

热带平流层低层的对称运动和反对称运动

杨云峰

(国家气象中心数值室)

提 要

文章从对赤道 β 平面上静止大气中线性方程分解着手,得出控制对称运动和反对称运动方程组,对方程求解,从理论上证实热带平流层低层中存在两种特殊性质的运动即对称运动和反对称运动,并证实赤道 Kelvin 波是典型的对称运动,而混合罗斯贝-重力波是反对称运动。文章分析了非绝热加热对对称运动和反对称运动的影响,当非绝热加热为唯一的外源扰动时,对称的非绝热加热是产生 Kelvin 波的重要条件,而反对称的非绝热加热是产生赤道区域平流层混合罗斯贝-重力波的重要条件。另外,随着非绝热加热增加,对称运动和反对称运动强度也增加。

关键词: 热带;平流层;对称与反对称运动;非绝热加热。

一. 引 言

大气中的对称运动和反对称运动的原始动力学和热力学方程最先由廖洞贤(1986)提出,对称运动和反对称运动的概念形成已久,但人们没有给予足够的重视,把对称和反对称仅作为一种分析讨论问题的方法,而没有视为两种在实际大气中可能存在的特殊运动,就象一种波动,一个天气系统具有各自的规律和相应的天气现象一样。

廖洞贤、邹晓蕾(1986)^[1]利用正压原始方程模式首先推导了对称运动和反对称运动在非线情况下相互之间的相互作用,以及它们之间的能量转换关系,但在实际大气中是否真实存在对称运动和反对称运动,如果存在的话,它们将具有怎样的特殊规律,还值得我们进一步探讨,本文尝试在这方面做些工作。

二. 基本方程

Holton (1975)^[2]指出,利用线性扰动原始方程组,不仅能定性,而且能定量地描述热带平流层低层的扰动场,因为在该区域中,扰动以尺度行量波为主,这些波波波长较长,移速较慢,相互之间的非线性相互作用较少,因而利用线性扰动方程组讨论热带平流层低层的大气运动特性有一定的可靠性。

假定大气平均状况是静止的,满足静力平衡,采用对数气压作垂直坐标,并对原始方程组作线性处理,可以获得线性化扰动方程组如下:

1988年8月8日收到,1989年7月13日收到再改稿。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (2\Omega \sin \theta) v + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (2\Omega \sin \theta) u + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial t} + w N^2 = \frac{\kappa J}{H}, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w) = 0, \quad (2.4)$$

$$\varphi_z = \frac{RT}{H}, \quad (2.5)$$

这里垂直坐标采用 $z = -H \ln \left(\frac{p}{P_r} \right)$, P_r 为参考层气压, 取为常数; $H = \frac{RT}{g}$ 为大气特征高度; $\bar{T}$, $\bar{\rho}$ 为静止大气平均温度和密度; u, v, w, φ 分别为纬向风、经向风, 垂直速度和位势高度; J 为非绝热加热率; $\kappa = \frac{R}{c_p}$; N^2 为静力稳定度

$$N^2 = \frac{R}{H} \left(\frac{d\bar{T}}{dz} + \frac{\kappa \bar{T}}{H} \right). \quad (2.6)$$

由于我们讨论的区域是热带平流层低层, 故可采用赤道 β 平面近似, 此时方程 (2.1)–(2.5) 成为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \theta v + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.1)'$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega \theta u + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad (2.2)'$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial t} + w N^2 = \frac{\chi J}{H}, \quad (2.3)'$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w) = 0, \quad (2.4)'$$

$$\varphi_z = \frac{RT}{H}. \quad (2.5)'$$

根据文献 [1], 任意一气象要素场 B 可以分解为两部分, 即对称部分和反对称部分

$$B(\lambda, \theta, z, t) = B_s(\lambda, \theta, z, t) + B_A(\lambda, \theta, z, t), \quad (2.7)$$

其中

$$B_s(\lambda, \theta, z, t) = B_s(\lambda, -\theta, z, t), \quad (2.8)$$

$$B_A(\lambda, \theta, z, t) = -B_A(\lambda, -\theta, z, t), \quad (2.9)$$

这里

$$B_s(\lambda, \theta, z, t) = \frac{1}{2} [B(\lambda, \theta, z, t) + B(\lambda, -\theta, z, t)], \quad (2.10)$$

$$B_A(\lambda, \theta, z, t) = \frac{1}{2} [B(\lambda, \theta, z, t) - B(\lambda, -\theta, z, t)]. \quad (2.11)$$

对于向量风场可定义为,

$$\vec{V}_s = u_s \vec{i} + v_s \vec{j}, \quad \vec{V}_A = u_A \vec{i} + v_A \vec{j}. \quad (2.12)$$

因为若从流函数的对称性和反对称性, 我们可以推导出流函数反对称时, 速度场为 $\vec{V}_s$, 而流函数对称时速度场为 $\vec{V}_A$.

