第15卷 第4期
1991年 7月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol.15, No.4
July, 1991

中尺度大气运动中孤立重力波特征的研究

许习华
(国家海洋环境预报研究中心)

丁一汇
(国家气象局气象科学研究院)

提　　要

通过对斜压大气(基本风场有垂直切变)运动中重力内波的研究发现：对于小振幅扰动(弱非线性问题)，考虑波动之间的非线性相互作用以后，控制重力内波波包(调制波)的演变方程是非线性Schrödinger方程．然后通过对冷锋爆发冷涌过程的计算表明：冷涌主体前沿的宽度约10km，行进速度约为13 m / s，随着冷涌的增强，其宽度变窄．这些计算结果与实际的观测结果比较一致．

关键词：孤立波；Schrödinger方程；冷涌．

一、引　　言

气象学家们发现很多天气过程都是与重力波联系在一起的，包括暴雨的形成[1]以及台风的不稳定发展[2]等．冬季冷锋爆发时其前沿的冷涌也是典型的例子．当这些天气过程与基本风场的垂直切变配置恰当时，往往能造成突发性天气．

大气中大尺度运动孤立Rossby波特征的研究已经作了很多工作．Long[3]对简单的正压流体运动情况作了开创性研究．后来Rede-kopp[4]又研究了具有水平切变风场中纬向波的孤立波方程．他们的工作奠定了大尺度大气运动的kdv孤立波理论基础．最近又有人指出，大尺度大气中的Rossby波包演变是由非线性Schrödinger方程控制的[5,6]，并以此来解释阻塞高压的形成，得到了较好的结果．其实，大气中强的中尺度过程亦具有孤立波特征．冷锋前沿的冷涌过程、大气中的飑线过程以及中尺度雨团都明显地呈现出孤立行进的孤立波特征．

本文采用多重尺度分析方法对斜压大气中重力内波波包的演变进行分析，试图说明由于基本风场存在垂直切变，冷锋前的冷涌(cold surge)等强中尺度过程实际上是一种孤立行进波，而且它们的演变是服从非线性Schrödinger方程控制的．然后进行一些数值计算，由此得到的孤立波移动速度及其特征可以说明冷涌的移行和尺度特点．

二、基 本 方 程

为了研究具有垂直切变的基本流场中的重力内波波包演变情况，我们采用Boussinesq近似下的二维非线性方程组[7,8]

1987年11月13日收到，1989年11月3日收到再改稿．

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x}, \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z}+\dfrac{g}{\overline{T}_0}T', \\
\dfrac{\partial T'}{\partial t}+w\dfrac{\partial T'}{\partial z}+u\dfrac{\partial T'}{\partial x}+(\gamma_d-\gamma)w=0,
\end{cases} \tag{1}
$$

及

$$
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2}
$$

式中 p' 和 T'分别为相对于纬向平均状态的扰动气压与温度，$\gamma_d=g/c_p$ 为干绝热递减率，γ 为温度场的垂直递减率，u 和 w 分别为 x 与 z 方向上的风速，ρ_0 为静态大气的密度，其余均为常用符号．记 $\Gamma=\gamma_d-\gamma$，$\alpha=g/\overline{T}_0$ ($\overline{T}_0$ 为常数)，设 $u=\overline{u}(z)+u'$，$w=w'$，其中 $\overline{u}$ 为纬向基本风场．同时引入流函数 ψ，则

$$
\psi=\tilde{\overline{\psi}}(z)+\psi', \tag{2$'$}
$$

$\tilde{\overline{\psi}}(z)$ 为纬向基本流函数（纬向平均状态）．显然有

$$
\begin{cases}
\overline{u}(z)=-\dfrac{\partial\tilde{\overline{\psi}}}{\partial z}, \\
u'=-\dfrac{\partial\psi'}{\partial z}, \\
w'=\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}.
\end{cases} \tag{3}
$$

