

四阶矩准正态分布和三阶矩 剪切近似的验证^{*}

张 强 胡隐樵

(中国科学院兰州高原大气物理研究所, 兰州 730000)

提 要

本文利用近地面层大气湍流量的观测资料对四阶矩的准正态分布假定和三阶矩的剪切近似进行了实验验证。结果表明, 四阶矩能够较好地符合准正态分布假定; 三阶矩不仅完全满足剪切近似, 甚至还可以对剪切程度进一步加强, 并且得到了一系列剪切近似的加强修正系数。

关键词: 高阶矩; 准正态分布假定; 剪切近似; 加强修正系数。

一、问题的提出

湍流运动是大气边界层最主要的特征之一。Reynolds 方程是研究大气边界层平均特征和湍流结构的主要手段。如何处理好 Reynolds 方程组中的高阶项是该方程闭合的关键问题。

在建立边界层数值模式时, Reynolds 方程的闭合问题是通过特定的闭合近似即参数化方案来实现的。目前较普遍使用的闭合模式有: K 闭合模式(即一阶闭合)、二阶闭合模式和三阶闭合模式等。虽然更高的闭合模式也曾有不少人作过讨论, 但更高阶闭合模式不仅因方程繁多造成计算量过大, 而且也由于实验上很难验证, 使闭合经验常数难以确定。Andre 的工作^[1,2]已表明, 三阶闭合模式有其优点, 它能较完整地描述大气边界层的湍流特征。

Andre 的三阶闭合假定采用了准正态近似^[1~3]。尽管准正态近似能够对未知的四阶矩进行参数化, 但由于准正态近似取消了四阶矩对三阶矩的影响, 使得三阶矩在模拟运算中过度增长^[4], 导致了无物理意义的负能量通量密度的出现, 为此它同时引入了剪切近似^[2,3], 以此来限制三阶矩增长的目的。不过到目前为止无论准正态近似还是剪切近似, 至今对它们的直接实验验证尤其在大气中的验证却并不多见。

本文试图利用瑞典乌普萨拉大学在乌普萨拉市郊观测的近地面湍流资料^[5,6]来部分

1992年8月25日收到, 1993年3月10日收到修改稿。

^{*} 本文是国家自然科学基金委员会资助的“黑河地区地气相互作用实验研究”重大项目的研究成果。

地验证准正态分布假定和剪切近似, 并求出一些有关的经验常数。这种验证和经验常数的确定对大气边界层数值模式的建立和数值模拟研究无疑是有益的。

二、四阶矩准正态近似和三阶矩剪切近似

1. 四阶矩准正态近似

Millionshchikov 等人^[7-9]为使 Reynolds 方程能在三阶矩上截断对四阶矩作了高斯分布假定。这个假定认为四阶矩与二阶矩有关, 且脉动速度 (和温度) 分量是一个 Gaussian 分布随机变量^[7]。这意味着任一四阶矩在随机平稳过程中是符合准高斯分布即准正态分布的。从而每个四阶矩都可以用一些有关的二阶矩的线性组合来表示。如果 a', b', c', d' 作为湍流分量 w', u', v', θ', q' 等, 则有

$$\overline{a'b'c'd'} = \alpha \overline{a'b'} \overline{c'd'} + \beta \overline{a'c'} \overline{b'd'} + \gamma \overline{a'd'} \overline{c'b'}, \quad (1)$$

其中 α, β, γ 是由实验确定的经验常数, 一般情况下可以近似地认为 α, β, γ 均等于 1^[3]。这样得到四阶矩准正态近似表达式为

$$\overline{a'b'c'd'} = \overline{a'b'} \overline{c'd'} + \overline{a'c'} \overline{b'd'} + \overline{a'd'} \overline{b'c'}. \quad (2)$$

根据(2)式, 对一种特殊情况 ($a' = b' = c' = d'$), 四阶矩 $\overline{a'^4}$ 可表示成

$$\overline{a'^4} = A(\overline{a'^2})^B. \quad (3)$$

这里 a' 可包括风速脉动量 w', u', v' 以及温度脉动 θ' 和湿度脉动 q' 在内的任一湍流量。而 $\overline{a'^2}$ 是有关的脉动量的方差 (即二阶矩), 其中 $A = 3, B = 2$ 。

