第16卷 第1期　　大 气 科 学　　Vol.16, No.1
1992年 1月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　Jan. 1992

风速垂直切变下非均匀层结大气中重力惯性内波的稳定性

万 军　赵 平　　闵文彬

（成都气象学院，成都，610041）　（四川省气象科学研究所，成都，610071）

提　要

本文应用WKB方法研究了在弱非均匀层结大气中，当基本气流具有弱垂直切变时，重力惯性内波的稳定性问题．由导得的波能量方程出发，分析了风速垂直切变及非均匀大气层结对重力惯性内波波能变化率的影响．

关键词：重力惯性内波；稳定性；缓变波列；波能量方程．

一、引　言

暴雨预报对于国民经济具有重要意义，历来为气象工作者所重视．近年来的研究表明，重力惯性波的活动与暴雨有密切关系．早在60年代末，松本诚一、二宫洸三等[1]就已指出梅雨锋带中的中尺度扰动具有重力惯性波的性质．巢纪平[2]、刘式适和刘式达[3]等用WKB方法研究了在静态背景下：非均匀及非定常层结大气中重力惯性内波的稳定性，得到了一些十分有意义的结果．

本文在基本气流具有垂直切变以及大气层结非均匀情况下导出了重力惯性内波的波能方程，从而讨论了基本气流和大气层结对波动发展的影响．

二、基 本 方 程

在考虑基本气流垂直切变时，等压面坐标系中重力惯性内波的线性化方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}+\omega\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+fv, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}-fu, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}=-\frac{RT}{p}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}-\frac{\omega}{\bar{\rho}g}(\gamma_d-\gamma)=0, \tag{5}$$

1988年12月12日收到，1990年7月4日收到再改稿．

其中把f取为常数；带“－”的量均为大气基本状态量；$\gamma=-\dfrac{\partial\overline{T}}{\partial z}$；其它符号为常用.并且

$$\overline{u}(p)=-\frac{1}{f}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial\overline{u}}{\partial p}=\frac{R}{fp}\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\ .$$

如令$\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial}{\partial x}$，则由(1)、(2)及(4)式可得如下形式的涡度和散度方程:

$$\frac{D\xi}{Dt}=f\frac{\partial\omega}{\partial p}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial\omega}{\partial p}-\frac{\partial\overline{u}}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial x}=\nabla_h^2\phi-f\zeta, \tag{7}$$

其中$\zeta=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$；$\nabla_h^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

由(3)、(5)和(7)式又可得

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{D}{Dt}\frac{\partial\omega}{\partial p}-\frac{\partial\overline{u}}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\frac{R}{p}\left\{\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\nabla_h^2 v-\frac{1}{\overline{\rho}g}\nabla_h^2[\omega(\gamma_d-\gamma)]\right\}-f\frac{D}{Dt}\frac{\partial\zeta}{\partial p}. \tag{8}$$

而 $\nabla_h^2 v=-\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y\partial p}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$，$\dfrac{D}{Dt}\dfrac{\partial\zeta}{\partial p}=\dfrac{\partial}{\partial p}\dfrac{D\zeta}{Dt}-\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial p}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$，$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{D\zeta}{Dt}=\dfrac{D}{Dt}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$.

因而再由(6)与(8)式，可得仅含ω的方程

$$\frac{D}{Dt}\left\{\left(\frac{D^2}{Dt^2}+f^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}+\frac{R}{p\overline{\rho}g}\nabla_h^2[\omega(\gamma_d-\gamma)]\right\}$$
$$=\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial p^2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{D}{Dt}\frac{\partial\omega}{\partial x}-f\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)+2f\frac{\partial\overline{u}}{\partial p}\left[\left(f\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}\right)\frac{\partial\omega}{\partial p}+\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial p}-\overline{u}\frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right] \tag{9}$$

上式即为我们引以讨论的基本方程.