故(1)式可化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\Delta\psi'}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial\Delta\psi'}{\partial x}+J(\psi',\Delta\psi')-\overline{u}''\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}-\alpha\dfrac{\partial T'}{\partial x}=0, \\
\dfrac{\partial T'}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial T'}{\partial x}+J(\psi',T')+\Gamma\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}=0,
\end{cases} \tag{4}
$$

式中 $J(a,b)=\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial z}-\dfrac{\partial b}{\partial x}\dfrac{\partial a}{\partial z}$ 为 Jacobi 算符，$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，$\overline{u}''=\dfrac{d^2\overline{u}}{dz^2}$，$\psi'$ 为对应扰动的流函数，其余符号的意义跟前面一致．巢纪平对类似的方程曾作了在小地形作用下的研究[8]．

我们进一步讨论冬季锋区的活动情况，认为锋区中的垂直运动主要是由基本风场对温度的平流 $\left(\overline{u}\dfrac{\partial T'}{\partial x}\right)$ 项造成，即此运动由线性过程完成，则有

$$
\overline{u}\frac{\partial T'}{\partial x}+\Gamma\frac{\partial\psi'}{\partial x}\approx 0, \tag{5}
$$

故 (4)式可变为

$$\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial x}+J(\psi',\Delta\psi')+\left(\frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}}-\bar{u}''\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 . \quad (4)'$$

三、关于方程的处理

现在我们利用(4)式研究考虑在扰动波动之间的非线性相互作用(由于所讨论的扰动被认为是小振幅的，这种非线性作用实际上是弱非线性问题)时，扰动的演变情况．取 $t\sim 10^4$s (时间特征尺度)，$L\sim 10^5$ m (水平空间特征尺度)，$H\sim 10^4$ m(垂直空间尺度)，引人小参数 ε (ε 为大于零而远小于1的数)，采用多重尺度分析方法[9]，并引入缓变的时间与空间变量 τ，τ_1，ξ，η，且

$$\begin{cases}\tau=\varepsilon t, & \tau_1=\varepsilon^2 t ,\\ \xi=\varepsilon x, & \eta=\varepsilon^2 x .\end{cases} \quad (6)$$

并且认为扰动的波包在x方向及时间上是缓变的，而在 z 方向仍为快变．因而，可以将扰动的流函数写成如下形式：

$$\psi'=\bar{\psi}(\xi,\eta,\tau,\tau_1)\,Z(z)e^{i\theta(x,t)} . \quad (7)$$

而坐标摄动的微分形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\rightarrow\dfrac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial \tau}+\varepsilon^2\dfrac{\partial}{\partial \tau_1} ,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\rightarrow\dfrac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial \xi}+\varepsilon^2\dfrac{\partial}{\partial \eta} ,\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\rightarrow\dfrac{\partial}{\partial z} .\end{cases} \quad (6)'$$

将扰动量 ψ' 按小参数 ε 作幂级数展开，有

$$\psi'=\varepsilon\psi_0+\varepsilon^2\psi_1+\varepsilon^3\psi_2+\cdots . \quad (8)$$

将(8)式代人方程(4)′中可得

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \tau_1}+\bar{u}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.$$

$$\left.+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}+2\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\cdots\right)(\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots)+$$

$$\left(\frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}}-\bar{u}''\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \eta}\right)(\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots)+\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right.\right.$$

$$\left.+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \eta}\right)(\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}+\right.$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta}+\cdots\Big)(\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2\cdots)-\frac{\partial}{\partial z}(\psi_0+\varepsilon\psi_1+$$

$$\varepsilon^2\psi_2+\cdots)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}+2\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta}+\right.$$

$$\left.\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\cdots\right)(\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots)\Big]=0\ . \tag{9}$$

引进算子

$$\mathscr{L}(\quad)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}}-\bar{u}''\right)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\quad\right), \tag{10}$$

