第15卷 第6期
1991年 11月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol.15, No.6
Nov. 1991

从熵原理得出的雨量时程方程*

张学文　马淑红　马　力

（新疆气象科学研究所）

提　要

本文从熵极大原理出发导出了在一次降水过程中降水强度与其历时为负指数关系．并从中引出几个实用方程．这一结果与Paulhus 等给出的经验方程在函数形状上类似．

本文通过对400多次遍及中国各地的降水自记记录分析证实，此理论公式与实况的平均相对偏差为10.7%，比Paulhus等的公式相对偏差小了5%．

此结果可用于暴雨、防洪服务和水利工程设计中．这启示人们熵极大原理在气象水文领域有应用潜力．

关键词：熵原理；降水强度．

一、引　言

一场雨如果不仅总雨量大而且下得很急，就容易造成灾害．因而降水过程中降水强度的变化规律就很值得研究．

50年代Fletcher[1]、叶笃正等[2]对此有过研究．1965年Paulhus[3]则给出了一个至今广为应用[1,4,5]的关系

$$R=421.6\,D^{0.475}\,,\qquad (\mathrm{mm}) \tag{1}$$

式中R为世界降水极大值，D是其持续时间．

以上经验公式与资料基本吻合，缺点是仅适用于世界极值．尹道声[6]考虑到这些情况，他发现改动(1)式中的常数(421.6)值就可以使它适用于中国的暴雨极值和各个暴雨过程，他还从中引出确定暴雨级别的有益思路．

Paulhus公式用于世界极值，他不追究（也不可能追究）公式中的R，D是否同属于一个暴雨过程．尹道声把中心点引向了同一个暴雨过程内的雨量历时关系．这把问题从气候领域转向天气过程，就更具有实用价值．

本文用大量的中国降水自记资料验证了尹道声的公式，同时还从熵极大原理引出一个降水强度与历时长短的理论公式．资料证实由熵极大原理引出的公式的精度比前述经验公式高5%（相对偏差小5%）．

1990年1月3日收到，3月22日收到修改稿．

* 国家自然科学基金和新疆科委资助项目．

二、熵原理导出的结果

熵原理原指热力学第二定律(熵增加原理)，它曾经作为"培养基"在物理、化学中导出过十分有价值的许多定律．信息论问世后又引出信息熵的极大原理(熵极大原理)．1957年Jeynes即用此原理证明了统计物理中的正则分布[7]，从而使熵原理逐步用于更多领域．这里，我们要用它引出降水强度与降水历时的内在关系．

设有一个总降水为 R，总降水历时为 T 的降水过程．如果做一个理想实验：从 T 内任抽取一个充分小的小时段内的降水强度 I，那么抽样结果(I 值)就成了一个随机变量了．

从统计学角度讲，任一随机变量都有一个确定的概率分布．而从气象上讲从 T 内任抽一个降水强度 I(瞬时的 I 值)，其 I 取什么值的概率就与 T 时段内降水强度在时间上的分配有关．利用文献[8]的思路可以得出降水强度在时间上的分布函数与随机采样时 I 的概率分布是同一个函数．

换言之，如果能从某种理论角度得出上述随机抽样时降水强度 I 在 T 时段内的概率分布，也就是找出了降水强度的时间分布规律．

在另一方面，信息理论指出每种概率分布都对应着一个熵值[10]．即熵是概率分布的泛函．分布不同熵值也不同．所以历时 T 内的雨强 I 的分布不同，它对应的熵也不同．

熵不同又是什么含义？熵可以看作是混乱程度的测度．系统如达到最混乱，其熵达到最大．

据此，可以把问题反过来思考：如从气象上假设 T 时段内 I 呈最混乱的分布、熵在此时达极大，这能否有助于我们求出 I 的分布？

这实际上成了一个求泛函的极值问题．而这类问题的解是与约束条件有关的．对此的论证可参考文献[9, 10]中的有关部分．结合当前问题，我们把约束条件连同假设与结果列于表1中，其具体推导过程在此从略．