三、缓变波列与波能方程

由WKB方法，我们引入缓变时间和空间坐标

$$\tau=\varepsilon t\ ,\ X=\varepsilon x\ ,\ Y=\varepsilon y\ ,\ P=\varepsilon p\ . \tag{10}$$

且设

$$\omega=A(X,\ Y,P,\tau)\,e^{i\theta(x,y,p,t)}, \tag{11}$$

$$A=A_0+\varepsilon A_1+\varepsilon^2A_2+\cdots, \tag{12}$$

其中ε为正的小参数($0<\varepsilon\ll 1$). 同时我们假设基本气流$\overline{u}(p)$随p缓变，即$\partial\overline{u}/\partial p=$

$\varepsilon\partial\overline{u}^*/\partial p$和$\partial^2\overline{u}/\partial p^2=\varepsilon\partial^2\overline{u}^*/\partial p^2$，其中$\partial\overline{u}^*/\partial p\sim O(U/\pi)$，而$U$和$\pi$分别是风速及气压的特征尺度．我们也认为位相$\theta=kx+ly+np-\omega_0 t$，其中$\omega_0$为波动频率，$k$、$l$、$n$为$x$、$y$、$p$方向的波数，且$\omega_0$、$k$、$l$、$n$均为$\tau$、$X$、$Y$、$P$的函数．如果令$\sigma=R(\gamma_d-\gamma)/p\overline{\rho}g$为大气层结稳定度参数，且把$\sigma$看成$\tau$、$X$、$Y$、$P$的函数．则由(9)—(12)式，可得$\varepsilon$的各次幂近似方程：

ε的零次幂近似方程为

$$[(\omega_0-k\overline{u})^2-f^2]\,n^2A_0=K_h^2\sigma A_0, \tag{13}$$

其中$K_h^2=k^2+l^2$．由于$A_0\neq0$，所以有

$$[(\omega_0-k\overline{u})^2-f^2]\,n^2=K_h^2\sigma,$$

即

$$\omega_0=k\overline{u}\pm\sqrt{f^2+\frac{K_h^2}{n^2}\sigma}. \tag{14}$$

由(14)式可求得波动的群速度为

$$C_{gx}=\frac{\partial\omega_0}{\partial k}=\overline{u}+\frac{\sigma}{\omega_r}\frac{k}{n^2},\quad C_{gy}=\frac{\partial\omega_0}{\partial l}=\frac{\sigma}{\omega_r}\frac{l}{n^2},$$

$$C_{gp}=\frac{\partial\omega_0}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\omega_r}\frac{K_h^2}{n^3}, \tag{15}$$

其中$\omega_r=\omega_0-k\overline{u}$为Doppler频率．

ε的一次幂近似方程可表示为

$$2\frac{\partial A_0}{\partial\tau}+2\left(C_{gx}\frac{\partial A_0}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial A_0}{\partial Y}+C_{gp}\frac{\partial A_0}{\partial P}\right)+A_0\left(\frac{\partial C_{gx}}{\partial X}+\frac{\partial C_{gy}}{\partial Y}+\frac{\partial C_{gp}}{\partial P}\right)$$
$$=-2f\frac{\partial\overline{u}^*}{\partial p}\frac{1}{\omega_r}\frac{A_0}{n}(fk+il\omega_r)-\frac{\partial^2\overline{u}^*}{\partial p^2}\frac{1}{\omega_r}\frac{A_0}{n^2}(fl+ik\omega_r)-\frac{A_0}{\omega_r}$$
$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+C_{gx}\frac{\partial}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial}{\partial Y}+C_{gp}\frac{\partial}{\partial P}\right)\omega_r-\frac{1}{\omega_r}\frac{A_0}{n^2}\left(k\frac{\partial}{\partial X}+l\frac{\partial}{\partial Y}-\frac{K_h^2}{n}\frac{\partial}{\partial P}\right)\sigma. \tag{16}$$

