

## 湿位涡方程及其应用\*

留小强

王田民

吴宝俊

胡圣昌

(江西省气象台, 南昌 330046)

(中国气象科学研究院, 北京 100081)

陈乾金

(国家气象中心, 北京 100081)

### 提 要

本文在湿绝热、无摩擦条件下, 推导了湿位涡方程及其近似表达式, 然后通过尺度分析得到了大尺度条件下湿位涡守恒的性质, 其形式与干位涡一样, 由于考虑了水汽的作用, 使用它较干位涡更为方便。最后, 我们把湿位涡用于江南岭北3月有无连阴雨的分析, 其结果与预报员经验是一致的。

关键词: 湿位涡; 湿绝热; 守恒性; 等熵分析。

### 一、前 言

位势涡度(简称位涡)综合反映了大气的热力性质和动力性质, 有着广泛的应用。例如, 解释气流过山形成的背风坡<sup>[1,2]</sup>, 研究季风气象学中的许多问题<sup>[3]</sup>, 作暴雨诊断分析<sup>[4]</sup>等。近年来, 雷雨顺提出了能量(湿静力能量)位涡概念<sup>[5]</sup>, 李丁民导出了能量位涡平衡方程, 并用于暴雨诊断分析<sup>[6]</sup>。Francis X. Crum等把等熵位涡用于阻塞形势的诊断分析以及气块轨迹的追踪——追踪阻塞高压的空气来源<sup>[7]</sup>。在实际大气中, 水汽所起的作用是不可忽视的。但上述工作, 除能量位涡外, 均没有考虑水汽的作用。本文试图从基本运动方程及热力学方程出发, 导出湿位涡方程及其守恒性, 最后再应用于江南岭北春季连阴雨天气的分析。

### 二、方程的导出及讨论

#### 1. 湿位涡方程

由 $z$ 坐标系的三维涡度矢量方程略去摩擦项得

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega}_a = (\vec{\omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} - (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{\omega}_a + \vec{N}, \quad (1)$$

1991年9月7日收到, 1992年7月30日收到修改稿。

\* 本文由“长江中下游连阴、连晴天气研究”课题及“国家气象局热带基金”资助。

其中 $\vec{\omega}_a$ 为三维绝对涡度矢量,  $\vec{N}$ 为力管项, 余为惯用符号。

将连续方程代入(1)式得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \right) = \left( \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{N}. \quad (2)$$

设气块在运动过程中是湿绝热的, 亦即

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_{sc} + \vec{V} \cdot \nabla \theta_{sc} = 0. \quad (3)$$

对(3)式施以梯度运算

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \theta_{sc} + \nabla (\vec{V} \cdot \nabla \theta_{sc}) = 0. \quad (4)$$

利用矢量的运算规则有

$$\nabla (\vec{V} \cdot \nabla \theta_{sc}) = (\vec{V} \cdot \nabla) \nabla \theta_{sc} + (\nabla \vec{V}) \cdot \nabla \theta_{sc}. \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式得

$$\frac{d}{dt} \nabla \theta_{sc} + (\nabla \vec{V}) \cdot \nabla \theta_{sc} = 0. \quad (6)$$

用 $\vec{\omega}_a / \rho$ 点乘(6)式各项

$$\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \theta_{sc} + \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot [(\nabla \vec{V}) \cdot \nabla \theta_{sc}] = 0. \quad (7)$$

用 $\nabla \theta_{sc}$ 点乘(2)式各项

$$\nabla \theta_{sc} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \right) = \nabla \theta_{sc} \cdot \left[ \left( \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{V} \right] + \frac{1}{\rho} \nabla \theta_{sc} \cdot \vec{N}. \quad (8)$$

将(7)式与(8)式合并

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \theta_{sc} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \theta_{sc} \cdot \vec{N}, \quad (9)$$

式中 $(\vec{\omega}_a / \rho) \cdot \nabla \theta_{sc}$ 定义为湿位涡, (9)式称为湿绝热、无摩擦的湿位涡方程式。

## 2. 近似表达式

利用 $\theta_{sc} \approx \theta e^{Lq/c_p T_k} \approx \theta e^{Lq/c_p T}$ 可得

$$\nabla \theta_{sc} \approx \frac{\theta_{sc}}{\theta} \nabla \theta + \theta_{sc} \nabla (Lq / c_p T), \quad (10)$$

其中 $T_k$ 为凝结高度温度。

考虑到 $q \approx 0.622e / P$ ,  $\vec{N} \cdot \nabla \theta = 0$ ,  $\vec{N} \cdot \nabla T = 0$ 和 $\vec{N} \cdot \nabla P = 0$ , 则有

$$\frac{1}{\rho} \vec{N} \cdot \theta_{se} \approx \frac{0.622 L \theta_{se}}{P \rho T c_p} \vec{N} \cdot e, \quad (11)$$

其中  $\vec{N} = -\nabla(1/\rho) \wedge \nabla P$ 。

将(11)式代入(9)式得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \theta_{se} \right) = \frac{0.622 L \theta_{se}}{P \rho T c_p} \vec{N} \cdot \nabla e. \quad (12)$$