表1 求雨强分布时的约束条件、假设与结果

	一般提法	在本问题中的含义
假 设	熵应当达极大值	降水强度 I 在时段 T 内呈现最混乱的分布
约束条件	随机变量仅能取正值	在 T 内任一时刻，降水强度 $I \geqslant 0$
	其平均值为有限值	I 的平均值 $= R/T$
结 果	随机变量的概率密度为负指数分布	$f(I)=\frac{1}{\bar{I}}\exp(-I/\bar{I})$

公式

$$f(I)=\frac{1}{\bar{I}}\exp(-I/\bar{I}) \tag{2}$$

就是沿熵极大导出的降水强度 I 为不同值者在降水历时 T 内出现的概率密度．式中的 $\bar{I}$ 即为平均降水强度(数学期望)

$$\bar{I}=R/T. \tag{3}$$

从(2)式可以看出，急雨(I大)的出现概率(即占有T时段内的相对历时)小，而弱降水的持续时间长．持续时间与雨强呈负指数关系[1)]．它是求降水与历时的其他各种关系(见后)的基础．

三、推　论

研究降水强度的实况要用降水自记资料．可是在实际资料和气象统计过程中对于很弱的降水究竟持续了多久并不介意．人们关心的仅是降水强度I超过某个下限I_0的那一部分的雨强变化规律．对此只要我们在导得的公式(2)中以$\bar{I}-I_0$，$I-I_0$分别代替平均雨强$\bar{I}$和雨强I即可．因而有

$$f(I)=\frac{1}{\bar{I}-I_0}\exp\left[-\left(\frac{I-I_0}{\bar{I}-I_0}\right)\right].\qquad I\geqslant I_0 \tag{4}$$

$I_0=0$时上式蜕化为(2)式．(4)式的导出仅要求$I\geqslant I_0$部分的降水也呈最混乱分布即可．而I_0值究竟是多大并无理论限制．

(4)式仍为负指数关系．其右侧算得的值的含义是在雨强超过I_0的那段总降水历时T中，雨强介于$I-0.5$— $I+0.5$间所占的历时与总降水历时之比值．

如仅研究在总历时T中降水强度超过I的所占比率F，则显然应对(4)式作如下积分

$$F=\int_I^{\infty}f(I)dI,$$

代入(4)式得

$$F=\exp\left[-\frac{I-I_0}{\bar{I}-I_0}\right].\qquad I\geqslant I_0 \tag{5}$$

如定义t是降水强度大于I的那些时段的时间合计值，那么可知

$$F=t/T, \tag{6}$$

故(5)式又可写成

$$t=T\exp\left[-\frac{I-I_0}{\bar{I}-I_0}\right].\qquad I\geqslant I_0 \tag{7}$$

如某次降水过程中雨强超过2mm/h($I_0=2$)的部分占了10小时，此间形成80mm降水，而欲求雨强超过20mm/h的急雨占了多少时间，则可先用(3)式得$\bar{I}=8$mm/h，把它和$T=10$，$I=20$，$I_0=2$代入(7)式．由此得出$t\approx0.5$小时．即急雨仅维持了约半小时．

定义r为降水强度超过I时段的总降水，则

$$r=\int_I^{\infty}ITf(I)dI, \tag{8}$$

1) 1981年12期新疆气象上曾载文从统计力学推导正则分布的思路导出同一结果．

式中 $Tf(I)dI$ 代表雨强由 $I \to I+dI$ 时的降水历时，故它与 I 相乘即为相应的降水量．对 I 从 I 积分到无穷大即得 r．代入(7)式有

$$r=t(I+\overline{I}-I_0)\,, \qquad I \geqslant I_0 \tag{9}$$

此式既简单又实用．如令 $I=I_0$，则 t 应等于 T，而 r 应等于 R．此时(9)式蜕化为

$$R=T\overline{I}\,, \tag{10}$$

而它恰为(3)式，这体现了关系是自洽的．如把前例代入(9)式，即 $t=0.5$，$I=20$，$\overline{I}=8$，$I_0=2$，则得 $r=13$ mm．即降水强度超过 20 mm/h 的降水总量为 13 mm（持续半小时）．这些公式对估算暴雨是有用的．