如果把复振幅A_0表示成

$$A_0=|A_0|e^{i\varphi(X,Y,P,\tau)} \tag{17}$$

且认为波动能量E与波振幅平方成正比，即$E\propto|A_0|^2$，则用A_0^*（A_0^*为A_0的复共轭）乘以(16)式可得

$$\frac{\partial E}{\partial\tau}+\tilde{\nabla}\cdot(E\vec{C}_g)+\frac{\partial}{\partial P}(C_{gp}E)=-2f\frac{\partial\overline{u}^*}{\partial p}\frac{E}{n\omega_r}(fk+il\omega_r)$$
$$-\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial p^2}\frac{E}{n^2\omega_r}(fl+ik\omega_r)-\frac{EK_h^2}{2\omega_r^2n^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}-\frac{E}{\sigma}(C_{gx}-\overline{u})\frac{\partial\sigma}{\partial X}$$
$$-\frac{E}{\sigma}\left(C_{gy}\frac{\partial\sigma}{\partial Y}+C_{gp}\frac{\partial\sigma}{\partial P}\right)-\frac{EK_h^2}{2\omega_r^2n_2}\overline{u}\frac{\partial\sigma}{\partial X}$$
$$-2iE\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+C_{gx}\frac{\partial\varphi}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial\varphi}{\partial Y}+C_{gp}\frac{\partial\varphi}{\partial P}\right). \tag{18}$$

其中$\tilde{\nabla}=\dfrac{\partial}{\partial X}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial Y}\vec{j}$；$\vec{C}_g=C_{gx}\vec{i}+C_{gy}\vec{j}$．上式即为重力惯性内波的波能方程．由上式可看到波动的能量变化与基本气流及其垂直切变以及层结稳定度参数的非均匀性有关．

四、讨　论

下面我们讨论(18)式．由于当$\omega_r^2<0$时，波动频率$\omega_0=k\bar{u}\pm i|\omega_r|$，这时波动变为以基本气流速度大小传播的扰动，其振幅与快变量t有关，不属本文讨论之内．因此我们只讨论$\omega_r^2>0$的情况．这时ω_r为实数，且不妨假设ω_r为正(但k、l、n可正可负)．由(18)式的实部相等可得

$$\frac{\partial E}{\partial\tau}+\tilde{\nabla}\cdot(\vec{C}_g E)+\frac{\partial}{\partial P}(C_{gp}E)=-2f^2\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial p}\frac{E}{\omega_r}\frac{k}{n}-f\frac{\partial^2\bar{u}^*}{\partial p^2}\frac{El}{\omega_r n^2}$$

$$-\frac{EK_h^2}{2\omega_r^2n^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}-\frac{E}{\sigma}(C_{gx}-\bar{u})\frac{\partial\sigma}{\partial X}-\frac{E}{\sigma}\left(C_{gy}\frac{\partial\sigma}{\partial Y}+C_{gp}\frac{\partial}{\partial P}\right)-\frac{EK_h^2}{2\omega_r^2n^2}\bar{u}\frac{\partial\sigma}{\partial X},\tag{19}$$

由(18)式的虚部相等可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\vec{C}_g\cdot\tilde{\nabla}\varphi+C_{gp}\frac{\partial\varphi}{\partial P}=-\left(2f\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial p}\frac{l}{n}+\frac{\partial^2\bar{u}^*}{\partial p^2}\frac{k}{n^2}\right).\tag{20}$$

(19)式即为重力惯性波的能量方程.从式中可看出，如果层结定常且均匀，即$\sigma=$常数，而基流$\bar{u}$又为常数时，能量方程取守恒形式，即

$$\frac{\partial E}{\partial\tau}+\tilde{\nabla}\cdot(\vec{C}_g E)+\frac{\partial}{\partial P}(C_{gp}E)=0.\tag{21}$$

(20)式为缓变波列位相φ的变化方程，由该式可看到φ的变化只与基本气流的垂直切变有关，而与层结的非均匀性无关．在基本气流无切变时，波包位相也守恒，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\vec{C}_g\cdot\nabla\varphi+C_{gp}\frac{\partial\varphi}{\partial P}=0.$$

