第18卷 第4期　　大　气　科　学　　Vol. 18, No. 4
1994 年 7 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　July 1994

对称不稳定的非线性问题和对称型重力惯性波的非线性周期解

赵瑞星

(中国人民解放军总参谋部气象局，北京　100081)

提　要

本文利用密度的空间分布不均匀性引入非线性项，从准动量无辐散模式出发导出了一个自治的二阶非线性系统，应用这个系统讨论了非线性项对对称不稳定以及对称型重力惯性波非线性周期解的作用。从本系统的一次近似系统可得到类似 Hoskins 于 1974 年得到的结论，同样可导出对称不稳定的位涡判据。由于本系统是一有限次的非线性系统，故应用 Poincare 形式级数法可证明非线性周期解的存在性，并可求得周期解的一系列近似解。

关键词：对称不稳定；非线性；周期解；非绝热加热；Poincare 方法。

对称不稳定的研究从 50 年代业已开始[1]，只是 70 年代发现了中尺度对称不稳定扰动可能在组织、启动带状对流中有重要作用[2]后，才引起了人们极大的关注[3,4]。但过去多数的研究仅考虑线性情况，只有少数考虑了非线性的作用[5]。实际大气运动受完全的动力学方程控制。中尺度运动几乎是非地转、非静力平衡的运动，特别是线性模式得到的不稳定解是无限增长的，使得线性分析结论和实际相差甚远。因此，分析非线性系统是必要的。本文利用密度的空间分布不均匀性引起的非线性项，讨论了非线性项对对称不稳定及对稳定和不稳定平衡态附近解的特性的作用，同时，还讨论了非绝热加热（如凝结释放潜热）的作用。

一、基本方程及分析结果

在动量无辐散近似下，不考虑声波的影响时，对称型中尺度运动（$\partial / \partial x = 0$）方程可写成如下的形式：

1991 年 7 月 6 日收到，1992 年 6 月 10 日收到修改稿。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial t} + v'\dfrac{\partial u'}{\partial y} + w'\dfrac{\partial u'}{\partial z} + \bar{u}_z w' - f_a v = 0, \\ \dfrac{\partial v'}{\partial t} + v'\dfrac{\partial v'}{\partial y} + w'\dfrac{\partial v'}{\partial z} + fu' + \dfrac{1}{\bar{\rho}}\dfrac{\partial P'}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial w'}{\partial t} + v'\dfrac{\partial w'}{\partial y} + w'\dfrac{\partial w'}{\partial z} - \dfrac{g}{\theta_0}\theta' + \dfrac{1}{\bar{\rho}}\dfrac{\partial P'}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \theta'}{\partial t} + v'\dfrac{\partial \theta'}{\partial y} + w'\dfrac{\partial \theta'}{\partial z} - \dfrac{\theta_0}{g}M^2 v' + \dfrac{\theta_0}{g}N^2 w' = \dfrac{\theta_0}{g}\dot{Q}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}v') + \dfrac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho}w') = 0, \end{cases} \tag{1}$$

式中$f_a = f - \bar{u}_y$，$M^2 = -(g / \theta_0)\partial\bar{\theta} / \partial y \approx f\bar{u}_z$，$N^2 = (g / \theta_0)\partial\bar{\theta} / \partial z$，$\rho' = \bar{\rho}\theta' / \theta_0$，$\theta_0$为位温的特征值。令$(u, v, w, \theta) = \bar{\rho}(u', v', w', g\theta' / \theta_0)$，$P = p'$且$\bar{\rho} = \bar{\rho}(z)$，那么用类似文献[6]中的方法，可将方程组(1)化为如下单变量方程：

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} - 3\bar{\alpha}W\frac{dW}{d\xi} + \bar{\alpha}^2 W^3 + AW = \tilde{Q}, \tag{2}$$

式中$\tilde{Q} = l^2\dot{Q}\bar{\rho} / K^2$，$\xi = \tau / \sigma$，$A = [l^2 N^2 + \ln(f\bar{u}_z + M^2) + n^2 ff_a] / K^2$，$K^2 = l^2 + n^2$。在上式中令$B = \bar{\alpha}$，$W' = dW / d\xi = g$，可化为如下二阶方程：

$$\begin{cases} W' = g, \\ g' = -AW + 3BWg - B^2 W^3 + \tilde{Q}. \end{cases} \tag{3}$$

可见，当非绝热加热$\tilde{Q} = 0$时，系统(3)和文献[6]中曾讨论过的无基流垂直切变重力惯性波系统类似，所不同的是二次项的系数，两者的符号正好相反。因此，我们用类似文献[6]的分析方法可得到如下几点结论：