(12)式即为湿绝热、无摩擦湿位涡方程的近似表达式。

### 3. 尺度分析和方程简化

Charney J.G. 为了研究大尺度动力学于 1948 年引进了尺度分析技巧, 之后分别为 Burger, A. (1958) 与 Green J.S.A. (1960) 所进一步发展, 现已成为一个系统的方法。用这个方法, 可以讨论方程各项的数量级, 对方程进行简化。下面我们也利用该方法对方程(12)进行简化。

将(12)式中各项展开并利用文献[1, 2]提供的天气尺度数量级代入, 可得展开方程各项的数量级。若略去其中数量级小于、等于  $10^{-15}$  的各项, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \theta_{se}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \theta_{se}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta_{se}}{\partial z} \right. \\ \left. + \frac{2\Omega \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \theta_{se}}{\partial y} + \frac{2\Omega \sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \theta_{se}}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

再用数量级代入可知  $(2\Omega \cos \varphi / \rho) \cdot (\partial \theta_{se} / \partial y)$  在量级上小于其它四项, 略去之则有

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \theta_{se}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \theta_{se}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta_{se}}{\partial z} + f \frac{\partial \theta_{se}}{\partial z} \right] = 0, \quad (14)$$

(14)式为  $z$  坐标系中的湿绝热、无摩擦湿位涡方程的简化形式, 亦称湿位涡守恒方程。

### 4. 湿等熵位涡守恒方程式

考虑到静力平衡条件后, 可以把(14)式转换到  $P$  坐标系。利用  $z$  坐标系和  $P$  坐标系导数的一般转换关系式得

$$\frac{d}{dt} \left\{ g \left[ \frac{\partial v}{\partial P} \left( \frac{\partial \theta_{se}}{\partial x} \right)_P - \frac{\partial u}{\partial P} \left( \frac{\partial \theta_{se}}{\partial y} \right)_P \right] - g \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_P - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_P + f \right] \frac{\partial \theta_{se}}{\partial P} \right\} = 0. \quad (15)$$

(15)式为  $P$  坐标系的湿位涡守恒方程式。由式中各项可以看出, 若引入  $\theta_{se}$  坐标系, 则方程可以简化。为此我们可将(15)式转换到  $\theta_{se}$  坐标系中。

所谓  $\theta_{se}$  坐标系, 是指以  $\theta_{se}$  为垂直变量的坐标系  $\{x, y, \theta_{se}, t\}$ 。当采用这种坐标系时, 应满足下列条件:  $\theta_{se}$  必须是高度  $z$  的单调函数, 即只能在  $N_m^2 > 0$  或  $< 0$  的层次中运用 ( $N_m^2 = g \partial \ln \theta_{se} / \partial z$ ,  $N_m$  为湿 Brunt - Vaisala 频率)。

在通常情况下, 或对大气的平均状态而言,  $N_m^2 < 0$ , 这时可直接进行坐标变换. 若在某种情况下,  $\theta_{sc}$  不是  $z$  的单调函数, 则可在  $N_m^2 = 0$  的高度上把大气分层, 然后分别在不同的单调区间上加以讨论.

为了讨论方便, 我们假定  $\theta_{sc}$  是  $z$  的单调函数, 利用  $z$  坐标系与  $\theta_{sc}$  坐标系导数的一般转换关系可将(15)式转换成

$$\frac{d}{dt} \left\{ -g \frac{\partial \theta_{sc}}{\partial P} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\theta_{sc}} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\theta_{sc}} + f \right] \right\} = 0. \quad (16)$$

(16)式为  $\theta_{sc}$  坐标系的湿位涡守恒方程式.

文献[7]给出了  $\theta$  坐标系中的等熵位涡 (干位涡)

$$(\text{IPV}) = \frac{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\theta} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\theta} + f}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta}}. \quad (17)$$

类似地我们可引入  $\theta_{sc}$  坐标系的湿等熵位涡

$$(\text{IPV})_m = \frac{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\theta_{sc}} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\theta_{sc}} + f}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta_{sc}}}. \quad (18)$$

将(18)式代入(16)式, 则有

$$\frac{d}{dt} [(\text{IPV})_m] = 0. \quad (19)$$

(19)式表明, 在湿绝热、无摩擦的情况下, 湿等熵位涡守恒.

### 三、湿等熵位涡的应用

#### 1. 湿等熵位涡方程的物理意义

展开(19)式得

$$\left[ \frac{\partial (\text{IPV})_m}{\partial t} \right]_{\theta_{sc}} = - \left\{ u \cdot \left[ \frac{\partial (\text{IPV})_m}{\partial x} \right]_{\theta_{sc}} + v \cdot \left[ \frac{\partial (\text{IPV})_m}{\partial y} \right]_{\theta_{sc}} \right\} - \dot{\theta}_{sc} \frac{\partial (\text{IPV})_m}{\partial \theta_{sc}}. \quad (20)$$

在不考虑摩擦和非绝热加热的情况下, 气块始终在等  $\theta_{sc}$  面上运动, 即  $\dot{\theta}_{sc} = d\theta_{sc}/dt = 0$ . 由此可知在  $\theta_{sc}$  坐标系中, 湿等熵位涡的局地变化完全由湿等熵位涡的平流项决定.