将方程 (2.1)′—(2.5)′ 中所有变量进行对称和反对称分解, 然后利用变量的奇偶性, 我们可以获得控制热带平流层大气中对称运动和反对称运动方程组.

对称运动方程组:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - 2\Omega\theta v_s + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + 2\Omega\theta u_s + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \varphi_{sz}}{\partial t} + w_s N^2 = \frac{\kappa J_s}{H}, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u_s}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_s}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w_s) = 0, \quad (2.16)$$

$$\varphi_{sz} = \frac{RT_s}{H}. \quad (2.17)$$

反对称运动方程组:

$$\frac{\partial u_A}{\partial t} - 2\Omega\theta v_A + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_A}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial v_A}{\partial t} + 2\Omega\theta u_A + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_A}{\partial \theta} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \varphi_{Az}}{\partial t} + w_A N^2 = \frac{\kappa J_A}{H}, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u_A}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_A}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w_A) = 0, \quad (2.21)$$

$$\varphi_{Az} = \frac{RT_A}{H}. \quad (2.22)$$

这里我们定义对称运动的速度为 $\vec{V}_s$, 相应的位势高度场为 φ_s ; 反对称运动速度场为 $\vec{V}_A$, 相应的位势高度场为 φ_A .

在方程 (2.13)—(2.17) 和方程 (2.18)—(2.22) 中, 如果视非绝热加热为强迫项, 加热场特性事先给定, 则可看出, 此时两套方程组各自构成线性闭合方程组, 可以独立求解. 这说明, 在线性扰动情况下, 存在对称系统和反对称系统, 在满足我们给定的条件下, 它们之间相互作用较小, 易于分辨, 正是由于这一特性, 使我们可以对对称运动和反对称运动分开讨论, 了解它们各自的运动特性及其产生机制.

三. 对 称 运 动

将方程 (2.13)—(2.17) 中所有下标都用 “0” 代替, 并从 (2.15) 和 (2.16) 中消去 w_s , 有

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - 2\Omega\theta v_0 + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \lambda} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + 2\Omega\theta u_0 + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right) \right] - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa}{H} \frac{\bar{\rho} J_0}{N^2} \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{RT_0}{H}. \quad (3.4)$$

按 Dickinson (1969) 的方法, 此时可设方程具有如下形式的解

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \\ J_0 \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{n0}(\theta) G_n(z) \\ v_{n0}(\theta) G_n(z) \\ 2\Omega a Y_{n0} G_n(z) \\ 4\Omega^2 a Y_{n0}(\theta) J_n(z) \end{Bmatrix} \exp [i(S_n \lambda - 2\Omega \sigma_n t)] \quad (3.5)$$

在(3.5)中已经把各种量进行了量纲统一化, $G_n(z)$ 、 $J_n(z)$ 、 S 、 σ 为无量纲量; u_{n0} 、 v_{n0} 、 Y_{n0} 都具有速度的量纲. 为方便起见, 仅对单个波 n 求解, 故在下面的讨论中将略去下标 n . 将(3.5)代入方程(3.1)–(3.3)中, 有

$$-i\sigma u_0 - \theta v_0 + iSY_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$-i\sigma v_0 + \theta u_0 + \frac{dY_0}{d\theta} = 0, \quad (3.7)$$

$$-i\sigma \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho} G_z}{N^2} \right) \right] Y_0 - \frac{1}{(2\Omega a)^2} \left[iSu_0 + \frac{dY_0}{d\theta} \right] G = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa}{H} \frac{\bar{\rho} J_0}{N^2} \right) Y_0, \quad (3.8)$$

对方程(3.8)进行整理有

$$\frac{-i\sigma \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho} G_z}{N^2} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa \bar{\rho}}{HN^2} J_0 \right)}{G} = \frac{\frac{1}{(2-a)^2} \left(iSu_0 + \frac{dY_0}{d\theta} \right)}{Y_0}. \quad (3.9)$$