(1) 系统(3)有三个平衡点，分别是(0, 0)，$(\sqrt{-A} / B, 0)$和$(-\sqrt{-A} / B, 0)$。显然当$A > 0$时仅有一个有意义的平衡点(0, 0)。在不考虑非绝热加热时（$\tilde{Q} = 0$），由系统(3)的一次近似方程的特征方程

$$\lambda^2 + A = 0 \tag{4}$$

可知，$A > 0$时，系统(3)的零解不能由一次近似决定，因为此时平衡点(0,0)是系统(3)的一次近似方程的中心。当$A < 0$时，由(4)式知系统(3)的零解是不稳定的。$A < 0$时还存在另外两个有意义的平衡点。为了讨论这两个平衡点附近解的性质，作变换$W_1 = W \pm \sqrt{|A|} / B$，代入(3)式可得

$$\begin{cases} W'_1 = g, \\ g' = -2|A|W_1 \pm 3\sqrt{|A|}g + 3BW_1 g \pm 3B\sqrt{|A|}W_1^2 - B^2 W_1^3. \end{cases} \tag{5}$$

由常微分方程定性理论知，方程(5)的解可由其一次近似方程的解来描述其特征。(5)式的一次近似方程的特征方程为

$$\lambda(\lambda \pm 3\sqrt{|A|}) + 2|A| = 0. \tag{6}$$

显然特征方程的根均为实根，即两个非零平衡点也是不稳定平衡点。从方程(4)可知，系统(3)的一次近似方程是一线性方程，其零解的稳定性和 Hoskins[7]的结论相一致，当然由(4)式也可导出相应的位涡判据。从两个非零平衡点可以看到，如果$B\equiv 0$，即非线性项不存在时，$W_{2,3}\to\pm\infty$，这表明线性模式也存在三个有意义的平衡点（当$A<0$时），只不过除(0,0)点外的另两个平衡点在无穷远处而已。

由从上的分析可知，当$A>0$时不考虑非绝热加热的影响，系统(3)存在唯一的一个平衡点(0,0)，且是一次近似的中心，是否为系统(3)的中心还要由高次项来决定。$A<0$时，在同样的情况下，系统(3)存在三个有意义的平衡点，且都是不稳定的平衡点。这里的不稳定包括其解的增长（$\lambda>0$）和衰减（$\lambda<0$）。用势函数法可以看出三个平衡点附近解的增长或衰减是有规律的，两个非零平衡点附近解的增长或衰减是一致的，在(0,0)点附近解的增长或衰减和非零平衡点附近正好相反。由系统(3)在三个平衡点附近的一次近似方程的特征根知，特征根均存在两个值，这就是不稳定对称型重力惯性波的两支。由上述分析知三个平衡点分别是这两支不稳定波的初态和终态。这实际上给出了扰动增长的界限。因为W的扰动往往从(0,0)初态出发增长，按照上述结果，终态是有限值。这和实际大气中观测的垂直速度也只能增长到一个有限值是十分相似的。正好两个终态是上升运动和下沉运动的界限，如果是线性模式，这两个界线放宽到了$\pm\infty$，这和实际大气中的运动是不相符的。

(2) 我们考虑非绝热加热是垂直速度 w 的函数，设其为

$$\dot{Q}=k\alpha w,\quad \begin{cases}k=1, & w>0\\ k=0, & w<0\end{cases} \tag{7}$$

那么，$\tilde{Q}=k\tilde{\alpha}W$，其中$\tilde{\alpha}=\bar{\rho}l^2\alpha/K^2$。将$\tilde{Q}$代入系统(3)可得到

$$\begin{cases}W'=g,\\ g'=-\tilde{A}W+3BWg-B^2W^3,\end{cases} \tag{8}$$

式中$\tilde{A}=A-k\tilde{\alpha}$。显然，考虑这样的非绝热加热并不改变解在平衡点附近的结构，只是改变了产生不稳定的难易程度。由于通常情况下$\tilde{\alpha}>0$，所以从系统(8)看出，考虑这样的非绝热加热后，使得不稳定容易出现了（$\tilde{A}\leqslant A$），因此可以说非绝热加热有导致不稳定的作用。和系统(3)类似，系统(8)在$\tilde{A}>0$时，其平衡点(0,0)附近解的性质要由非线性项来决定。

(3) 由于考虑非绝热加热和不考虑非绝热加热有类似的形式，因此可用形如系统(8)的方程讨论周期解及其近似解。为了便于使用 Poincare 形式级数法[8]，作如下变换：

$$\begin{cases}W=x,\\ g=-\sqrt{A}\,y,\\ \tau_1=\sqrt{A}\,\xi.\end{cases} \tag{9}$$

得到系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x+3B/\sqrt{A}\,xy+B^2/Ax^3,\end{cases} \tag{10}$$

式中$\dot{x}=dx/d\tau_1$，$\dot{y}=dy/d\tau_1$。

类似文献[6]和[9]可得到$A>0$时，系统(10)的平衡点(0,0)仍为中心。即系统(8)或系统(3)在不考虑非绝热加热时的平衡点(0,0)仍为中心，也就是说在(0,0)点附近存在稳定的周期解。类似文献[6]也可得到上述系统的一系列近似周期解。