故有以下各阶近似等式成立：

$$O(\varepsilon^1):\qquad \mathscr{L}(\psi_0)=0\ , \tag{11}$$

$$O(\varepsilon^2):\qquad \mathscr{L}(\psi_1)=F_1\ , \tag{12}$$

$$O(\varepsilon^3):\qquad \mathscr{L}(\psi_2)=F_2\ , \tag{13}$$

其中

$$F_1=-2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial\xi}-\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0$$

$$+\left(\bar{u}''-\frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0+\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0\,, \tag{14}$$

$$F_2=-\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta}+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\psi_0$$

$$-2\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial\xi}-\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_1$$

$$-2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial\xi}+\left(\bar{u}''-\frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}}\right)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_1-2\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x\partial\xi}\right)-\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0$$

$$+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0+\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_1+\frac{\partial}{\partial\xi}\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial\xi}\right)\right]. \tag{15}$$

设

$$\psi_0=A\ (\tau,\ \tau_1;\ \xi,\ \eta)\ \varphi\ (z)e^{ik\,(x-ct)}+*\ ,\tag{16}$$

式中$k=2\pi/L$，L为波长，大致相当于中尺度系统的水平特征尺度；A 为流场扰动的波包．将(16)式代入(11)式可得

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left(\frac{\alpha\Gamma}{\overline{u}\,(\overline{u}-c)}-\frac{\overline{u}\,''}{\overline{u}-c}-k^2\right)\varphi=0\ \ .\tag{17}$$

再者我们讨论的扰动主要是重力内波过程，故可取扰动的上、下边界固定，也就是取

$$\varphi\,(0)=\widetilde{\varphi}\ (0)=\widetilde{\varphi}\ (H)=\varphi\ (H)=0\ ,\tag{18}$$

其中$\widetilde{\varphi}$表示φ的共轭复数，另外，(16)式中的 * 表示前项的共轭．(18)式与(17)式便构成了φ的本征值问题. 在(18)式中已经认为扰动是深厚的，亦即认为垂直横向环流具有与对流层同等的深厚．这对于大多数中尺度强对流天气系统是成立的，尤其是冬季的冷锋过程，且与冷涌有关的冷空气爆发一般都是整个对流层中的现象．

四、非线性Schrödinger方程

量子力学中的几率波方程—— Schrödinger 方程在深水流体力学中已有广泛的应用．Zakharov [10] 发现：弱非线性深水波列的时间演变服从非线性 Schrödinger 方程．Yuen 和 Lake[11] 从实验和理论上证明了深水波包孤立子的存在. 下面，我们采用文献[12]中的方法来研究中尺度系统中重力内波的波包方程，该方法的具体细节可参见文献[12]．我们知道，欲使多重尺度方法处理的方程有收敛解，则必须消去久期项. 将(16)式代入(14)和(15)式中，消除久期项得到

$$2k^2(\overline{u}-c)\varphi\frac{\partial A}{\partial\xi}+\left(k^2\varphi-\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)A+\left(\overline{u}\,''-\frac{\alpha\Gamma}{\overline{u}}\right)\frac{\partial A}{\partial\xi}=0\ ,\tag{19}$$

以及

$$F_1=ikg\ (\varphi)A^2\,e^{2ik\,(x-ct)}\ \ ,\tag{20}$$

其中

$$g\,(\varphi)=\frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi\right)-\varphi\frac{d}{dz}\left(-k^2\varphi+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).\tag{21}$$

由 F_1 的表达式，因此可设ψ_1 具有以下形式的特解：

$$\psi_1=A_1\,(\tau,\ \tau_1;\ \xi,\ \eta\,)\varphi_1\ (z)\,e^{2ik(x-ct)}+*\ ,\tag{22}$$

所以，将(22)式及(16)式代入(15)式中消去久期项可得

$$A_1\left[2\,(\overline{u}-c)\left(\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}-4k^2\varphi_1\right)-2\left(\overline{u}\,''-\frac{\alpha\Gamma}{\overline{u}}\right)\varphi_1\right]=g\,(\varphi)A^2\ ,\tag{23}$$

