} U^2 + \dots \right), \\ \pi(U, V) = \frac{1}{A(-v + k\bar{u})} \left(a_3 U + b_3 V + \frac{ka_3}{-v + k\bar{u}} U^2 + \dots \right). \end{cases} \quad (4)$$

(4)式的非线性项作用见[1],本文不同于[1]的是不引入 $U_\xi = -\frac{1}{v} \dot{U}$ 等变换,并可据 $v \geq 0$ 的不同情况,分析其上、下行波的稳定性及水平切变作用的稳定类型.

三、水平切变作用与二维波的稳定性

为了便于比较,先分析 $\frac{d\bar{u}}{dy} = 0$, $|v| \gg k\bar{u}$ 情况下的稳定性,即(4)式略去二次以上的项,有

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\xi} = -\frac{1}{Av} [kmfU + f(m^2 + n^2)V + kng\pi], \\ \frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{Av} [(k^2 + n^2)fU + kmfV - mng\pi], \\ \frac{d\pi}{d\xi} = \frac{N^2}{ngv} [kU + mV]. \end{cases} \quad (5)$$

由(5)式的①、②两式可以证明

$$mU_\xi - kV_\xi = -\frac{f}{v}(kU + mV), \quad (6)$$

式中的下标 ξ 表示求偏导数,再利用(5)式的③式求积分(积分常数取为零),则有

$$\pi = \frac{N^2}{ngf}(kV - mU). \quad (7)$$

(7)式代入(5)中①、②式,有

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\xi} = \frac{1}{Avf} \{ km(N^2 - f^2)U - [(m^2 + n^2)f^2 + k^2 N^2]V \}, \\ \frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{Avf} \{ [(k^2 + n^2)f^2 + m^2 N^2]U - km(N^2 - f^2)V \}. \end{cases} \quad (8)$$

易得(8)式的特征方程

$$\lambda^2 + \frac{n^2 f^2 + (k^2 + m^2) N^2}{A v^2} = 0. \quad (9)$$

(9)式的结果与[1]的结果基本类同.主要差别是不含 v^2 因子,但由于是 v 的平方,所以其稳定性结论与[1]一致.

其次,分析 $\frac{d\bar{u}}{dy} \neq 0$,即在切变作用下的二维波的稳定性,采用类似(5)式的处理,但注意 b_1, b_2 中 $\frac{d\bar{u}}{dy} \neq 0$,有

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\xi} = \frac{k m f U + (m^2 + n^2) \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) V + k n g \pi}{-v A}, \\ \frac{dV}{d\xi} = \frac{-f(k^2 + n^2) U - m k \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) V + m n g \pi}{-v A}, \\ \frac{d\pi}{d\xi} = \frac{-N^2(kU + mV)}{-v n g}, \end{cases}$$

其相应的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} \frac{k m f}{-v A} - \lambda & \frac{(m^2 + n^2) \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right)}{-v A} & \frac{k n g}{-v A} \\ \frac{f(k^2 + n^2)}{v A} & \frac{m k \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right)}{v A} - \lambda & \frac{m n g}{-v A} \\ \frac{N^2 k}{n g v} & \frac{N^2 m}{v n g} & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

展开后经整理有:

$$\lambda^3 + \frac{k m \frac{d\bar{u}}{dy}}{v A} \lambda^2 + \frac{n^2 f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) + (k^2 + m^2) N^2}{v^2 A} \lambda + \frac{m k N^2 \frac{d\bar{u}}{dy}}{v^3 A} = 0. \quad (11)$$

由 Hurwitz 判别式得知,上式渐近稳定的充分必要条件是

$$\begin{cases} \frac{km \frac{d\bar{u}}{dy}}{v A} > 0, \\ \frac{km N^2 \frac{d\bar{u}}{dy}}{v^3 A} > 0, \\ \frac{km \frac{d\bar{u}}{dy} \left[n^2 f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) + (k^2 + m^2) N^2 \right]}{v^3 A^2} - \frac{km N^2 \frac{d\bar{u}}{dy}}{v^3 A} > 0. \end{cases}$$

由于 k, m, n 均大于零, 有

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dy} > 0, \\ \frac{N^2 \frac{d\bar{u}}{dy}}{v^3} > 0, \\ \frac{\left[f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) - N^2 \right] \frac{d\bar{u}}{dy}}{v^3} > 0. \end{cases} \quad (12)$$