因方程(3.9)中左边为 z 的函数, 右边为 θ 的函数, 故要使等式成立, 须

$$iSu_0 + \frac{dY_0}{d\theta} - i\sigma \varepsilon_0 Y_0 = 0, \quad (3.10)$$

$$-i\sigma \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho} G_z}{N^2} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa \bar{\rho}}{HN^2} J_0 \right) = -\frac{i\sigma}{gh_0} G. \quad (3.11)$$

这里 $\varepsilon_0 = \frac{(2\Omega a)^2}{g h_0}$, h_0 为对称运动垂直有效深度. 将方程(3.6)、(3.7)和(3.10)结

合构成求解对称运动的水平结构方程组, 方程(3.11)构成求解对称运动的垂直结构方程组. 对于具有对称非绝热加热强迫作用的对称运动, 其垂直结构参数必由水平结构方程给出, 为此我们将先讨论水平结构方程求解问题.

1. 解析解

从方程(3.6)、(3.7)以及方程(3.10)中消除 u_0 和 Y_0 有

$$\frac{d^2 v_0}{d\theta^2} + \left[\varepsilon_0 (\sigma^2 - \theta^2) - \frac{S}{\sigma} - S^2 \right] v_0 = 0, \quad (3.12)$$

将方程标准化, 令 $\xi = \varepsilon_0^{1/4} \theta$ 代入上式, 有

$$\frac{d^2 v_0}{d\xi^2} + \left[\varepsilon_0^{-1/2} \left(\varepsilon_0 \sigma^2 - \frac{S}{\sigma} - S^2 \right) - \xi^2 \right] v_0 = 0, \quad (3.13)$$

方程(3.13)为 Weber 方程. 采用下面边条件

$$|\xi| \rightarrow 0, \quad |v_0| \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Weber 方程(3.13)以及边条件(3.14)构成特征值求解问题, 当

$$\varepsilon_0^{-1/2} \left(\varepsilon_0 \sigma^2 - \frac{S}{\sigma} - S^2 \right) = 2n + 1, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.15)$$

成立时, 方程的特征解为

$$v_0(\xi) = v_{0n} \varepsilon_0^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.16)$$

这里 $H_n(\xi)$ 为 n 阶的 Hermite 多项式. 利用递推公式

$$\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} = 2n H_{n-1}(\xi), \quad (3.17)$$

$$H_{n+1}'(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi), \quad (3.18)$$

将方程(3.16)代入(3.6), (3.7)和(3.10), 求得 u_0 , Y_0 如下:

$$u_0(\xi) = i \frac{v_{0n} \varepsilon_0^{1/4}}{\sigma} \left[\frac{n H_{n-1}(\xi)}{\varepsilon_0^{1/2} + S/\sigma} + \frac{H_{n+1}(\xi)/2}{(\varepsilon_0^{1/2} - S/\sigma)} \right] e^{-\xi^2/2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.19)$$

$$Y_0(\xi) = -i \frac{v_{0n} \varepsilon_0^{-1/4}}{\sigma} \left[\frac{n H_{n-1}(\xi)}{\varepsilon_0^{1/2} + S/\sigma} - \frac{H_{n+1}(\xi)/2}{(\varepsilon_0^{1/2} - S/\sigma)} \right] e^{-\xi^2/2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.20)$$

解(3.16), (3.19), (3.20)没有构成原方程组的全部解. 从方程(3.12)中我们可以看出 $v_0 \equiv 0$ 满足方程, 将此解代入(3.6), (3.7)和(3.10)中, 有

$$-i\sigma u_0 + iS Y_0 = 0, \quad (3.21)$$

$$\theta u_0 + \frac{dY_0}{d\theta} = 0, \quad (3.22)$$

$$iS u_0 - i\sigma \varepsilon_0 Y_0 = 0. \quad (3.23)$$

由上面方程组可得

$$\varepsilon_0 = \frac{S^2}{\sigma^2}, \quad (3.24)$$

$$Y_0 = \bar{Y}_0 e^{-\xi^2/2} = \bar{Y}_0 e^{-\frac{S}{\sigma} \theta^2/2}, \quad (3.25)$$

$$u_0 = \frac{S}{\sigma} \bar{Y}_0 e^{-\frac{S}{\sigma} \theta^2/2}, \quad (3.26)$$

这里 $\bar{Y}_0$ 为常数, 方程(3.24)~(3.26)和 $v_0 \equiv 0$ 构成与 Matsuno (1966)^[3] 所讨论的浅水波方程中 Kelvin 波的水平结构完全相同的解.