式中 A_1 和A 均为缓变量的函数，因此可取

$$A_1=\delta A^2\ \ ,\tag{24}$$

δ为比例系数，从(23)式且可得

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}+\left(\frac{\alpha\Gamma}{\overline{u}(\overline{u}-c)}-\frac{\overline{u}''}{\overline{u}-c}-4k^2\right)\varphi_1=\frac{g(\varphi)}{2\delta}\ . \tag{25}$$

将(24)式代入(22)式中便有

$$\psi_1=A^2(\tau,\tau_1;\xi,\eta)\varphi_{11}(z)e^{2ik(x-ct)}+\widetilde{A}^2(\tau,\tau_1;\xi,\eta)\cdot\widetilde{\varphi}_{11}(z)e^{-2ik(x-ct)}. \tag{26}$$

根据(26)与(22)式可以看到：$\varphi_{11}=\delta\varphi_1$，所以$\varphi_{11}$可以反映出$A_1$与$A^2$的相对大小．也必须注意，以后求出$\varphi_1$的特征值后，要乘上一个$\delta$方为$\varphi_{11}$．式中$\widetilde{A}$、$\widetilde{\varphi}_{11}$分别为$A$，$\varphi_{11}$的共轭形式．以上所求得的(26)式与Maslow[13]在讨论自由切变层中粘性流的弱非线性问题时所作的假设形式是一致的．

将(16)式和(26)式代入(13)式中，再消去久期项便可得到一个非常有意义的等式：

$$\begin{aligned}&ik\left\{-\frac{d\widetilde{\varphi}}{dz}\left(\frac{d^2\varphi_{11}}{dz^2}-4k^2\varphi_{11}\right)-\frac{d}{dz}\left[\widetilde{\varphi}\left(\frac{d^2\varphi_{11}}{dz^2}-4k^2\varphi_{11}\right)\right]\right.\\&\left.+\varphi_{11}\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\widetilde{\varphi}}{dz^2}-k^2\widetilde{\varphi}\right)+\frac{d}{dz}\left[\varphi_{11}\left(\frac{d^2\widetilde{\varphi}}{dz^2}-k^2\widetilde{\varphi}\right)\right]\right\}|A|^2A+ik(3\overline{u}-c)\\&\cdot\varphi\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+\left[-2k^2(\overline{u}-c)\varphi+\overline{u}\left(-k^2\varphi+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+\left(\frac{\alpha\Gamma}{\overline{u}}-\overline{u}''\right)\varphi\right]\frac{\partial A}{\partial\eta}\\&+2ik\varphi\frac{\partial^2A}{\partial\tau\partial\xi}+\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}-k^2\varphi\right)\frac{\partial A}{\partial\tau_1}=0\ .\end{aligned} \tag{27}$$

(27)式即为因基本风场存在垂直切变时扰动波动之间的弱非线性相互作用导致的波包(扰动)非线性演变方程．为使(27)式的物理意义更为明确，在方程两边同乘以$d\varphi/dz$后再在$[0,H]$上积分，并注意到(18)式，则有

$$i\omega|A|^2A+m\frac{\partial A}{\partial\eta}+ikr\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+Pc\frac{\partial A}{\partial\tau_1}=0\ . \tag{28}$$

(28)式即为非线性Schrödinger方程．式中已设：

$$\begin{aligned}\omega=k\int_0^H&\left\{-\left|\frac{d\varphi}{dz}\right|^2\left(\frac{d\varphi_{11}}{dz^2}-4k^2\varphi_{11}\right)-\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d}{dz}\left[\widetilde{\varphi}\left(\frac{d^2\varphi_{11}}{dz^2}-4k^2\varphi_{11}\right)\right]\right.\\&\left.+\varphi_{11}\frac{d\varphi}{dz}\frac{d}{dz}\left(-k^2\widetilde{\varphi}+\frac{d^2\widetilde{\varphi}}{dz^2}\right)+\frac{d\varphi}{dz}\left[\varphi_{11}\left(-k^2\widetilde{\varphi}+\frac{d^2\widetilde{\varphi}}{dz}\right)\right]\right\}dz,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}m&=\int_0^H\frac{d\varphi}{dz}\left[-2k^2(\overline{u}-c)\varphi-\beta\overline{u}\varphi-\overline{u}''\varphi+\frac{\alpha\Gamma}{\overline{u}}\varphi\right]dz\\&=\frac{1}{2}\int_0^H\varphi^2\frac{d\eta_c}{dz}dz\ ,\end{aligned} \tag{30}$$