为便于和降水自记资料对比，将(9)式两侧除以 R，并利用(3)、(7)式不难得到

$$\frac{r}{R}=\frac{t}{T}\left[1-\left(1-\frac{I_0}{\overline{I}}\right)\ln\frac{t}{T}\right], \tag{11}$$

r/R 是相对降水量，而 t/T 是相应的相对降水历时．我们称(11)式为雨量时程方程．一次次的降水过程其历时 T、总量 R 都差别很大，但熵理论指出其相对量 r/R 和 t/T 却遵守同一的内在关系［即(11)式］这是颇有意义又利于实用的．

(11)式中如取 $I_0=0$，则蜕化为

$$\frac{r}{R}=\frac{t}{T}\left(1-\ln\frac{t}{T}\right). \tag{12}$$

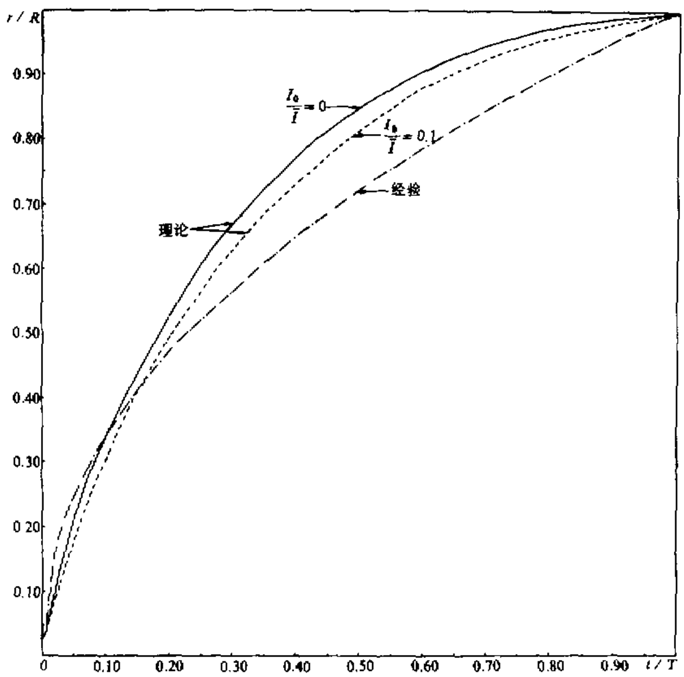

图1　相对雨量 r/R 与相对历时 t/T 的理论曲线和经验曲线

如以 t/T、r/R 为两个直角坐标轴，(11)式就成为经过(0, 0)和(1, 1)两个点的一条曲线. 实际工作中雨强下限 I_0 与平均雨强 $\overline{I}$ 的比值很少超过 0.2(最小时为零)，故在给出的图 1 中我们仅绘出 $I_0=0$ 和 $I_0/\overline{I}=0.1$ 时的两条理论曲线. 图中的点段线对应于尹道声对 Paulhus 公式的修正曲线，其方程为

$$\frac{r}{R}=\left(\frac{t}{T}\right)^{0.475} \quad . \tag{13}$$

上式是把(1)式的 R 分别以 r, R; D 分别以 t, T 代入，并以 k 代替 421.6(尹道声的思路)，再使之相除而得出的.

图 1 显示理论与经验曲线都经过(0, 0)和(1, 1)这两个点(一切实测降水也都如此)，其曲线的外形也相似.

四、验　　证

验证以上理论与经验方程要用降水的自记资料. 业务部门对降水自记常常进行初步整理. 一种整理办法是在总降水历时 T 内再选定若干个时间长度 $t_1<t_2<\cdots<T$，并找出 t_1, t_2, … 时段内形成的最大降水量 r_1, r_2, …. 显然只有把降水强度超过某指定值 I 的全部降水量加起来才能得出最大的降水，所以这里的 r 恰恰与(8)式积分得到的 r 相同. 而与 r 相应的 t 恰好与(7)式的 t 的含义相同.

因而业务部门从自记曲线上整理出来的时段 t_1, t_2, … 和与之对应的最大降水 r_1, r_2, … 恰与(11)(12)式中的 t, r 相当. 这就方便了我们的验证工作.

表 2 就是从降水自记记录上整理出来适于验证用的数据实例. 此例(后同)给出的降水历时 t 的最大值为 90 分钟. 这并不意味着恰恰降了 90 分钟的雨. 而更可能的情况是其他时段的降水强度已相当小而不予追究了. 所以在表中取 $T=90$ 而 $R=47.4$.