2. 三阶矩的剪切近似

在准正态近似中为了有效抑制三阶矩不合实际地增长而引入了对三阶矩的剪切近似。剪切近似依赖了这样一个事实, 即湍流脉动量符合由广义 Schwarz 不等式所导出的限制条件^[10,11]。假若给出三个湍流脉动量 a', b', c' (a', b', c' 表示速度湍流脉动分量 w', u', v' , 温度湍流脉动 θ' , 湿度湍流脉动量 q'), 三阶矩总能表示成

$$\overline{a'b'c'} = \overline{a'(b'c' + C)}. \quad (4)$$

这里 C 对平均算子而言是常数, 根据 Schwarz 不等式得到

$$(\overline{a'b'c'})^2 \leq \overline{a'^2} [\overline{b'^2 c'^2} + 2C \overline{b'c'} + C^2], \quad (5)$$

当取 $C = -\overline{b'c'}$ 时可使不等式右边达到最小, 因此有

$$(\overline{a'b'c'})^2 \leq \overline{a'^2} [\overline{b'^2 c'^2} - \overline{b'c'}^2], \quad (6)$$

这里(6)式很清楚地表明, 四阶矩 $\overline{b'^2 c'^2}$ 对三阶矩 $\overline{a'b'c'}$ 的发展强加了一个限制, 如果借用准正态近似可将(6)式改写为^[3]

$$|\overline{a'b'c'}| \leq [\overline{a'^2} (\overline{b'^2 c'^2} + (\overline{b'c'})^2)]^{1/2}. \quad (7)$$

可见在四阶矩被截去后,三阶矩的发展极限也可由二阶矩的组合(不等式(7)的右边)来近似给出,以达到限制三阶矩在截去四阶矩后不合理增长的目的。根据对称性,剪切近似的普遍表达式应写为

$$|\overline{a'b'c'}| \leq \min \left\{ \begin{aligned} & [\overline{a'^2}(\overline{b'^2} + \overline{c'^2}) + (\overline{b'c'})^2]^{1/2}, \\ & [\overline{b'^2}(\overline{a'^2} + \overline{c'^2}) + (\overline{a'c'})^2]^{1/2}, \\ & [\overline{c'^2}(\overline{a'^2} + \overline{b'^2}) + (\overline{a'b'})^2]^{1/2}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

对于(8)式当 $a' = b'$ 时可以简化成

$$|\overline{a'^2 c'}| \leq \min \left\{ \begin{aligned} & (2\overline{c'^2}(\overline{a'^2})^2)^{1/2}, \\ & [\overline{a'^2}(\overline{c'^2} + \overline{a'^2}) + (\overline{a'c'})^2]^{1/2}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

当 $a' = b' = c'$ 时可以简化成

$$|\overline{a'^3}| \leq (2(\overline{a'^2})^3)^{1/2}. \quad (10)$$

(8)式是剪切近似的一般表达形式,而(9),(10)式是剪切近似在两种特殊情况下的表达形式。

三、实 验 验 证

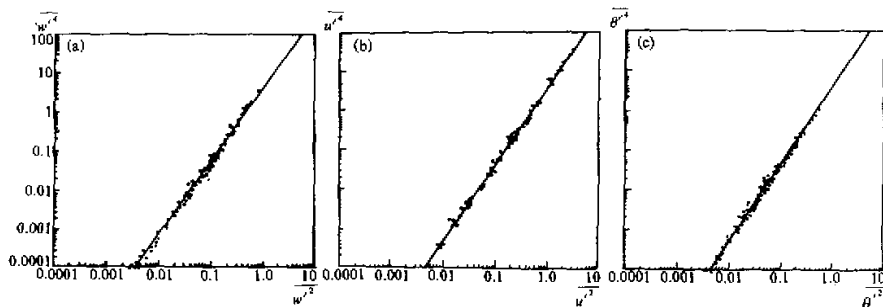
在这一节中将用 Hogstrom 教授提供的瑞典乌普萨拉资料^[4,5]来确定二阶矩与高阶矩(三阶矩和四阶矩)的部分关系式(3)和(8)——(10)。从而部分地验证四阶矩的准正态分布假定和三阶矩的剪切近似。这份资料是瑞典乌普萨拉大学 1986 年 5—6 月份在乌普萨拉市东南(59°50'N)约 10km 的郊区农田中观测得到的,正式观测在 5 月 16 日—6 月 13 日期间。当风向在 220—310° 和 110—170° 两扇面区内下垫面较平坦,而其余风向范围内下垫面均较复杂。观测场设有一座 24m 高的微气象观测塔,塔上同时安装了三层风、温、湿脉动观测。文献[4]对这次试验作了较详细的介绍。

