一种基于混沌理论的预报方法*

周 家 斌
(中国科学院大气物理研究所,北京 100080)

提 要

用单变量时间序列重构 m 维相空间,然后将相空间中的资料变换成矩形网格点上的值,从而将预报问题化成二维资料的插补问题,并用作者提出的二维资料插补方法求得预报。

关键词 时间序列;混沌;预报方法;空间变换;资料插补.

一、引 言

自从 Lorenz 的开创性研究[1]以来,混沌理论取得了巨大的进展. 近年来关于可预报性的研究[2],使得这一理论有了应用前景. 但是,可预报性的研究,只是给出了一个有可能达到的可用预报的时限,而如何制作预报则是另一个问题.

本文中,我们将 m 维相空间的资料变换到二维空间,然后应用作者提出的资料插补方法[3]制作未来时刻的预报,并给出对南方涛动的计算结果.

二、m 维相空间的重构

在许多实际问题中,我们处理的不是多变量的动力系统,而是某个单变量 x 的时间序列,即

$$x(t_i)=x(t_0+i\Delta t) \qquad (i=0,1,2,\cdots,N-1) \tag{1}$$

式中 t_0 为观测资料的起始时刻,Δt 为时间间隔,N为样本长度. 显然 x 仅是表征系统状态的所有变量中的一个,但由于各个变量之间的相互关联和影响,这一单变量序列仍包含着原来系统中所有变量的痕迹.

根据 Packard 等[4]的方法,我们可以引入一个时间滞后 τ,重新构造一个 m 维相空间 R^m, 并在这个空间恢复原来的动力系统,亦即建立如下相型:

$$X_m(t_i)=\{x(t_i),x(t_i-\tau),x(t_i-2\tau),\cdots,x[t_i-(m-1)\tau]\} \tag{2}$$
$$(i=k,k+1,k+2,\cdots,N-1;k=(m-1)\tau/\Delta t)$$

可以证明,只要 m 足够大,则重建的系统与原来动力系统的信息性质和几何性质是等价的.为了保证(2)式中各个坐标间相互独立,τ 值应不小于时间序列的零相关时间(decorrelation time).

1993 年 6 月 12 日收到,7 月 9 日收到修改稿.

* 中国科学院 KY-85-10 项目

三、预报问题的提法

在 m 维相空间中，系统在某一时刻处在一个相点上，而系统随时间的演变则为一条相轨线。因此，预报问题则是确定未来相轨线的走向问题。在时间离散的情况下，就是在前期若干个相点的位置已知的条件下，系统在下一时刻相点的位置问题。例如，已知 t_{n_0}，$t_{n_0+1}, t_{n_0+2}, \cdots, t_{n_0+T-1}$ 时刻相点的位置 $X_m(t_{n_0}), X_m(t_{n_0+1}), X_m(t_{n_0+2}), \cdots, X_m(t_{n_0+T-1})$，求 t_{n_0+T} 时刻的位置 $X_m(t_{n_0+T})$。

将 $X_m(t_{n_0}), X_m(t_{n_0+1}), X_m(t_{n_0+2}), \cdots, X_m(t_{n_0+T-1})$，$X_m(t_{n_0+T})$ 的所有分量写出，则为

$$
\begin{array}{lllll}
x_m(t_{n_0}) & x_m(t_{n_0}-\tau) & x_m(t_{n_0}-2\tau) & \cdots x_m[t_{n_0}-(m-1)\tau] \\
x_m(t_{n_0+1}) & x_m(t_{n_0+1}-\tau) & x_m(t_{n_0+1}-2\tau) & \cdots x_m[t_{n_0+1}-(m-1)\tau] \\
x_m(t_{n_0+2}) & x_m(t_{n_0+2}-\tau) & x_m(t_{n_0+2}-2\tau) & \cdots x_m[t_{n_0+2}-(m-1)\tau] \\
\vdots & & & \\
x_m(t_{n_0+T-1}) & x_m(t_{n_0+T-1}-\tau) & x_m(t_{n_0+T-1}-2\tau) & \cdots x_m[t_{n_0+T-1}-(m-1)\tau] \\
x_m(t_{n_0+T}) & x_m(t_{n_0+T}-\tau) & x_m(t_{n_0+T}-2\tau) & \cdots x_m[t_{n_0+T}-(m-1)\tau]
\end{array}
\tag{3}
$$

由于零相关时间 τ 不会小于资料采样间隔 Δt，且 τ 为 Δt 的整倍数，因此，在(3)式 m 维空间的所有分量中，只有 $x_m(t_{n_0+T})$ 是未知的，亦即需要预报的。

(3)式的所有分量，构成一个 $(T+1)\times m$ 维矩阵，我们可以把它看成二维空间的 $(T+1)\times m$ 个点。这样，预报 $x_m(t_{n_0+T})$ 的问题就化为用已知的 $(T+1)\times m-1$ 点上的值求 $x_m(t_{n_0+T})$ 的插值问题。