当 $v > 0$, 即下行波(自西向东传播的波动), 则

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dy} > 0, & \begin{cases} N^2 > 0, & \begin{cases} f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) > N^2, & \text{稳定,} \\ f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) < N^2, & \text{不稳定,} \end{cases} \\ N^2 < 0, & f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \text{为任意, 不稳定,} \end{cases} \\ \frac{d\bar{u}}{dy} < 0, & N^2, f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \text{为任意, 不稳定.} \end{cases} \quad (13)$$

(13)式的结果与[1]相反.虽然稳定性是有条件的,但对于下行波,除了稳定层结,及切变不强(即 $f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right)$ 较大,并大于 N^2 ,或 $f^2 > f \frac{d\bar{u}}{dy}$,即切变不强)的情况下为稳定解外,其他情况均是无条件的.即无论层结及 $f \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right)$ 在任何情况下均是不稳定的.在切变作用下,二维波的不稳定性有较大的扩展.此结果对切变线与不稳定的降水天气相联系的问题给出一种理论解释.

当 $v < 0$, 即对于上行波,则

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}}{dy} < 0, \\ \frac{d\bar{u}}{dy} > 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} N^2 > 0, \\ N^2 < 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} N^2 < f\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right), \text{ 稳定,} \\ N^2 > f\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right), \text{ 不稳定,} \\ f\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) \text{ 为任意, 不稳定,} \\ f\left(f - \frac{d\bar{u}}{dy}\right) \text{ 为任意, 不稳定.} \end{array} \right. \quad (14)$$

(14)式与[1]相同,故[1]的稳定性讨论只体现了上行波的情况.此种情况形式上是急流左侧的稳定性是有条件的,而急流右侧的不稳定是无条件的.然而此种情况,如背急流方向,则也是相应于急流的左侧.故总体来说,两者不矛盾.背急流而言,不稳定易发生在急流的左侧.但应说明,上行波在中纬度不多见.至于是否在低纬度有此情况,有待事实证实.

四、解的性质及相路方程的类型

由于上述结果不同于[1],所以解的性质及相应的相路方程的类型也有所不同.为此,同样考虑 $|v| \gg |k\bar{u}|$,取(3)式的 Taylor 展式的一次项,有

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{d\xi} = -\frac{1}{Av} \left[kmfU + (m^2 + n^2) \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) V + kng\pi \right], \\ \frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{Av} \left[(k^2 + n^2)fU + mk \left(f - \frac{d\bar{u}}{dy} \right) V - mng\pi \right], \\ \frac{d\pi}{d\xi} = \frac{N^2}{ngv} (kU + mV). \end{array} \right. \quad (15)$$

(15)式的特征方程仍然是 λ 的三次代数方程(11)式,故我们分别按特征根轨线的性态分为下列三种情况讨论之.

1. 结点或鞍点

此种情况下,三个特征根均为实根,设 U 的一个特解为

$$U = U_0 e^{\lambda \eta}, \quad (16)$$

式中 U_0 为 $\eta=0$ 时的 U 值.(16)式代入(15)式,有

$$\left\{ \begin{array}{l} V = B_0 U_0 e^{\lambda \eta}, \\ \pi = C_0 U_0 e^{\lambda \eta}, \end{array} \right. \quad (17)$$

其中

$$B_0 = \frac{\nu \lambda f(k^2 + n^2) - kmN^2}{\nu^2 \lambda^2 A - \nu km \left(f - \frac{du}{dy}\right) + m^2 N^2},$$

$$C_0 = \frac{N^2}{\nu \lambda mg} (k + B_0 m).$$

2. 焦点

此种情况的特征根 λ 为复数共轭复根:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$$

设特征方程对应的一特解为

$$U = U_0 e^{\alpha \eta} \cos \beta \eta. \quad (18)$$

(18)式代入(15)式,有

$$\begin{cases} V = B_1 e^{\alpha \eta} \cos \beta \eta + C_1 e^{\alpha \eta} \sin \beta \eta, \\ \pi = B_2 e^{\alpha \eta} \cos \beta \eta + C_2 e^{\alpha \eta} \sin \beta \eta, \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$B_1 = U_0 \frac{\alpha f(k^2 + n^2) - kmnAN^2}{\nu A(\alpha^2 - \beta^2) - \alpha k \left(f - \frac{du}{dy}\right) + mnN^2},$$

$$C_1 = U_0 \frac{f(k^2 + n^2)}{\nu A \alpha - f(k^2 + n^2)},$$

$$B_2 = \frac{\alpha k N^2 + \alpha m N^2 B_1 - \beta m N^2 C_1}{\nu n g(\alpha^2 + \beta^2)},$$

$$C_2 = \frac{\beta k N^2 + \beta m N^2 B_1 + \alpha m N^2 C_1}{\nu n g(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

以上两种类恰好是文献[1]中没有垂直切变的情况,形式上比[1]更为简便.