表 2　降水量在时间上的分配实例(1988 年 8 月 6 日成都)

降水历时 t(min)	5	10	15	20	30	45	60	90
最大降水 r(mm)	10.9	15.9	23.5	29.9	34.3	35.5	40.0	47.4
相对历时 t/T	0.05	0.11	0.16	0.22	0.33	0.50	0.66	1.00
相对降水 r/R	0.22	0.33	0.49	0.53	0.72	0.74	0.84	1.00

利用表 2 算出的 t/T、r/R 两行数据可以在 t/T、r/R 直角坐标系中点绘出降水过程的 t/T-r/R 曲线，它可直接与图 1 中的理论曲线作对比. 图 2 是从全国约 300 次降水自记数据中选取的实例，它们与图 1 的理论结果相当吻合.

在此我们还要指出，无论是图 1 或图 2 又都与叶笃正等在文献 [2] 中给出的统计平均曲线十分相近.

为对比理论方程(11)、(12)，经验方程(13)与实例的偏差程度，我们用遍及中国各地的 298 次降水过程的自记整理结果，计算理论的 t_1/T, t_2/T, … 对应的相对降水 r_1/R, r_2/R, … 与实际的相对降水之间的相对误差绝对值的平均值. 它显然是计量理论与实际的总体(约有近 1500 个数据)偏差程度的一个较好指标.

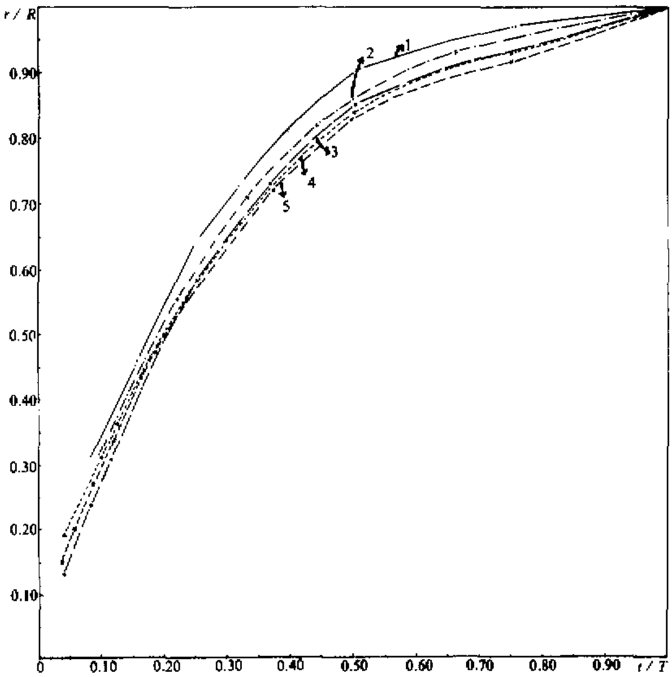

图2 雨量时程曲线实例

1: 兰川 1985 年 6 月 11 日 2: 成都 1984 年 7 月 19 日 3: 广州 1983 年 6 月 17 日

4: 长春 1984 年 7 月 21 日 5: 贵阳 1986 年 6 月 3 日

计算中要用公式(12)中 I_0 , $\overline{I}$ 这两个值. 平均雨强 $\overline{I}$ 就用表 2 中最后一列的降水历时 t_n 和最大降水 r_n 代表 T、R 依公式(3)而求得，即

$$\overline{I}=\frac{R}{T}=\frac{r_n}{t_n} \quad . \tag{14}$$

如何求出降水强度的下限 I_0 呢? 应当说表 2 中给出的数据并不包含关于 I_0 的确切数值. 它应从原始自记的进一步分析中去求得. 但这样做工作量过大而并不十分必要. 我们是用如下方法从表 2 算出关于 I_0 的估计值的.

表 2 中最后两项的历时 t、最大降水 r 如依次记为 t_{n-1}, t_n 和 r_{n-1}, r_n, 那么 $(r_n-r_{n-1})/(t_n-t_{n-1})$就代表在这次降水中存在着那么一个长度为 t_n-t_{n-1} 的时段、它形成的降水为 r_n-r_{n-1}. 或说它对应一个降水强度 $(r_n-r_{n-1})/(t_n-t_{n-1})$. 由于表 2 中 t_1, t_2, … 的顺序是依降水强度的最大值依次排列的，故选用最后两项相减而求得的降水强度是序列中存在的降水强度的最小值. 即 T 时段内没有那个时段的雨强比它更小.