在本文中对十分钟平均的风、温、湿湍流脉动的原始资料又进行了一小时平均,得到了共 158 个时次(474 组)的湍流脉动资料。对不合乎分析要求的资料按下列原则进行了剔除

- (1)极不定常时(6—8 时, 19—21 时);
 - (2)非均匀情况下(风向在 360—310°, 220—170°, 110—0°);
 - (3)仪器故障(所有在原始记录中其值等于 99 的湍流脉动)。
- 通过以上有条件剔除,实际参加分析的湍流脉动资料为 192 组。

1. 准正态近似的验证

在图 1a、b、c 中分别给出了四阶矩 $\overline{w'^4}$, $\overline{u'^4}$, $\overline{\theta'^4}$ 与其相应的二阶矩 $\overline{w'^2}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{\theta'^2}$ 之间的关系;此外 $\overline{v'^4}$, $\overline{q'^4}$, 同 $\overline{v'^2}$, $\overline{q'^2}$ 的关系在此省略,图 1 所属各图均为双对数坐标,纵坐标为四阶矩,横坐标为二阶矩。图 1 表明,观测值在对数坐标中成线性分布,且离散很小,因此对四阶矩和相应的二阶矩均作对数变换后进行线性回归,得到其回归系数

图 1 四阶矩(a) $w^{(4)}$, (b) $u^{(4)}$, (c) $\theta^{(4)}$ 同其相应的二阶矩的相关性

B_0 , 常数项 A_0 , 相关系数, 剩余标准差和均方差。将这些量再转变回直角坐标在表 1 中给出, 图中实线是观测值的拟合曲线, 因此四阶矩与二阶矩的关系可表示为

$$\overline{x^{(4)}} = A_0 (\overline{x^{(2)}})^{B_0}, \quad (11)$$

其中 $\overline{x^{(4)}}$ 为四阶矩, $\overline{x^{(2)}}$ 为二阶矩。表 1 表明, 幂次项 B_0 都很接近不等式 (3) 中的对应常数 B (B 等于 2), 常数项 A_0 大都接近于不等式 (3) 中的对应常数 A (A 等于 3)。可见关系式 (11) 和 (3) 是很相近的。这说明对我们仅给出的实验资料而言, 准正态近似的实验结果同其理论假定基本一致。

表 1 四阶矩与二阶矩的经验关系常数

	A_0	B_0	相关系数	剩余标准差	均方差
$\overline{w^{(4)}} - \overline{w^{(2)}}$	3.5	1.92	0.996	0.029	0.093
$\overline{u^{(4)}} - \overline{u^{(2)}}$	3.0	1.90	0.990	0.054	0.80
$\overline{v^{(4)}} - \overline{v^{(2)}}$	3.3	1.90	0.993	0.045	0.910
$\overline{\theta^{(4)}} - \overline{\theta^{(2)}}$	2.7	1.90	0.979	0.042	0.026
$\overline{q^{(4)}} - \overline{q^{(2)}}$	3.3	1.93	0.952	0.067	0.073