二、结 语

我们利用密度的空间分布不均匀性引入的非线性作用，导出了一个自治的二阶非线性系统。利用这个系统讨论了非线性项对对称不稳定以及对称型重力惯性波的作用。应用本系统的一次近似系统即可导出类似 Hoskins[7]得到的结论，同样可导出对称不稳定的位涡判据。由于一次近似系统难以处理平衡点为中心的情况，故讨论非线性作用是非常必要的。由于我们利用了密度空间分布的不均匀性（这种不均匀性是实际大气中客观存在的）导出了一个有限次的非线性系统，使得我们考虑非线性作用后该系统仍能被证明(0,0)点为中心，即零解是非线性系统的稳定周期解。考虑非绝热加热的作用后，系统的零解稳定性变得容易被破坏了。

通过分析我们看到，对称型重力惯性波只存在两种形式的解，一种是稳定的周期解及周期波动，另一种是不稳定的解。考虑非线性作用后，周期波动仍存在，而不稳定的解出现了上下界限，这和实际情况是相符的。在考虑非绝热加热的效应后，不稳定的解容易出现了。这表明对称型重力惯性波在潮湿易发生不稳定的地带易得到不稳定发展，如我国的梅雨锋附近有人认为存在不稳定发展的对称型重力惯性波。

参 考 文 献

[1] Kuo, H. L., 1954, Symmetric disturbance in a thin layer of fluid subject to a horizontal temperature gradient and rotation, *J. Meteor.*, **11**, 399–411.

[2] Bennetts, D. A., and B. J. Hoskins, 1979, Conditional symmetric instability——a possible explanation for frontal rainbands, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **105**, 945–962.

[3] Emanuel, K. A., 1979, Inertial instability and mesoscale convective systems. Part I: Linear theory of inertial instability in rotating viscous fluids, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 2425–2499.

[4] Kuo, H. L., and K. L. Seitter, 1985, Instability of shearing geostrophic currents in neutral and partly unstable atmospheres, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 331–345.

[5] Walton, I. C., 1975, The viscous nonlinear symmetric baroclinic instability of a zonal shear flow, *J. Fluid. Mech.*, **68**, 757–768.

[6] 赵瑞星, 1990, 层结大气中重力惯性波的非线性周期解, 气象学报, **48**, No.3, 275–283.

[7] Hoskins, B. J., 1974, The role of potential vorticity in symmetric stability and instability, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **100**, 480–482.

[8] 张锦炎, 1981, 常微分方程几何理论与分支问题, 北京大学出版社, 46–56.

[9] 赵瑞星, 1989, 一类特殊系统的非线性周期解, 中国科学技术大学研究生院学报, 1, 53–60.

The Nonlinear Problem of Symmetric Instability and the Periodic Solution of Symmetric Inertia–Gravitational Wave

Zhao Ruixing

(Meteorological Bureau, Headquarters of the General Staff, Chinese People's Liberation Army, Beijing 100081)

Abstract

In this paper, the nonlinear terms are introduced by means of the nonhomogeneous spatial distribution of density. An autonomous nonlinear system is derived from the moment nondivergent model. With this system we discuss the effect of nonlinear terms on the symmetric instability and symmetric periodic solution. The conclusion obtained from its first-order approximation system is similar to that proposed by Hoskins in 1974, and the potential vorticity criterion of symmetric instability is also obtained. By the Poincare series method, we prove the existence of the nonlinear periodic solution because this nonlinear system is a limited order one. A series of approximate periodic solutions are also obtained.

Key words: symmetric instability; nonlinear; periodic solution; Poincare series method; diabatic heating.

张宝堃同志逝世

中国共产党党员、我国气象学界著名的老前辈、杰出的气候学家、中国科学院大气物理研究所研究员张宝堃同志于 1994 年 3 月 6 日下午在北京逝世，享年 91 岁。

张宝堃先生 1903 年 2 月出生于浙江嘉兴塘汇镇，1926 年毕业于国立东南大学；1928 年进入国立中央研究院气象研究所，从师于著名气象学家竺可桢教授；1947 年 2 月至 1949 年 12 月赴美国哈佛大学和芝加哥大学深造，并在美国气象局研习；1950 年 3 月回国后就任中国科学院地球物理研究所研究员，并兼任军委气象局联合资料中心主任；1953 年中心任务圆满完成后，仍回地球物理研究所工作。1966 年大气物理研究所建立，就一直在该所工作。

张宝堃先生毕生致力于发展我国的气象事业，是新中国气象事业奠基人之一。他在气候学方面做出了杰出贡献。早在 1934 年，他首次对中国的四季划分提出科学的见解；之后，与竺可桢先生合作编著了《中国之雨量》和《中国之温度》；解放后，组织气象工作者，制订我国的气候区划和自然区划，于 1956 年首次编辑出版了《中国气候区划草案》和《中国自然区划草案》，从而奠定了我国气候区划和自然区划的基础。粉碎"四人帮"后，年事已高，专心收集大量气候资料，进行分析研究，并关心祖国气象事业的发展。

张宝堃先生对新旧社会有亲身体验，深感只有中国共产党才能救中国，坚持共产主义信仰，在他 80 高龄之年，加入中国共产党。多年来始终关心和参与社会活动，曾任中国科学院工会副主席，海淀区人大代表等。

（中国科学院大气物理研究所党群办公室）