其中

$$\eta_c = 2k^2(\bar{u}-c) + \beta\bar{u} + \left(\bar{u}'' - \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}}\right) \quad , \tag{31}$$

$$\beta = \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}(\bar{u}-c)} - \frac{\bar{u}''}{\bar{u}-c} \quad . \tag{32}$$

同样有

$$r = \int_0^H \varphi\,(3\bar{u}-c)\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{3}{2}\int_0^H \varphi^2 \frac{d\bar{u}}{dz}\,dz \quad , \tag{33}$$

$$Pc = \frac{1}{2}\int_0^H \varphi^2 \frac{d\beta}{dz}\,dz \quad . \tag{34}$$

注意，在求得上述各系数时，已经假定 c 与 z 无关．若令

$$c_g = m / Pc \, , \quad \alpha_1 = kr / Pc \, , \quad \alpha_2 = \omega / Pc \quad , \tag{35}$$

又将 $\tau_1 = \varepsilon^2 t$，$\zeta = \varepsilon x$，$\eta = \varepsilon^2 x$ 代回(28)式中，并且同时取变换

$$\begin{cases} X_1 = x - c_g t \quad , \\ \mu = t \, , \end{cases} \tag{36}$$

则(28)式变为

$$i\frac{\partial A}{\partial \mu} - \alpha_1 \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - \varepsilon^2 \alpha_2 |A|^2 A = 0 \quad . \tag{37}$$

(37)式为标准形式的 Schrödinger 方程．取 $X_1 \to \infty$ 时，$A \to 0$；$x = t = 0$ 时，$A = A_0$（εA_0 代表了扰动的初始强度）．则得到[12, 14]

$$A = A_0 \ \mathrm{sech}\left[\varepsilon A_0 \left(\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} (x - c_g t)\right] e^{-i\nu_0 t} \, , \tag{38}$$

且

$$\nu_0 = 2\varepsilon^2 \alpha_2 A_0 \quad . \tag{39}$$

故扰动的流函数近似地为

$$\psi' \approx \varepsilon\psi_0 = \varepsilon A_0 \ \mathrm{sech}\left[\varepsilon A_0 \left(\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} (x - c_g t)\right] e^{ik[x-(c+\frac{\nu_0}{k})t]} + * \quad . \tag{40}$$

因此，在扰动过程中，由于考虑了波动之间的弱非线性相互作用($\nu_0 \neq 0$)，被调制波的相速也发生了改变：

$$c_A = c + \frac{\nu_0}{k} = c + 2\varepsilon^2 \frac{\alpha_2}{k} A_0^2 \, . \tag{41}$$

从(41)式可见，相速改变的部分与扰动的初始强度的平方成正比，由此足见调制波对被调制波的影响．顺便提一下，当 α_1 和 α_2 同号时，(41)式代表孤立行进波；反之，则代表包络洞孤立波(envelop－hole soliton)．

五、本征值问题

一方面为了定性了解孤立波方程的特点及扰动的演变情况，另一方面也为了计算方便，在讨论本征值问题时，认为 $\bar{u}$ 可用一常值 u_0 代替，$\bar{u}''$亦认为是常值．这样在求解φ 及φ_1 时，它们的本征值便成为线性问题，这样不会影响问题的定性讨论．此时 φ 的本征值为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dz^2}+\left[\dfrac{\alpha\Gamma}{(u_0-c)u_0}-k^2-\dfrac{\bar{u}''}{u_0-c}\right]\varphi=0 \\ \varphi(0)=\varphi(H)=0 \quad . \end{cases} \tag{17'}$$