上面的分析从理论上说明了对称运动具有波动特性, 并揭示出 Kelvin 波是一种典型的对称运动.

2. 非绝热加热作用

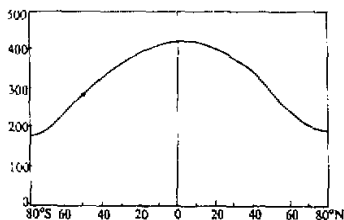


图1 年平均纬向平均太阳入射辐射

单位: $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

图1是Campell和Vonder Haar(1980)^[12]计算出的纬向平均太阳入射随纬度的变化. 不难看出这种分布具有类似 $\bar{Y}_0 \cos \theta$ 的形式, 其中 $\bar{Y}_0$ 是常数. 因而, 在热带范围内近似有 $Y_0 = \bar{Y}_0$. 将这种类型的对称非绝热加热代入方程(3.6), (3.7), (3.10)中, 有

$$-i\sigma u_0 - \theta v_0 + i\sigma \bar{Y}_0 = 0, \quad (3.27)$$

$$-i\sigma v_0 + \theta u_0 = 0, \quad (3.28)$$

$$iS u_0 + \frac{dv_0}{d\theta} - i\sigma \varepsilon_0 \bar{Y}_0 = 0. \quad (3.29)$$

求解方程(3.27), (3.28)有

$$u_0 = \frac{S\sigma}{\sigma^2 - \theta^2} \bar{Y}_0, \quad (3.30)$$

$$v_0 = -i \frac{S\theta}{\sigma^2 - \theta^2} \bar{Y}_0. \quad (3.31)$$

代入(3.29)中有

$$\varepsilon_0 = \frac{S^2}{\sigma^2 - \theta^2} - \frac{S}{\sigma} \frac{(\sigma^2 + \theta^2)}{(\sigma^2 - \theta^2)^2}, \quad (3.32)$$

ε_0 不应是 θ 的函数, 要满足这一点必须近似有 $\sigma^2 \gg \theta^2$, 相应地

$$\varepsilon_0 \approx \frac{S^2}{\sigma^2} - \frac{S}{\sigma^3}, \quad (3.33)$$

$$u_0 = \frac{S}{\sigma} \bar{Y}_0, \quad (3.34)$$

$$v_0 = -i \frac{S\theta}{\sigma^2} \bar{Y}_0. \quad (3.35)$$

从上面解中, 可以看到, 对称运动随对称非绝热加热强度 $\bar{Y}_0$ 的增加而增加. 若 $\bar{Y}_0 = 0$, 即无对称非绝热加热时, 有 $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$, 此时不产生任何形式的对称扰动, 因而也不会产生 Kelvin 波, 对 Kelvin 波的产生机制, 目前还没有确定性的结论, 但不论是理论分析还是数值模拟, 大量工作表明, 对称的非绝热加热可以激发 Kelvin 波的产生.

3. 垂直结构方程

对方程(3.11)进行整理有

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} \left(\frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{dG}{dz} \right) + \frac{1}{gh_0} G = \frac{1}{\bar{\rho}\sigma} \frac{d}{dz} \left(\frac{\kappa \bar{\rho}}{HN^2} J \right). \quad (3.36)$$

令 $\hat{G}(z) = G(z) \bar{\rho}^{1/2} N^{-1}$, 代入(3.36)中有

$$\frac{d^2 \hat{G}}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{gh_0} - \frac{N^*}{gh_0} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\bar{\rho}^{1/2}}{N} \right) \right] \hat{G} = \frac{iN}{\bar{\rho}\sigma} \frac{d}{dz} \left(\frac{\kappa \bar{\rho}}{HN^2} J \right). \quad (3.37)$$