2. 剪切近似的验证

我们首先求出了不等式 (8) — (10) 式右边的二阶矩的各种组合形式。在图 2、3、4、5 分别给出了三阶矩 $w^{(3)}$, $w^{(2)}\theta'$, $w^{(2)}q^{(2)}$ 和 $\theta^{(3)}$ 与其相应的二阶矩的组合 (按照不等式 (8) — (10) 之间的关系; 图 2—图 5 只给出了几个典型的图例。图 2—图 5 均为双对数坐标, 纵坐标表示三阶矩, 横坐标为二阶矩的组合 (按照不等式 (8) — (10) 右边组合)。图中实线为对角线, 点画线为观测值的临界值, 断线为拟合曲线。

由图 2—图 5 可看出:

(1) 所有观测值均在对角线右下方, 这与不等式 (8) — (10) 式完全吻合, 这说明剪切近似是一种合理的湍流近似。

(2) 除图 5 外, 图 2—图 4 中观测值不仅在对角线右下方, 而且在比此对角线更低的点画线右下方, 这意味着 (8)—(10) 式的剪切近似表达式可以进一步修正, 使其对三阶矩的剪切程度进一步加强。经修正的剪切近似的一般表达式可写为

$$|\overline{a'b'c'}| \leq \min \begin{cases} f_1 [\overline{a'^2} (\overline{b'^2} \overline{c'^2} + (\overline{b'c'})^2)]^{1/2}, \\ f_2 [\overline{b'^2} (\overline{a'^2} \overline{c'^2} + (\overline{a'c'})^2)]^{1/2}, \\ f_3 [\overline{c'^2} (\overline{a'^2} \overline{b'^2} + (\overline{a'b'})^2)]^{1/2}. \end{cases} \quad (12)$$

式中 f_1 、 f_2 、 f_3 这些修正系数我们称其为加强修正系数 (这些修正系数将在后面表 2 中给出)。

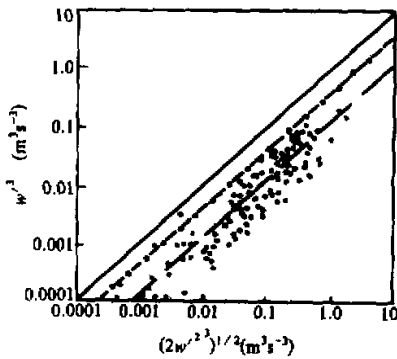


图 2 三阶矩 $\overline{w'^3}$ 与其相应的二阶矩组合的关系

(3) 观测值的离散较大, 但其拟合曲线基本反映了三阶矩湍流量与其相应的二阶矩组合的线性相关趋势及量级关系。如令 X 为三阶矩, Y 为二阶矩的组合, 它们的关系可以简单表示为 $X = KY$, K 为经验常数。

在表 2 中给出了大部分三阶矩与其相应的二阶矩组合的线性经验常数 K 和其均方差 δX 以及对剪切近似的加强修正系数 f 。表 2 中的统计结果表明: 如果三阶矩所对应的几个二阶矩的组合其对称性较好则所确定的经验常数和修正系数普遍较接近 (如象 $\overline{u'v'\theta'}$, $\overline{w'\theta'q'}$, $\overline{u'w'\theta'}$ 等), 否则其经验常数和修正系数均相差较大 (如象 $\overline{w'^2 v'}$, $\overline{u'^2 \theta'}$, $\overline{w'^2 \theta'}$ 等)。另外, $\overline{\theta'^3}$, $\overline{\theta'^2 q'}$, $\overline{\theta' q'^2}$, $\overline{q'^3}$ 等三