可以看到，欲使(17)′ 式有解存在，则必须

$$\frac{\alpha\Gamma}{u_0(u_0-c)}-k^2-\frac{\bar{u}''}{u_0-c}>0 \ , \tag{42}$$

式中 c 为重力内波波速，即有：

$$\begin{cases} \bar{u}''>\dfrac{\alpha\Gamma}{u_0}-(u_0-c)k^2 \ , & \text{如果 } u_0-c<0 \ ; \\ \bar{u}''<\dfrac{\alpha\Gamma}{u_0}-(u_0-c)k^2 \ , & \text{如果 } u_0-c>0 \ . \end{cases}$$

对于第一种情况，表明：欲使(17)′ 式有解存在，则要求$\bar{u}''$大于某一正的临界值．也就是说，作为必要条件，$\bar{u}$ 的垂直分布应该有一个极小值点．$\bar{u}$ 的这种分布导致在锋区产生两个垂直环流：下层的直接环流与上层的间接环流．这个结论恰好和文献 [1] 中提到的锋区附近的垂直环流相一致．对于第二种情况：$u_0>c$，这只有在强急流(锋区急流)附近才能成立，但是，我们从 (42)式可以看到，欲使(17)′ 式有解，这种情况下仍然要求 $\bar{u}''>0$ ，即$\bar{u}$ 的垂直分布仍然是有极小值点，但曲率要小于某一正值．所以这种情况产生的垂直环流与第一种情况是一致的．

在上述条件下，(17)′式解为

$$\varphi\approx\sin\frac{\pi}{H}z \ , \tag{43}$$

由此得到

$$\frac{\bar{u}''}{c-u_0}-k^2+\frac{\alpha\Gamma}{u_0(u_0-c)}=\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \ . \tag{44}$$

必须指出，我们仅讨论流场垂直方向为半波时的情况．由(44)式可求得重力内波相速 c 值．

将 (43)式代入(25)式中，并注意到(17)式，则得到 φ_1 的本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_1}{dz^2}+N_1^2\varphi_1=\dfrac{1}{2\delta}\dfrac{d\bar{u}}{dz}\sin^2\dfrac{\pi}{H}z\cdot\left[\dfrac{\bar{u}''-\alpha\Gamma/c}{(u_0-c)^2}-\dfrac{\alpha\Gamma}{cu_0^2}\right], \\ \varphi_1(0)=\varphi_1(H)=0 \quad , \end{cases} \tag{25'}$$

式中

$$N_1^2=\beta-4k^2 \quad . \tag{45}$$

在以上的运算中，对于 $\bar{u}$ 作如下处理：如果对 $\bar{u}$ 微分，则 $\bar{u}$ 是 z 的函数，如果不对它求导，则 $\bar{u}=u_0$ 为常数，即作准常数处理．同时认为 $\frac{d^3\bar{u}}{dz}$ 值很小，比起 $\bar{u}''$ 来说可以略去．

为了求解(25)′式，取 $\bar{u}=u_0-u_1\sin\frac{\pi}{H}z$，这种假设形式是根据前面对 $\bar{u}$ 的分析所得到的．u_1 为一常数，它必须满足前面关于 $\bar{u}''$ 曲率大小的要求．这样，近似地将(25)′第一式右边取作

$$-k_m\frac{\pi u_1}{2\delta H}\cos\frac{\pi}{H}z\cdot\sin^2\frac{\pi}{H}z=\frac{\pi u_1 k_m}{8H\delta}\left(\cos\frac{\pi}{H}z-\cos\frac{3\pi}{H}z\right),$$

其中 $k_m=\frac{\bar{u}''-\alpha\Gamma/c}{(u_0-c)^2}-\frac{\alpha\Gamma}{cu_0^2}$，即该项最后一个因子的近似值（取作常数）．必须指出，以上所作假设只是为了计算方便，而不影响问题的本质．由(25)′式得到

$$\varphi_1=\frac{\pi u_1 k_m H^2}{8H\delta(N_1^2H^2-\pi^2)}\cos\frac{\pi}{H}z-\frac{\pi u_1 k_m H^2}{8H\delta(N_1^2H^2-9\pi^2)}+A_a\sin N_1 z$$
$$+B_b\cos N_1 z \quad , \tag{46}$$