然而，在 T 时段之外，并不是没有降水. 只不过其最大的降水强度 I_0 又低于 T 时段内的雨强的最小值. 按此分析，我们把 I_0 的值估计介于零和前面求得的 T 内最小雨强值之间是妥当的. 鉴于(7)式显示的 I, t 的指数关系，所谓" 之间"我们没有取 0.5, 而取了 0.3. 即以下式作为 I_0 的估计值参与验证实用:

$$I_0 = 0.3\frac{r_n - r_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad . \tag{15}$$

例如表 2 中 $n=8$, $\overline{I}=31.6\,\mathrm{mm}/\mathrm{h}$，依(15)式 $I_0=4.4\,\mathrm{mm}/\mathrm{h}$，故 $(I_0/\overline{I})=0.14$.

我们以 298 次降水自记资料的约 1500 组数据对(11)、(12)、(13)式分别作了计算对比，求得的理论与实际的平均相对偏差列于表 3 中.

表 3　三个公式与实况的平均偏差值

	公式(11)	公式(12)	公式(13)
平均相对偏差(%)	10.7	11.9	15.5

表 3 显示精度最好的是(11)式，其平均相对偏差不足 11%. 对于从毛毛雨到大暴雨的各地各类降水过程来说，(11)式对它们几乎全都适用. 这个结果是令人满意的.

经验公式(13)的偏差较(11)式大了近 5%. 看来可用理论公式取代它. 再者，(12)式仅比(11)式的误差大 1.2%，看来用较为简单的(12)式也可以. 计算中附带求出 $I_0/\overline{I}$ 的平均值为0.0284，这并不大. 故图 1 中仅给出 $I_0/\overline{I}$ 的值为 0 和 0.1 的两条线已经够用了.

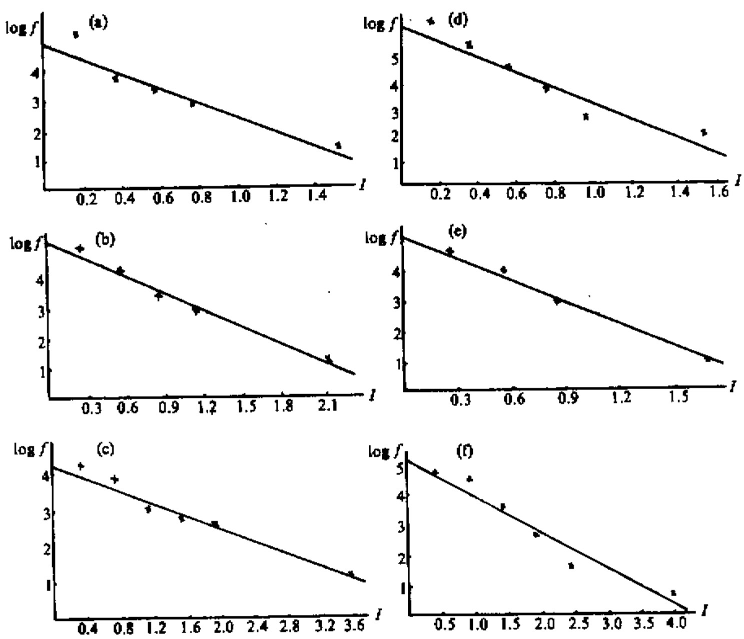

图 3　降水强度I与其出现频数的对数值 $\log f$ 之间的线性关系

a：澜沧 1979 年 8 月，b：澜沧 1979 年 10 月，c：汕头 1978 年 10 月，d：宝鸡 1973 年 10 月，e：哈尔滨 1974 年 5 月，f：福州 1978 年 6 月.

应当指出1500组数据是各地气象人员独立整理出来的，整理中难免有错误. 为避免仅选对自己有利的数据参与统计之嫌，我们未对资料的合理性作判断而全部选用. 估计排除初级统计整理中的不合理数据后，即提高资料精度后，表3中的偏差还要小. 实际上现有资料的精度估计就近于10%的偏差.