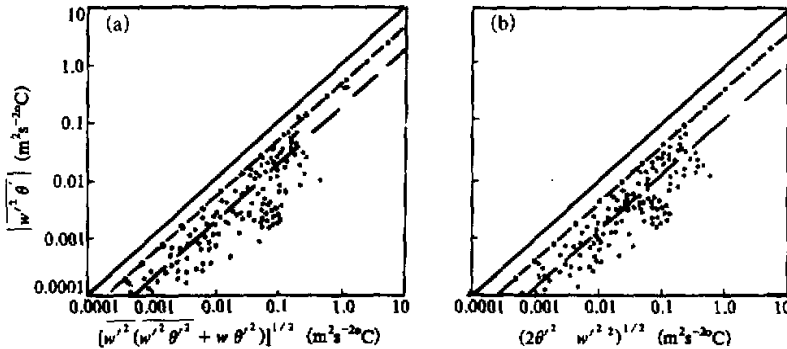


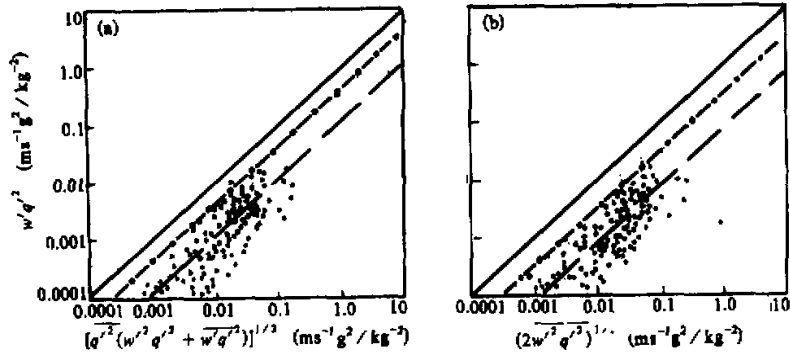
图 3 三阶矩 $\overline{w'^2 \theta'}$ 与其相应的二阶矩组合的关系

表 2 二阶矩的组合与三阶矩的线性经验常数和均方差及其对三阶矩的加强限定系数

三阶矩	二阶矩的组合	K	δx	f
$\overline{u'^2 w'}$	$(2\overline{w'^2 u'^2})^{1/2}$	0.07	0.0023	0.30
	$[\overline{u'^2}(\overline{w'^2} + (\overline{u'w'})^2)]^{1/2}$	0.08	0.0034	0.31
$\overline{w'^2 u'}$	$(2\overline{u'^2 w'^2})^{1/2}$	0.08	0.0039	0.20
	$[\overline{w'^2}(\overline{u'^2} + (\overline{u'w'})^2)]^{1/2}$	0.10	0.0039	0.50
$\overline{w'^3}$	$(2\overline{w'^2})^{1/2}$	0.05	0.0044	0.20
$\overline{u'^2 \theta'}$	$(2\overline{\theta'^2 u'^2})^{1/2}$	0.05	0.0055	0.20
	$[\overline{u'^2}(\overline{\theta'^2} + (\overline{u'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.10	0.0071	0.32
$\overline{u'w'\theta'}$	$[\overline{u'^2}(\overline{w'^2} + (\overline{w'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.07	0.0026	0.25
	$[\overline{w'^2}(\overline{u'^2} + (\overline{u'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.08	0.0025	0.29
	$[\overline{\theta'^2}(\overline{u'^2} + (\overline{u'w'})^2)]^{1/2}$	0.07	0.0027	0.27
$\overline{v'^2 \theta'}$	$(2\overline{\theta'^2 v'^2})^{1/2}$	0.11	0.0041	0.40
	$[\overline{v'^2}(\overline{\theta'^2} + (\overline{v'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.09	0.0042	0.32
$\overline{u'v'\theta'}$	$[\overline{u'^2}(\overline{v'^2} + (\overline{v'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.04	0.0037	0.24
	$[\overline{v'^2}(\overline{u'^2} + (\overline{u'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.04	0.0037	0.24
	$[\overline{\theta'^2}(\overline{u'^2} + (\overline{u'v'})^2)]^{1/2}$	0.04	0.0038	0.24
$\overline{w'^2 q'}$	$(2\overline{q'^2 w'^2})^{1/2}$	0.13	0.0048	0.50
	$[\overline{w'^2}(\overline{q'^2} + (\overline{w'q'})^2)]^{1/2}$	0.10	0.0045	0.04
$\overline{v'\theta'^2}$	$(2\overline{\theta'^2 v'^2})^{1/2}$	0.07	0.0018	0.34
	$[\overline{\theta'^2}(\overline{v'^2} + (\overline{v'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.11	0.0030	0.40
$\overline{\theta'^3}$	$(2\overline{\theta'^2})^{1/2}$	0.30	0.0077	1.0
$\overline{\theta q'^2}$	$[\overline{q'^2}(\overline{\theta'^2} + (\overline{\theta'q'})^2)]^{1/2}$	0.30	0.0043	1.0