从上式可以看出, 垂直结构方程 (3.37) 的解的特性很大程度上决定于边条件和非绝热加热率. 图 2 是 (Andrew 和 James, 1974)^[5] 利用卫星观测获得的赤道区域臭氧吸收短波辐射所产生的加热率. 取平流层顶为上边界, 则可以用下面形式的非绝热加热来近似描述实际大气中平流层低层中的加热率

$$J = \bar{J} e^{z/H}, \quad (3.38)$$

这里 $\bar{J}$ 为常数, 将 (3.38) 代入 (3.37) 中, 利用 $\bar{\rho} = e^{-z/H}$ 有

$$\frac{d^2 \hat{G}}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{gh_0} - \frac{N}{\rho^{-1/2}} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\bar{\rho}^{1/2}}{N} \right) \right] \hat{G} = 0. \quad (3.39)$$

获得上面方程采用了 N^2 不是 z 的函数的假定. 实际计

算时, N^2 在热带平流层随高度的变化很小, 选取参考层气压为对数层顶, 此时上面的假定相当于基本状况为等温大气 $N^2 = \frac{\kappa g}{H}$, 并代入方程 (3.39) 有

$$\frac{d^2 \hat{G}}{dz^2} + \left[\frac{\kappa}{h_0 H} - \frac{1}{4H^2} \right] \hat{G} = 0, \quad (3.40)$$

采用如下的边条件

$z=0$, 即 $p=p_r$ 时, $\hat{G}$ 为常数, 而在平流层顶则采用辐射边界条件, 保证能量向外频散. 在上述边条件下, 方程 (3.40) 的解为

$$\hat{G}(z) = A e^{i\lambda z} + B e^{-i\lambda z}, \quad (3.41)$$

这里 $\lambda^2 = \frac{\kappa}{h_0 H} - \frac{1}{4H^2}$. 显然当 $\lambda > 0$ 时, 解为波动解. 此时, 波可以沿垂直方向传播. 当 $\lambda^2 < 0$, 波不能在垂直方向传播. 由 λ^2 的定义可以看出, λ^2 的正负由 h_0 的大小唯一确定. 在可以垂直传播的范围内, 垂直波长为 $L_z = \frac{2\pi}{\lambda}$, 因而 L_z 是由 h_0 唯一确定的函数, 随着 h_0 的增加, 在可以垂直传播的范围内, L_z 增加.

对于 Kelvin 波, $\varepsilon_0 = \frac{S^2}{\sigma^2}$, 故有

$$h_0 = \frac{\sigma^2 (2\Omega a)^2}{s^2 g}. \quad (3.42)$$

实际观测的 Kelvin 波波数为 1—2 波, 周期为 15 天. 取 $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $a = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$, 有 $h_0 = 3.8 \text{ km}$. 对于 $T = 256 \text{ K}$ 的等温大气, $H = 7.5 \text{ km}$ 相应的有 $4\kappa H = 8.57 \text{ km}$, (这里 $\kappa = R/c_p$), 代入 λ^2 的定义式有, $\lambda^2 > 0$, 故 Kelvin 波是可以垂直传播的波. 事实上, Kelvin 波在赤道区域对子能量的垂直输送具有重要作用.

四. 反对称运动

将方程 (2.18)—(2.22) 中所有下标用 “1” 代替, 并从 (2.20) 和 (2.21) 中消去 W_A 有

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - 2\Omega \theta v_1 + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.1)$$

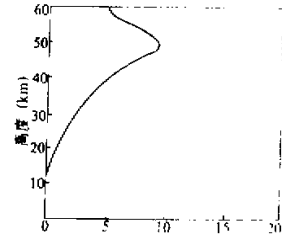


图 2 赤道区域 O_3 吸收太阳辐射产生的加热率
单位: $^{\circ}\text{C}/\text{d}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + 2\Omega\theta u_1 + \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \right] - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa \bar{\rho}}{HN^2} J_1 \right). \quad (4.3)$$

比较(3.1)—(3.3)和(4.1)—(4.3), 不难发现它们具有完全相同的形式, 因此可以利用前面的方法来求解反对称运动方程组. 设方程(4.1)—(4.3)具有(3.5)形式的波动解, 代入方程组进行整理有水平结构方程:

$$-i\sigma u_1 - \theta v_1 + iSY_1 = 0, \quad (4.4)$$

$$-i\sigma v_1 + \theta u_1 + \frac{dY_1}{d\theta} = 0, \quad (4.5)$$

$$iSu_1 + \frac{dv_1}{d\theta} - i\sigma \varepsilon_1 Y_1 = 0. \quad (4.6)$$

垂直结构方程

$$i\sigma \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{dG}{dz} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{\kappa \bar{\rho}}{HN^2} J \right) = -\frac{i\sigma}{gh_1} G, \quad (4.7)$$

这里 $\varepsilon_1 = \frac{(2\Omega q)^2}{gh_1}$, 比较方程(3.11)和(4.7), 可以看出除参数 h_1 不同外, 方程完全相同, 故垂直结构方程的解和前面一节讨论的形式完全一样, 只需将参数 h_0 换成 h_1 即可.