为了进一步分析波能变化，我们对(19)式取体积分，并设体积边界处$\omega=0$，则可得到

$$\iiint_V\frac{\partial E}{\partial\tau}dV=-\iiint_V 2f^2\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial p}\frac{E}{\omega_r}\frac{k}{n}dV-\iiint_V f\frac{\partial^2\bar{u}^*}{\partial p^2}\frac{El}{\omega_r n^2}dV$$

$$-\iiint_V\frac{EK_h^2}{2\omega_r^2n^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}dV-\iiint_V\frac{E}{\sigma}\left[(C_{gx}-\bar{u})\frac{\partial\sigma}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial\sigma}{\partial Y}+C_{gp}\frac{\partial\sigma}{\partial P}\right]dV$$

$$-\iiint_V\frac{EK_h^2}{2\omega_r^2n^2}\bar{u}\frac{\partial\sigma}{\partial X}dV,\tag{22}$$

同时注意到关系式

$$C_{gx}-\bar{u}=\frac{\sigma}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}C_1-\frac{\sigma}{\omega_r^2}\frac{k^2}{n^2}\bar{u},$$

$$C_{gy}=\frac{\sigma}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}C_2-\frac{\sigma}{\omega_r^2}\frac{kl}{n^2}\bar{u},\tag{23}$$

$$C_{gp}=-\frac{\sigma}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}C_p+\frac{\sigma}{\omega_r^2}\frac{K_h^2k}{n^3}\bar{u},$$

其中 $C_1=\frac{\omega_0}{K_h^2}k$，$C_2=\frac{\omega_0}{K_h^2}l$，$C_p=\frac{\omega_0}{n}$，它们分别表示波在 x、y、p 三个方向上的传播情况. 将(23)式代入(22)式得

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial E}{\partial\tau}dV=&-\iiint_V 2f^2\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial p}\frac{E}{\omega_r}\frac{k}{n}dV-\iiint_V f\frac{\partial^2\bar{u}^*}{\partial P^2}\frac{E}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}C_2dV\\&+\iiint_V f\frac{\partial^2\bar{u}^*}{\partial p^2}\frac{E}{\omega_r^2}\frac{l^2}{n^2}\frac{k}{l}dV-\iiint_V\frac{E}{2\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}dV\\&-\iiint_V\frac{E}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}\vec{C}_h\cdot\tilde{\nabla}\sigma dV+\iiint_V\frac{E}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}C_p\frac{\partial\sigma}{\partial P}dV\\&+\iiint_V\frac{E}{2\omega_r^2}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\bar{u}\frac{\partial\sigma}{\partial X}dV+\iiint_V\frac{E}{\omega_r^2}\frac{1^2}{n^2}\frac{k}{l}\bar{u}\frac{\partial\sigma}{\partial Y}dV\\&-\iiint_V\frac{E}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}\frac{k}{n}\bar{u}\frac{\partial\sigma}{\partial P}dV,\end{aligned}\tag{24}$$

其中 $\vec{C}_h=C_1\vec{i}+C_2\vec{j}$.

下面我们讨论(24)式右边几个重要项对能量变化的贡献，以及它们对重力惯性内波发展所起的作用.

1. $-\iiint_V 2f^2\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial \mathrm{p}}\frac{E}{\omega_r}\frac{k}{n}dV$ **项**

由于 $E>0$ 和 $\omega_r>0$，因而在西风急流下方，$\partial\bar{u}^*/\partial p<0$，对于东倾波动该项为正值，有利于波能增加，从而使垂直运动加强；在东风急流下方，$\partial\bar{u}^*/\partial p>0$，对于西倾波动该项也为正值，有利于波能增加.

2. $-\iiint_V f\frac{\partial^2\bar{u}^*}{\partial p^2}\frac{E}{\omega_r^2}\frac{K_h^2}{n^2}C_2dV$**项**

在西风急流轴上或其附近，$\partial^2\bar{u}^*/\partial \mathrm{p}^2<0$，如果波由南向北传播，即 $C_2>0$，则该项使波能增加；而在东风急流轴上或其附近，$\partial^2\bar{u}^*/\partial p^2>0$，当波动由北向南传播时，$C_2<0$，同样使波能增加.