四、二维资料插值方法简介

本文所用的插值方法是作者提出的新的资料插补方法[3]。因此，在这里简单介绍一下这个方法，然后给出作者最近设计的简化改进方案。

为了方便，将(3)式中资料阵所示的二维数组改用新的符号表示

$$
\begin{array}{llll}
Z(1,1) & Z(2,1) & Z(3,1) & \cdots Z(m,1) \\
Z(1,2) & Z(2,2) & Z(3,2) & \cdots Z(m,2) \\
\vdots & & & \\
Z(1,T+1) & Z(2,T+1) & Z(3,T+1) & \cdots Z(m,T+1)
\end{array}
\tag{4}
$$

作者提出的插补公式是：

$$Z^{(\nu)}(1,T+1)=\sum_{k=0}^{K_0}\sum_{s=0}^{S_0}A_{ks}^{(\nu)}\varphi_k(1)\varphi_s(T+1) \tag{5}$$

$$A_{ks}^{(\nu)}=\sum_{\substack{i=1\\(i,j)\neq(1,T+1)}}^{m}\sum_{j=1}^{T+1}Z(i,j)\varphi_k(i)\varphi_s(j)+Z^{(\nu-1)}(1,T+1)\varphi_k(1)\varphi_s(T+1) \tag{6}$$

这是一组迭代公式，其中 ν 为迭代次数，$\varphi_k(i)$ 为 k 阶规一化车贝雪夫多项式在格点 i 的值，$\varphi_s(j)$ 为 s 阶规一化车贝雪夫多项式在格点 j 的值，K_0, S_0 分别为(5)式中求和截止阶数。给定初值 $Z^{(0)}(1,T+1)$之后，可依次由(5)、(6)两式循环求出各次近似值 $Z^{(1)}(1,$

$T+1), Z^{(2)}(1,T+1), \cdots Z^{(v)}(1,T+1)$.

在以前的论文[3,5]中，对一维资料的插补讨论较为详细，而对二维资料的插补说明较简. 在这里，我们把二维情况下与一维计算方案相对应的有关公式及操作步骤作一简要叙述，有关证明可类比一维情况做出，故从略.

(5)、(6)两式的迭代计算是收敛的，其迭代终值为

$$Z^{(\infty)}(1,T+1) = Z(1,T+1) + \frac{\varepsilon}{1-\sigma} \tag{7}$$

其中

$$\varepsilon = \tilde{Z}(1,T+1) - Z(1,T+1) \tag{8}$$

$$\tilde{Z}(1,T+1) = \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} A_{ks}\varphi_k(1)\varphi(1,T+1) \tag{9}$$

$$A_{ks} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T+1} Z(i,j)\varphi_k(i)\varphi_s(j) \tag{10}$$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} \varphi_k^2(1)\varphi_s^2(T+1) \tag{11}$$

ε 是拟合值 $\tilde{Z}(1,T+1)$ 的误差，简称拟合误差，它是包括 $Z(1,T+1)$ 在内的所有格点上的 $Z(i,j)$ 值均已知时(9)式的拟合误差.

插值通过两种方法求出[5]:

1) 采用理想初值，经少数几次迭代，求出误差较小的插补值. 理想初值的条件是

A) 初值误差 $\varepsilon^{(0)} = Z^{(0)}(1,T+1) - Z(1,T+1)$ 与拟合误差 ε 反号.

B) $|\varepsilon^{(0)}| > \frac{|\varepsilon|}{1-\sigma}$

2) 应用如下公式由迭代终值求出插补值.

$\varepsilon > 0$ 时，

$$Z_\infty(1,T+1) = Z^{(\infty)}(1,T+1) - \frac{\bar{\varepsilon}_+}{1-\sigma} \tag{12}$$

$\varepsilon < 0$ 时，

$$Z_\infty(1,T+1) = Z^{(\infty)}(1,T+1) - \frac{\bar{\varepsilon}_-}{1-\sigma} \tag{13}$$

式中 $Z_\infty(1,T+1)$ 为插值，$\bar{\varepsilon}_+$ 和 $\bar{\varepsilon}_-$ 分别为 $\varepsilon > 0$ 和 $\varepsilon < 0$ 时 ε 的平均值.

由于以上两种方法均需知道 ε 的符号，因此需在处理历史资料时制作迭代终值 $Z^{(\infty)}(1,T+1)$ 的分布图以作为确定 ε 符号的工具.