对水平结构方程(4.4)—(4.6)进行整理, 消去 u_1 和 Y_1 并令 $\xi = \varepsilon_1^{1/4} \theta$ 有

$$\frac{d^2 v_1}{d\xi^2} + \left[\varepsilon_1^{-1/2} \left(\varepsilon_1 \sigma^2 - \frac{S}{\sigma} - S^2 \right) - \xi^2 \right] v_1 = 0, \quad (4.8)$$

方程(4.8)不能采用和 v_0 类似的边条件. 根据 Lindzen (1967)^[6] 的分析, 此时可采用下面边条件:

当 $|\xi| < |\xi_c|$ 时, $|v_1|$ 随 $|\xi|$ 的增加而衰减, 这里 $|\xi_c|$ 为某个参考纬度 θ , 所对应的 ξ 值, 在上述条件下, (4.8)构成对 Weber 方程特征解问题. 当

$$\varepsilon_1^{-1/2} \left(\varepsilon_1 \sigma^2 - \frac{S}{\sigma} - S^2 \right) = 2n + 1, \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (4.9)$$

时, 方程(4.8)的解为

$$v_1(\xi) = v_{n1} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (4.10)$$

相应的有

$$u_1(\xi) = i \frac{v_{n1} \varepsilon_1^{1/4}}{\sigma} \left[\frac{nH_{n-1}(\xi)}{\varepsilon_1^{1/2} + S/\sigma} + \frac{H_{n+1}(\xi)/2}{\varepsilon_1^{1/2} - S/\sigma} \right] e^{-\xi^2/2}, \quad n = 0, 2, 4, \dots, \quad (4.11)$$

$$Y_1(\xi) = -i \frac{v_{n1} \varepsilon_1^{-1/4}}{\sigma} \left[\frac{nH_{n-1}(\xi)}{\varepsilon_1^{1/2} + S/\sigma} - \frac{H_{n+1}(\xi)/2}{\varepsilon_1^{1/2} - S/\sigma} \right] e^{-\xi^2/2}, \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (4.12)$$

根据 Matsuno (1966)^[3] 的讨论, 当 $n=0$ 时, 解(4.10)—(4.12)表示混合罗斯贝—重力波.

为了便于了解反对称非绝热加热的作用, 我们考虑一种简单的反对称非绝热加热, $Y_1 = \bar{Y}_1 \theta$, 这里 $\bar{Y}_1$ 为常数. 将这代入(4.4)—(4.6)中, 有

$$-i\sigma u_1 - \theta v_1 + iS\bar{Y}_1\theta = 0, \quad (4.13)$$

$$-i\sigma v_1 + \theta u_1 + \bar{Y}_1 = 0, \quad (4.14)$$

$$iSu_1 + \frac{dv_1}{d\theta} - i\sigma\varepsilon_1\bar{Y}_1\theta = 0. \quad (4.15)$$

求解上面方程组有

$$u_1 = \frac{\bar{Y}_1\theta(S\sigma+1)}{\sigma^2-\theta^2}, \quad (4.16)$$

$$v_1 = -i\bar{Y}_1\left[\frac{\sigma(S\sigma+1)}{\sigma^2-\theta^2} - S\right], \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{S(S\sigma+1)}{\sigma(\sigma^2-\theta^2)} - \frac{2\sigma(S\sigma+1)}{\sigma(\sigma^2-\theta^2)^2}. \quad (4.18)$$

为满足 ε_1 与 θ 无关的性质, 须有 $\sigma^2 \gg \theta^2$, 此时近似有

$$\varepsilon_1 = \frac{S^2}{\sigma^2} - \frac{S}{\sigma^3} - \frac{2}{\sigma^4}, \quad (4.19)$$

$$u_1 = \frac{S\bar{Y}_1}{\sigma}\theta, \quad (4.20)$$

$$v_1 = -\frac{i\bar{Y}_1}{\sigma}. \quad (4.21)$$

很明显, 反对称运动强度随反对称非绝热加热增加而增加, 当 $\bar{Y}_1 \equiv 0$ 时, $u_1 = v_1 = 0$. 这种情形说明在静止大气中, 若没有其他扰动, 反对称非绝加热为零时, 不出现任何形式的反对称运动, 因而也不会出现混合罗斯贝 - 重力波. 这说明反对称非绝热加热是激发混合罗斯贝 - 重力波的重要条件之一.