表 2 (续)

三阶矩	二阶矩的组合	K	δx	f
$\overline{v'^2 w'}$	$(2\overline{w'^2} (\overline{v'^2})^2)^{1/2}$	0.07	0.0012	0.25
	$[\overline{v'^2} (\overline{v'^2} \overline{w'^2} + (\overline{v'w'})^2)]^{1/2}$	0.06	0.0014	0.25
$\overline{w'^2 v'}$	$(2\overline{v'^2} (\overline{w'^2})^2)^{1/2}$	0.07	0.0023	0.22
	$[\overline{w'^2} (\overline{w'^2} \overline{v'^2} + (\overline{v'w'})^2)]^{1/2}$	0.11	0.0023	0.42
$\overline{w'u'v'}$	$[\overline{u'^2} (\overline{v'^2} \overline{w'^2} + (\overline{v'w'})^2)]^{1/2}$	0.05	0.0077	0.11
	$[\overline{v'^2} (\overline{u'^2} \overline{w'^2} + (\overline{u'w'})^2)]^{1/2}$	0.05	0.0077	0.20
	$[\overline{w'^2} (\overline{u'^2} \overline{v'^2} + (\overline{u'v'})^2)]^{1/2}$	0.05	0.0077	0.18
$\overline{v'w'\theta'}$	$[\overline{v'^2} (\overline{w'^2} \overline{\theta'^2} + (\overline{w'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.03	0.0011	0.10
	$[\overline{w'^2} (\overline{v'^2} \overline{\theta'^2} + (\overline{v'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.03	0.0012	0.18
	$[\overline{\theta'^2} (\overline{v'^2} \overline{w'^2} + (\overline{v'w'})^2)]^{1/2}$	0.03	0.0012	0.20
$\overline{w'^2 \theta'}$	$(2\overline{\theta'^2} (\overline{w'^2})^2)^{1/2}$	0.20	0.0055	0.42
	$[\overline{w'^2} (\overline{\theta'^2} \overline{w'^2} + (\overline{w'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.10	0.0037	0.32
$\overline{w'\theta'q'}$	$[\overline{w'^2} (\overline{\theta'^2} \overline{q'^2} + (\overline{\theta'q'})^2)]^{1/2}$	0.10	0.0027	0.40
	$[\overline{\theta'^2} (\overline{w'^2} \overline{q'^2} + (\overline{w'q'})^2)]^{1/2}$	0.11	0.0027	0.40
	$[\overline{q'^2} (\overline{w'^2} \overline{\theta'^2} + (\overline{w'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.10	0.0028	0.38
$\overline{u'^2 \theta'}$	$(2\overline{u'^2} (\overline{\theta'^2})^2)^{1/2}$	0.10	0.0048	0.60
	$[\overline{\theta'^2} (\overline{u'^2} \overline{\theta'^2} + (\overline{u'\theta'})^2)]^{1/2}$	0.17	0.0055	0.65
$\overline{w'q'^2}$	$(2\overline{w'^2} (\overline{q'^2})^2)^{1/2}$	0.07	0.0024	0.30
	$[\overline{q'^2} (\overline{w'^2} \overline{q'^2} + (\overline{w'q'})^2)]^{1/2}$	0.11	0.0024	0.40
$\overline{\theta'^2 q'}$	$[\overline{\theta'^2} (\overline{\theta'^2} \overline{q'^2} + (\overline{\theta'q'})^2)]^{1/2}$	0.25	0.0040	1.0
$\overline{q'^3}$	$(2\overline{q'^2})^{1/2}$	0.40	0.0070	1.0