3. 中心点邻近

此种情况的特征方程有两个纯虚根,设其特解为:

$$U = U_0 \cos \lambda \eta. \quad (20)$$

(20)式代入(15)式,可解得

$$\begin{cases} V = \frac{U_0 kmnAN^2}{vA\lambda^2 - mnN^2} \cos i\eta - U_0 \sin i\eta, \\ \pi = \frac{U_0 \lambda mN^2}{vng\lambda^2} \cos i\eta + \frac{kN^2 + U_0 km^2 nAN^4}{vng\lambda(vA\lambda^2 - mnN^2)} \sin i\eta. \end{cases} \quad (21)$$

若在中心点邻近,部分地考虑 $\frac{d\bar{u}}{dy}$ (水平切变的作用,而文献[1]是取 $\frac{d\bar{u}}{dy} = 0$),则(8)式变为

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\xi} = \frac{km(f^2 - N^2)U + [(m^2 + n^2)(f - \frac{d\bar{u}}{dy})f + k^2 N^2]V}{fA(-v + k\bar{u} + kU + mV)}, \\ \frac{dV}{d\xi} = \frac{-[f^2(k^2 + n^2) + m^2 N^2]U - km[(f - \frac{d\bar{u}}{dy})f - N^2]V}{fA(-v + k\bar{u} + kU + mV)}. \end{cases} \quad (22)$$

其相路方程为:

$$\frac{dV}{dU} = \frac{-[f^2(k^2 + n^2) + m^2 N^2]U - km[(f - \frac{d\bar{u}}{dy})f - N^2]V}{km(f^2 - N^2)U + [(m^2 + n^2)(f - \frac{d\bar{u}}{dy})f + k^2 N^2]V}. \quad (23)$$

经线性变换后可化为标准二次型,有

$$\tilde{A}U^2 + 2\tilde{A}UV + \tilde{B}V^2 = c_1 \quad (24)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= f^2(k^2 + n^2) + m^2 N^2, \\ \tilde{A} &= km(f^2 - N^2), \\ \tilde{B} &= (m^2 + n^2)(f - \frac{d\bar{u}}{dy})f + k^2 N^2. \end{aligned}$$

而 $c_1 = \text{const.}$,其判别式为

$$\begin{aligned} \tilde{A}^2 - \tilde{A}\tilde{B} &= [km(N^2 - f^2)]^2 - [f^2(k^2 + n^2) + m^2 N^2][(m^2 + n^2)(f - \frac{d\bar{u}}{dy})f + k^2 N^2] = \\ &= -S^2 + C^2 \frac{d\bar{u}}{dy}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中,

$$\begin{cases} S^2 = f^2(k^2 + m^2 + n^2)[(k^2 + m^2)N^2 + n^2 f^2] > 0, \\ C^2 = f(m^2 + n^2)[(k^2 + n^2)f^2 + m^2 N^2] > 0. \end{cases} \quad (26)$$

由(25)式:若 $\frac{d\bar{u}}{dy} \leq 0$,则 $\tilde{A}^2 - \tilde{A}\tilde{B} < 0$,即在急流轴及其左侧邻近,其相路方程为椭圆族;若

$\frac{d\bar{u}}{dy} > 0$, 即急流的右侧, 则必须 $\frac{S^2}{c^2} > \frac{d\bar{u}}{dy}$, 其相路方程才是椭圆的, 否则为双曲型的 (图 1,

图 2). 其相路方程为双曲型时, 相应的扰动质点, 将远离扰动地区.

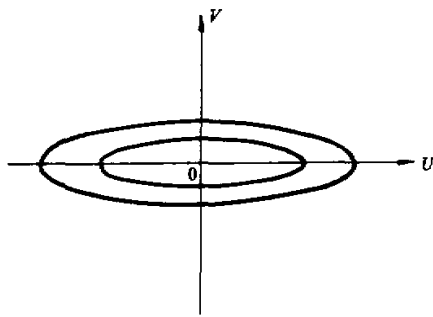


图 1 椭圆型相路.