前面我们详细分析了热带平流层对称运动和反对称运动在水平和垂直方向上的结构特征, 这对我们从一个新的角度来认识该区域的大气运动无疑会带来帮助. 事实上, 有许多气象工作者在这方面做过尝试, 1973年 Wallace 发现利用月平均的 $\bar{u}_S$ 比采用 $\bar{u}$ 能更好地反映出纬向风的准两年周期振荡. 而 Yanai 和 Murakami (1970)^[7] 的工作表明, 对 u_S, v_S 进行谐波分析要比直接对 u, v 进行谐波分析, 更清楚地揭示热带平流层的波动特性.

五. 结 论

文章从静止大气的线性扰动方程出发, 从理论上得出, 在线性模式中, 存在两种特殊的大气运动形式, 即对称运动和反对称运动, 文章分别对控制对称运动和反对称运动的方程组进行了求解, 从理论上揭示了它们各自的水平结构和垂直结构. 从分析中发现, 实际观测到的热带平流层低层的 Kelvin 波是对称运动的一种特殊情形, 而混合罗斯贝 - 重力波则是反对称运动的一个特殊情形.

文章还分析了非绝热加热对对称运动和反对称运动的影响. 发现随着非绝热加热的加强, 对称运动和反对称运动都随之加强, 同时还发现, 与赤道呈对称分布的非绝热加热是激发 Kelvin 波的重要条件之一, 而与赤道呈反对称分布的非绝热加热是激发混

合罗斯贝—重力波的重要因素之一。

文章所有理论分析都是建立在大气基本状态为静止的假定下,因而对于纬向基本气流在大气对称运动和反对称运动中的影响如何还需作进一步研究。

致谢:本文是在廖洞贤先生精心指导下完成的硕士论文的一部分,作者在此对廖洞贤先生表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 廖洞贤、邹晓蕾、1986, 正压过滤模式大气中的对称运动和反对称运动, 气象学报, **44**, 154—162.
- [2] Holton, J. R., 1975, The dynamic and meteorology of the stratosphere and mesosphere, *Meteor. Monographs*, **15**, 45—60.
- [3] Matsuno, T., 1966, Quasi-geostrophic motion in the equatorial area, *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 25—44.
- [4] Campbell, G. G., and T. H. Vonder Haar, 1980, Climatology of radiation budget measurements from satellites, *Atmos. Sci. Paper No. 323*, Dept. Atmos. Sci., Colorado State University, Fort Collins.
- [5] Andrew, A. L. and Jams, E. H., 1974, A parameterization for the absorption of solar radiation in the earth's atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 118—131.
- [6] Lindzen, R. S., 1967, Planetary waves on beta plane, *Mon. Wea. Rev.*, **95**, 441—451.
- [7] Yanai, M. and Murakami, M., 1970, Spectrum analysis of symmetric and antisymmetric equatorial wave, *J. Meteor. Soc. Japan*, **48**, 331—345.

SYMMETRIC AND ANTISYMMETRIC MOTIONS OF STRATOSPHERIC LOWER LEVEL IN EQUATORIAL AREA

Yang Yunfeng

(NWPD National Meteorological Centre)

Abstract

Equations of symmetric motion and antisymmetric one are obtained. Through solving equations analytically, it is proved theoretically that there are two special motions——symmetric motion and antisymmetric one.

The effects of diabatic heating on the symmetric motion and the antisymmetric motion are also discussed. The symmetric diabatic heating is responsible for the Kelvin wave, and the antisymmetric diabatic heating for the mixed Rossby-gravity wave. The amplitudes of symmetric and antisymmetric motions increase with the increasing of diabatic heating intensity.

Key words: Tropical zone; Stratosphere; Symmetric and Antisymmetric motions; Diabatic heating.