五、资料插补方法的简化改进方案

(5)、(6)两式是一维插补公式的推广，而一维公式又是作者提出的时间序列预报方法[6]的推广. 最近，作者提出时间序列预报方法的改进方案1)和简化方案[7]，并且提出，

把两个方案相结合，就可得到既准确又快捷的预报．同样，二维资料的插补，也可以有相应的简化改进方案．现在，我们简要叙述一下这个方案．为简明计，将有关推导略去．

1）改进方案

A）由迭代终值求插补值：（12）、（13）式中的 ε 平均值为常数，现改用在 $Z^{(\infty)}(1,T+1)$ 的不同区间用不同的平均值．

B）由理想初值求插补值：在原方案中对所有个例采用统一的迭代次数，现在在 $Z^{(\infty)}(1,T+1)$ 的不同区间采用不同的迭代次数．

2）简化方案

首先给出三个简化计算公式：

迭代公式：

$$Z^{(\nu)}(1,T+1)=\frac{1-\sigma^{\nu}}{1-\sigma}\Sigma_4+\sigma^{\nu}Z^{(0)}(1,T+1) \tag{14}$$

迭代终值公式：

$$Z^{(\infty)}(1,T+1)=\frac{\Sigma_4}{1-\sigma} \tag{15}$$

拟合公式：

$$\tilde{Z}(1,T+1)=\Sigma_4+\sigma Z(1,T+1) \tag{16}$$

以上三式中

$$\Sigma_4=\sum_{k=0}^{K_0}\sum_{s=0}^{S_0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{T+1}Z(i,j)\varphi_k(i)\varphi_k(1)\varphi_s(j)\varphi_s(T+1) \tag{17}$$

计算方案是：

A）由迭代终值求插补值：将用公式计算改为在迭代终值分布图上直接读数．

B）由理想初值求插补值：由理想初值用(14)式对少数几个 ν 值进行计算，选出其中最接近由迭代终值求出的插补值的计算结果作为插补值．

六、南方涛动预报试验

我们用的南方涛动资料是1882—1993年的达尔文站月平均气压．样本总数为1334．资料取自《世界天气记录》（World Weather Records）、《世界气候资料》（《Monthly Climatic Data for the World》）和《气候监测公报》．为了消除季节变化的影响，对资料进行了标准差标准化[6]处理．为了计算方便，又对标准差标准化资料做了极差标准化[7]处理．

图1给出1990年1月至1993年2月的计算结果．图中虚线为计算结果，实线为实测结果．由图可见，气压变化的趋势计算出来了，但误差仍较大．因此，本文的计算结果是初步的．为了提高拟合效果，尚需作进一步的试验．

1）周家斌，时间序列预报方法的改进方案．

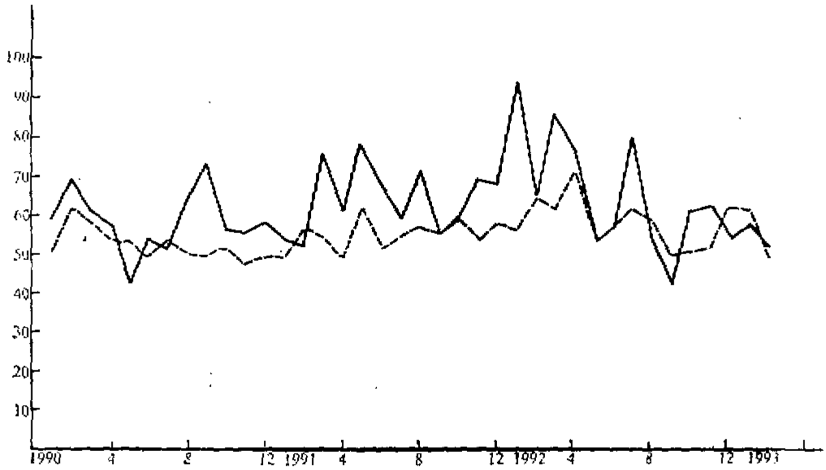

图 1　1990 年 1 月至 1993 年 2 月的计算结果
虚线为计算结果，实线为实测结果.

杨培才、陈烈庭两同志在本文完成过程中惠于帮助，特此致谢!

参　考　文　献

[1] Lorenz E. N., 1963, Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130—141.
[2] 杨培才、陈烈庭，1990，埃尔尼诺/南方涛动的可预报性，大气科学，14，64—71.
[3] 周家斌，1987，一种气象资料插补方法，科学通报，32，1199—1200.
[4] Packard N. H. et al., 1980, Geometry from a Time Series, *Phys. Rev. Lett.*, 45, 712—716.
[5] 周家斌、尹秀兰，1991，气象资料插补试验，气候学研究—统计气候学，气象出版社，174—182.
[6] 周家斌，1990，车贝雪夫多项式及其在气象中的应用，气象出版社.
[7] 周家斌、朱文琳，1992，时间序列预报方法的进一步简化，长期天气预报和日地关系研究，气象出版社，157—164.

A Forecasting Model Based on the Theory on Chaos

Zhou Jiabin
(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

m-dimensional phase space is constructed with a univariate time series. Then the data in phase space is transformed into that at rectangular net.

Thus the forecasting problem is transformed into that of interpolation of two-dimensional data. Finally the predicted value is evaluated by using the method of data interpolation proposed by the author (1987).

Key words: Chaos; Forecasting Method; Spatial transformation; Time series; Data interpolation.