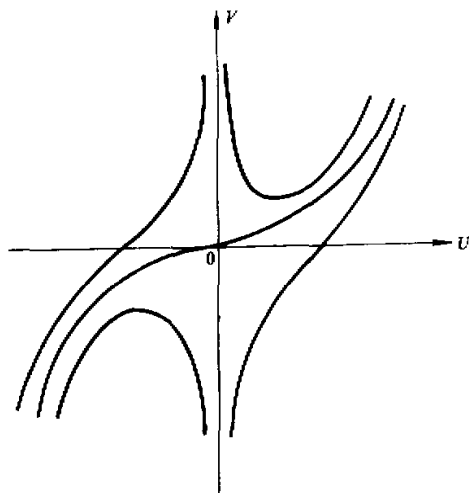


图 2 双曲型相路

若只考虑 x 方向的扰动, 则由(26)式, 有

$$S^2 = f^2 k^4 N^2, \quad C = 0,$$

或

$$\frac{S^2}{C^2} \rightarrow \infty, \quad (27)$$

即扰动仅沿 x 方向传播时, 其相路方程是椭圆的, 相应的扰动质点不会远离扰动地区.

若扰动仅考虑为 y 方向, 则

$$S^2 = f^2 m^4 N^2, \quad C^2 = f m^4 N^4,$$

或

$$\frac{S^2}{C^2} = \frac{f}{N^2}, \quad (28)$$

若 $\frac{d\bar{u}}{dy} > \frac{f}{N^2}$ 时, 即相应于风速切变及 N^2 较大时, 其相路方程是双曲型的. 换言之, 在急流

的右侧, 切变越大则易导致相路方程不是椭圆的, 其扰动质点会远离扰动地区. 由此也说明了急流的左侧易导致不稳定的发生和维持. 显然, 对上行波而言, 急流的右侧也相应于下行波的左侧, 总而言之, 背急流的方向, 不稳定发生于急流的左侧.

若仅考虑为 z 方向, 则由(26)式, 有

$$S^2 = f^4 n^4, \quad C = f^3 n^4,$$

或

$$\frac{S^2}{C^2} = f. \quad (29)$$

于是, 若 $\frac{du}{dy} > f$ 时, 扰动沿垂直 z 方向的相路方程也是双曲型的, 其扰动质点也会远离扰动地区, 能否以此作为对切变线在水平方向上尽管很长, 但厚度不大^[4]的原因一种理论上的解释, 我们提出来, 供讨论参考。

总之, 考虑水平切变作用的二维波的稳定性与无切变作用的稳定性有较大的不同, 尤其是急流左侧的不稳定是无条件的, 右侧是有条件的。

其次, 通过相应的相路方程类型的分析, 得出切变线的存在导致不稳定维持时也是有条件的: 沿 x 方向极利于其维持, 且是无条件的, 而沿 y, z 方向则是有条件的, 尤其是右侧在一定条件下, 可转化为双曲型而导致质点远离, 不利于不稳定的维持。

总之, 本文所讨论的稳定性判别情况不仅与质点的相路方程的类型分析是一致的, 及扩展了[1]的结果, 而且与实践是吻合的。

参 考 文 献

- [1] 吴勇、欧阳首承, 关于风场水平及垂直切变流体非线性波的稳定性, 气象学报(待刊).
- [2] Farrell, B.F., 1982, Pulse asymptotics of the charney baroclinic instability problem, *J. Atmos Sci.*, **39**, 507—517.
- [3] Yoden, S. and H. Mukougawa, 1983, Instabilities of a baroclinic zonal flow in the presence of surface topography, *J. Meteor. Soc. Japan*, **61**, 789—804.
- [4] 乔全明、蒋振强, 1987, 1979年5—8月高空切变线分析, 青藏高原气象科学实验文集(三), 科学出版社, 161—170.

STABILITY OF TWO-DIMENSIONAL INTERFACIAL FLOW AND ELLIPTIC CONDITION OF PHASE ORBIT EQUATION

Ouyang Shoucheng and Zhu Keyun

(Dept. of Meteorology, Chengdu college of Meteorology, Sichuan, China)

Abstract

In this paper, we expanded and deepened the previous work of Mr. Ouyang et al. by further studying the stabilities of the up or down ($\gamma > 0$ or $\gamma < 0$) propagations of the travelling waves respectively. The results indicate that the instabilities easily occur on the right side of the jet, that the different stabilities exist on two sides of discontinuous interface, and that the phase orbit equation has different conditions along the axis of jet in its left side area the equation meets the condition of elliptic type; and on the right side of jet or the equation meets the hyperbolic condition. It reveals the reason of instabilities being kept for a long time while disturbances propagating along W-E direction, and this coincides will with the synoptic experiences.

Key words: Elliptic or Hyperbolic phase orbit equation; Travelling wave; Jet; Shear; Stability.