其中

$$A_a=\frac{\pi u_1 k_m H^2(N_1^2H^2-5\pi^2)}{4H\delta(N_1^2H^2-\pi^2)(N_1^2H^2-9\pi^2)\sin N_1H}-\frac{\pi^3 u_1 k_m H\cdot\mathrm{ctg}N_1H}{\delta(N_1^2H^2-\pi^2)(N_1^2H^2-9\pi^2)} \quad ,$$

$$B_b=\frac{\pi^3 u_1 k_m H}{\delta(N_1^2H^2-\pi^2)(N_1^2H^2-9\pi^2)} \quad .$$

在冷空气爆发期间，取 $L\sim 10^5\,\mathrm{m}$，$A_0\sim 10^6\,\mathrm{m^2/s}$，$\varepsilon\sim 0.1$，$\varepsilon A_0$ 代表了扰动流函数的初始振幅（大致相当于扰动强度），故得到 $Pc\sim 4\times10^{-8}/\mathrm{m^2}$，$r\sim -2\,\mathrm{m/s}$，$m\sim 3\times10^{-7}\,\mathrm{m/s}$，$c\sim 41\,\mathrm{m/s}$（$\because\ \bar{u}-c\approx\pm31\,\mathrm{m/s}$，为了使讨论有意义，主要讨论冷涌前重力流行进速度，略去了 $c=-21\,\mathrm{m/s}$ 的解）．注意在讨论上述值之前，我们已经根据冷空气爆发过程特点，取 $\alpha\approx3\times10^{-2}\,\mathrm{m/s\cdot k}$，$\Gamma\approx4\times10^{-3}\,\mathrm{k/m}$，且令 $u_0=10\,\mathrm{m/s}$（偏小），$u_1=4\,\mathrm{m/s}$（偏小）．对于冷涌过程，上述 $\bar{u}$，u_0，u 均为合成风的概念，故有

$$c_g=\frac{m}{Pc}\approx13\ \mathrm{m/s} \quad ,$$

c_g 为冷涌孤立波（调制波）的移速，它远慢于单个重力内波（重力流）的传播速度（被调制波的速度），却稍大于基本风速（亦大约为冷空气团的移速）．为了使解收敛，必须有 $\delta_0A^2\lesssim A$，因而可取 $\delta_0\sim10^{-6}$，求得

$$\alpha_1=-3\times10^3 \quad .$$

将上述结果全部代入(29)式中，则得

$$\omega \approx -1.8 \times 10^{-22} \quad ,$$

即非线性项的作用系数约为 10^{-22}，足见非线性作用是很弱的，据此有

$$\alpha_2 \approx -9 \times 10^{-15}/2 \quad .$$

故得到冷涌孤立波的波宽约为

$$DD = \frac{1}{\varepsilon A_0}\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)^{1/2} \approx \frac{1.02}{\varepsilon A_0} \times 10^9 \approx 1.02 \times 10^4\,\mathrm{m}\,.$$

可见，水平尺度为100 km 的冷涌扰动，其冷涌孤立波波宽约为10.2km．看来这个冷空气前沿的孤立波(相当于锋区)宽度较窄，但是，由于孤立波能量集中的特点，常能在冷空气团前沿造成一些剧烈天气过程(如对流性降水等)．文献[1] 中指出、从云图和天气图上都可以发现：冷空气前的冷涌孤立波常对应一条积云线或云带．