图 4 三阶矩 $\overline{w'q'^2}$ 与其相应的二阶矩组合的关系

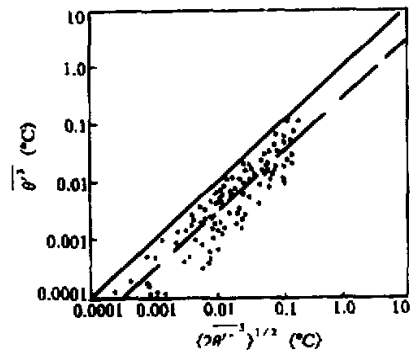
阶矩与其相应的二阶矩的组合的线性经验常数和修正系数都较大。这解释了 Andre 在文献[1]中提到的一种统计现象, 即在三阶矩闭合模式的运行过程中, 大多数三阶矩被剪切近似强迫限制的频率为 20% 左右, 而 $\overline{\theta'^3}$, $\overline{\theta'^2 q'}$, $\overline{\theta' q'^2}$, $\overline{q'^3}$ 等被强迫限制的频率却高达 60% 左右。

四、讨 论

准正态近似的理论假定与实验结果是相吻合的。但由于观测量有限, 无法做全面的实验验证, 有必要在今后作更进一步研究。

剪切近似在实验中是完全被满足的, 但它实际上放宽了对三阶矩的限制。因此采用加强修正后的剪切近似是必要的。当然这里给出的加强修正系数只是一个经验值, 需要更多的研究来更好地确定。

本文的研究给数值模式中长期使用的三阶闭合假定提供了一定的事实根据, 这将会对数值模拟的建立和推广提供有益的帮助。

图 5 三阶矩 $\overline{\theta'^3}$ 与其相应的二阶矩组合的关系

致 谢: 本文使用的资料均由 Hogstrom 教授提供, 并得到了他许多有益的提示, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Andre, J. C., G. D. Moor, et al., 1978, Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structure of the planetary boundary layer, *J. Atmos. Sci.*, 35, 1861—1883.

- [2] Andre, J. C., G. D. Moor, et al., 1976, Turbulent approximation for inhomogeneous flows: Part II: The numerical simulation of a penetrative convection experiment, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 482—491.
- [3] Andre, J. C., G. D. Moor, P. Lacarrere and R. du Vachat, 1976, Turbulent approximation for inhomogeneous flows: Part I The clipping approximation, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 476—481.
- [4] Andre, J. C., 1974, Irreversible interaction between cumulants in homogeneous isotropic, two-dimensional turbulence theory, *Phys. Fluids*, **17**, 15—21.
- [5] Hogstrom, U., 1988, Non-dimensional wind and temperature profile in the atmospheric surface layer. A re-evaluation, *Bound-Layer Meteor.*, **45**, 55—78.
- [6] Hogstrom, U., 1990, Analysis of turbulence structure in the surface layer with a modified similarity formulation near neutral condition, *American Met. Soc.*, **47**, 1949—1979.
- [7] Millionshchikov, M., 1941, On the theory of homogeneous and isotropic turbulence, *C. R. Acad. Sci. URSS*, **32**, 615—618.
- [8] Prandtl, L. and W. H. Reid, 1954, On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A247**, 163—189.
- [9] Tatsumi, T., 1957, The Theory of decay process of incompressible isotropic turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, **A239**, 16—45.
- [10] Orszag, S. A. and M. D. Kruskal, 1968, Formulation of the theory of turbulence, *Phys Fluids*, **11**, 43—60.
- [11] Blunck, J., 1970, Erude statistique d'un systeme fluid — application a la meteorologie, *La Meteorologie V.*, **15**, 15—78.

An Experiment Verification of the Quasi-Normal Approximation and Clipping Approximation

Zhang Qiang and Hu Yinqiao

(Lanzhou Institute of Plateau Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000)

Abstract

In this paper, the quasi-normal approximation of the fourth order moments and the clipping approximation of the third order moments are expounded and verified with the observed turbulence data in the surface layer. The results show that the fourth order moments can obey better the quasi-normal approximation, and the third order moment not only satisfies the clipping approximation, but also the enforcing realizability conditions for the clipping approximation. The enhanced modification coefficients are also determined from the data.

Key words: high moment; quasi-normal approximation; clipping approximation; enhanced modification coefficients.