另外，我们还用降水自记曲线直接计算降水强度，并把它与公式(4)作对比. 为此对(4)式取自然对数得

$$\ln f(I) = -\ln(\overline{I} - I_0) - (I - I_0)/(\overline{I} - I_0), \tag{16}$$

式中$\overline{I}$，I_0为常数，故它实际上表示I与$\ln f(I)$为线性关系. 如降水资料证实I与$\ln f(I)$为线性关系，也就证实了(4)式的正确性.

从降水自记中验证以上关系时仅能选用历时T很长的降水过程为统计对象. 采样时的时间间隔以20分钟为单元. 从求得的20分钟中降水量为不同值的出现频数换算成不同降水强度I的出现概率(对应于$f(I)$). 最后以$\ln f(I)$，I两组数求其线性方程和相关系数.

马力[11]对分布于中国各地的9个气象站的117次长历时降水作了这个验证. 内中有98次降水的$\ln f(I)$与I的线性相关系数通过了信度为0.05(置信概率0.95)的统计检验. 即有84%的降水过程符合我们给出的理论关系. 图3是给出的几个示例.

总之，我们用两种方法以415次降水自记资料证实了从熵极大原理导得的降水强度与其历时(对应于概率)的理论关系是与事实相符的. 两者的平均相对偏差不足11%.

资料证实理论公式几乎对各类降雨(降雪未作)过程都适用. 这包括毛毛雨也包括台风暴雨. 它是用遍及中国各地的资料证实的，因而具有较高的通用性.

五、结 论

(1) 本文从熵极大原理导出了任何一个降水过程内的雨量时程方程[公式(11)、(12)]. 它与Paulhus的经验方程[公式(13)]在外形上相似[见图(1)].

(2) 通过415次降水过程的验证，说明理论方程、经验方程与实况的平均相对偏差为11%、15%. 即理论方程更优.

(3) 雨量时程方程适用于中国各地、各类、各种降水强度的降雨过程. 故可用于暴雨预告、防洪、水利工程设计上. 降雪过程和国外的适用性待验证.

(4) 把熵极大原理用于研究气象现象是有益的.

参 考 文 献

[1] 阿特金森，1974，热带天气预告手册，上海人民出版社，103—104.
[2] 叶笃正等，1956，黄河流域的降水，科学出版社，95—96.
[3] Paulhus, J.L.H., 1965, Indian Ocean and Taiwan rainfalls set new records, *Mon. Wea. Rev.* 93, No.3, 331—335.
[4] 詹道江等，1983，可能最大暴雨与洪水，水利电力出版社，347—350.
[5] Bary, R.G., 1987, *Atmosphere, Weather and climate*, Methven, 97—98.
[6] 尹道声，1978，暴雨文集，吉林人民出版社，249—255.

[7] Jaynes, E. T., 1957, Information and statistical mechanics, *Physical Review*, **106** (4), 620 — 630.
[8] 张学文, 1986, 相对分布函数和气象熵, 气象学报, **42**, 1, 214 — 219.
[9] Reza, F.M., 1961, *An Introduction to Information Theory*, 268, 278 — 282, McGraw Hill.
[10] 宋俊杰, 1986, 统计信息分析(上), 162 — 165, 南开大学出版社.
[11] 马力, 1990, 降水的历时与强度遵从指数关系, 自然杂志, 13 卷, 1 期, 60 — 61.

Rain Rate Intensity-Duration Formula Derived From Entropy Principle

Zhang Xuewen　Ma Shuhong　Ma Li
(Xinjiang Institute of Meteorology)

Abstract

Under a very simple constrain from the Maximum Entropy Principle, we found that an intensity-duration relation of Precipatation processes obeys negative exponent law. Based on this relation, several empirical formulas were derived. Those formulas are the empirical formula derived by L.H.Paulhus.

415 rain gauge data collected from stations over China were used to calculate the relative deviation of the theory formula. The relative deviation is 10.7%, which is less than the paulhus results.

These formulas are useful for heavy rain forecasting flood control and hydrological engineering design. Also, this results tell us that the maximum entropy principle could be used in meteorology.

Key words: Rain rate intensity; Entropy principle.