3. $\iiint\limits_V f\dfrac{\partial^2\overline{u}^*}{\partial p^2}\ \dfrac{E}{\omega_r^2}\ \dfrac{l^2}{n^2}\ \dfrac{k}{l}\ \overline{u}dV$ 项

由于在东、西风急流轴及其附近，一般有$\overline{u}\partial^2\overline{u}^*/\partial p^2<0$，因而对于导式波($k/l>0$)，该项为负，从而使波能减小；而对于曳式波($k/l<0$)，该项为正，有利于波能增加.

4. $-\iiint\limits_V \dfrac{E}{2\omega_r^2}\ \dfrac{K_h^2}{n^2}\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}\ dV$ 项

如果 $\partial\sigma/\partial\tau>0$，即大气层结稳定度随时间增加，或大气层结不稳定度随时间减弱，则波能量将减少；反之，如果 $\partial\sigma/\partial\tau<0$，即大气层结不稳定度随时间增强，或大气层结稳定度随时间减弱，则波能量增长．这个结果和巢纪平[2]、刘式适等[3]所得的一致.

5. $-\iiint\limits_V \dfrac{E}{\omega_r^2}\dfrac{K_h^2}{n^2}\ \vec{C}_h\cdot\tilde{\nabla}\sigma\, dV$

如果 $\vec{C}_h\cdot\tilde{\nabla}\sigma>0$，即波动沿水平方向向大气层结稳定度增加或向层结不稳定度减弱的方向传播时，波能量减少；反之，如果 $\vec{C}_h\cdot\tilde{\nabla}\sigma<0$，即波沿水平方向向层结稳定度减小或层结不稳定度增加的方向传播时，波能将增加．我们所得的这个结论与巢纪平[2]、刘式适等[3]的相反，这是由于我们在(9)式中保留了层结参数的空间导数项所致．我们的结论与实际比较一致[4].

6. $\iiint\limits_V \dfrac{E}{\omega_r^2}\ \dfrac{K_h^2}{n^2}\ C_p\dfrac{\partial\sigma}{\partial p}\ dV$

夏季，一般有 $\partial\sigma/\partial P<0$，因此当重力惯性波向上传播时(即 $C_p<0$)，波能量增加；反之，当波向下传播时，$C_p>0$，波能量减弱.

(24)式右边的其它几项为基本气流、非均匀层结稳定度以及波动性质的相互作用对重力惯性波能量的影响，我们不再详细讨论.

五、结束语

本文应用WKB方法研究了弱非均匀层结大气中，当基本气流具有弱垂直切变时，重力惯性内波的稳定性问题，可以看出：重力惯性波的波动变化与基本气流及其垂直切变和层结非均匀性有密切关系；在急流的不同位置，对于不同的波动，其能量可以增长或减弱.

参 考 文 献

[1] 杨国祥，1983，中小尺度天气学，149，气象出版社．

[2] 巢纪平，1980，非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用，大气科学，第4卷，第3期，230－237．

[3] 刘式适、刘式达，1987，地球流体惯性重力内波的波作用量与稳定性，大气科学，第11卷，第1期，12－21．

[4] 赵平、孙淑清，1990，非均匀大气层结中大气惯性重力波的发展，气象学报，第48卷，第4期，397－403．

Stability of Internal Inertial Gravity Wave in the Heterogeneous Stratified Atmosphere With Vertical Shear of Wind

Wan Jun Zhao Ping Min Wenbing

(*Chengdu Meteorological Institute, Chengdu, 610041*) (*Sichuan Meteorological Institute, Chengdu, 610071*)

Abstract

This paper discusses the stability of internal inertial gravity wave in the heterogeneous stratified atmosphere when basic flow appears to be weak vertical shear by the WKB method. From the derived wave energy equation we analyse the effects of the wind vertical shear heterogeneous atmospheric stratification and its temporal variability on the slowly varying wave train of internal inertial gravity wave.

Key words: Internal inertial gravity wave; Stability; Slowly varying wave train; Wave energy equation.