六、实 例 分 析

在文献[1] 中给出了一个冬季冷涌对赤道环流影响的个例，并指出冷涌在天气图上一般是不易分析出来的，但当它涌到南海地区时常能触发产生很强的对流．1978 年 12 月至 1979 年 5 月在马来西亚和加里曼丹等地的冬季风试验结果表明，从广州到达赤道的冷空气最大速度约 41 m /s. 我们可以看到，这就是冷锋前沿的重力流．Chang 等[15] 将冷涌划分为两个阶段．第一阶段伴随的是升压，而第二阶段伴随的主要是减温、减湿．他们给出的第一阶段移速约为40 m /s(即文献 [1] 中所指的冷涌)，第二阶段移速为 11 m /s．并认为第二阶段是与冷锋相联系的，第一阶段与重力波相联．这与我们所得的结论十分相似．文献[15] 中的第二阶段即为本文中的孤立波(冷涌主体)，两者计算结果相差很小；第一阶段则为本文中的重力流，两者移速几乎相等．另外，文献[15] 还指出：并不是所有的冷涌都有两个阶段．而本文则指出：冷涌孤立波是在一定的基本风场分布条件下形成的(即对 $\bar{u}$ 的曲率要求)，否则无解或仅有包络洞解．且本文认为：第二阶段(冷空气前的孤立波)是冷涌过程的主要阶段，它对天气的影响更大．

总之，冷空气的爆发往往能形成一种冷涌，而冷涌又常能在锋前沿引起强烈的天气．本文从理论上说明了这一点．

七、结　　论

由上面的讨论，我们可得以下几点结果：

(1) 在一定的基本风场垂直切变下，考虑中尺度扰动中波动的弱非线性相互作用时，扰动的演变由 Schrödinger 方程控制，即呈孤立波状态(如冷空气前沿冷涌)．

(2) 所得的孤立波可以用来解释冷涌的传播现象，这包括两个阶段，第一阶段为快过程(相速为 40 m /s 左右)，这对应于重力流．而慢过程(孤立波)与冷锋相联系，其宽度约为 10k m ，移速约13 m /s．

(3) 冷涌的宽度随着其强度的增加而减小.

参 考 文 献

[1] 丁一汇, 1991, 高等天气学, 气象出版社.
[2] 刘式适. 1981, 台风中的重力波, 台风会议文集, 气象出版社.
[3] Long, R., 1964, Solitary waves in the westlies. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 197—200.
[4] Redekopp, L., 1977, On the theory of solitary Rossby wave, *J. Fluid Mech.*, **82**, 725—745.
[5] 罗德海, 1990, 旋转正压大气中的非线性 Schrödinger 方程和大气阻塞. 气象学报, 48, 265—274.
[6] Xu Xihua (许习华), 1989, The solitary wave of barotropic atmosphere on a sphere, *Adv. Atmos. Sci.*, **6**, 457—466.
[7] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础(第一卷), 科学出版社.
[8] 伍荣生等, 1983, 动力气象学, 上海科学技术出版社.
[9] A. H. 奈佛, 1984, 摄动方法, 上海科学技术出版社.
[10] Zakharov, V. E., 1968, Stability of Periodic waves of finite amplitude on the surface of deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **2**, 190—194.
[11] Yuen, H. C. and Lake B. M., 1975, Nonlinear deep water waves: theory and experiment. *Phys. Fluids*, **18**, 956—960.
[12] 梅强中, 1984, 水波动力学, 科学出版社.
[13] Maslowe, S. A., 1977, J. *Fluid Mech.*, 79, 689—702
[14] Tosiya Tanuiti; 1969, Perturbation method for a nonlinear wave modulation I, *J. Maths Phy.*, **10**, 1369—1372
[15] Chang, C.—P. et al., 1983, Gravitational character of cold surge during winter MONEX, *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 293—307.

SOLITARY GRAVITY WAVE IN MESOSCALE ATMOSPHERIC MOTION

Xu Xihua
(*National Research Center for Marine Environment Forecasts*)
Ding Yihui
(*Academy of Meteorology Sciences, SMA*)

Abstract

In this paper, we have investigated the gravity wave packet in the baroclinic atmosphere. It is found that the wave packet is governed by nonlinear Schrödinger equation. This result is associated with the weakly nonlinear effect of interaction of gravity waves. Then we applied the theory to the case of cold surge and found that the leading edge of main body of cold surge has a width of 10 km and moving speed of 13 m/s. This width would become narrow as the cold surge intensifies. Our results are comparable with the actual observations.

Key words: Solitary wave; Schrödinger equation; Cold surge.