#### 2. 湿等熵位涡方程的应用

(a)由上面的讨论可知, 计算湿等熵位涡的局地变化相当方便, 只要分析出水平风场和湿等熵位涡的水平分布, 即可预测湿等熵位涡的局地变化, 从而诊断天气系统的演

变趋势。

(b) 利用湿等熵守恒性便于追踪气块轨迹。由于湿位涡考虑了水汽的作用, 因此当利用湿等熵位涡追踪气块的轨迹、判断气流的性质时, 不必象干等熵位涡那样<sup>[7]</sup>需要进行水汽凝结变化引起的轨迹修正。

(c) 由于位涡场综合反映了大气风场和质量场的综合特性, 所以在已知位涡分布并在特定的边界条件、某个参考态和平衡条件(如准地转)下, 就能由 Hoskins 的反演原理(the invertibility principle)决定风场和质量场<sup>[7]</sup>。这过程就象斜压波在正压流场的涡度场中求出风场那样。

### 3. 计算方法介绍

进行等熵位涡分析, 首先应选用适当的网格资料。这既可用现成的网格资料(例如 ECMWF 资料), 也可采用由自己分析得到的。若采用后者, 则需要选取适当的原始资料 and 一定的客观分析方法。所选的要素包括若干等压面的  $H$ ,  $T$ ,  $T_d$ ,  $u$ ,  $v$ , 并计算出相应的  $\theta_{se}$  分布。所选的资料范围依实际需要而定。

其次用  $\ln P$  线性内插及二分迭代法求出各等  $\theta_{se}$  面上的气压, 再用  $\ln P$  线性内插或  $\ln P$  线性内插与二分迭代法相结合求出各等  $\theta_{se}$  面上的  $u$ ,  $v$ ,  $H$ ,  $T$ ,  $T_d$ , 并用  $u$ ,  $v$  求出各等  $\theta_{se}$  面上的涡度, 然后可算出各等  $\theta_{se}$  面上的湿位涡(IPV)<sub>m</sub> 的分布。

利用上面所得的资料就可进行有关湿等熵位涡局地变化、平流等的进一步分析。

### 4. 示例: 江南岭北 3 月有无连阴雨湿等熵位涡特征

作为湿等熵位涡应用的一个示例, 我们选用了江南岭北地区(我国 25—35°N, 110°E 以东地区)有无连阴雨的月平均资料进行了计算。有无连阴雨个例见文献[8]。为了对比方便, 选用计算的年份为两个比较极端的个例(即 1980 年 3 月, 连阴雨累积日数达 29 天和 1983 年 3 月无连阴雨)。所用资料为 EC 12:00 时(世界时)的分析资料, 分辨率为  $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ , 层次为 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100 hPa, 计算范围为 0—150°E, 0—85°N, 采用球坐标系。基本等  $\theta_{se}$  面资料计算方法见文献[9]。在基本的等  $\theta_{se}$  面资料基础上, 先采用中央差(边界上采用前后差)计算出等  $\theta_{se}$  面上的相对涡度和  $\partial P / \partial \theta_{se}$ , 再计算出相应的湿位涡。

图 1、图 2 分别为 1980 年 3 月与 1983 年 3 月  $\theta_{se} = 316K$  湿等熵面上计算出的湿位涡分布图。为了突出湿等熵位涡分析的优点, 我们同时给出了两个相应时次的 500hPa 平均高度和高度距平图(图 3 和图 4)。

由图 1、图 2 可以看出: 虽然 1980 年 3 月与 1983 年 3 月在 70—90°E, 60°N 以北都是一位涡槽, 但 1980 年 3 月比 1983 年 3 月伸展得更偏北, 位涡槽更深、更明显。对平均状态而言, 在春季, 高纬地区  $\partial P / \partial \theta_{se} < 0$ , 所以 (IPV)<sub>m</sub> 低值区与常规天气图上的高压脊对应, (IPV)<sub>m</sub> 高值区与天气图上的低压或槽区对应。1980 年 3 月 70—90°E 附近处位涡槽较强, 表明了天气图上该地区高压脊较明显。而乌拉尔附近稳定高压脊是我国春季南方低温阴雨环流形势的特点之一<sup>[10]</sup>。也就是说, 春季连阴雨的形势特征在湿等熵位涡场上的表现是较明显的。

图 3、图 4 如仅从高度场上看, 乌拉尔附近两个年份的高压脊就没有湿等熵位涡那

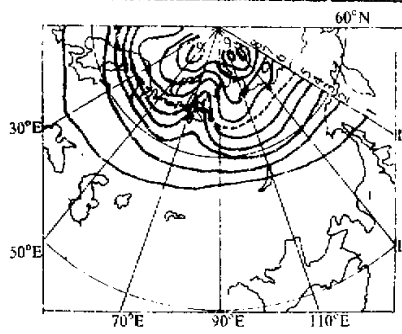


图 1 1980 年 3 月  $\theta_{se} = 316K$  等值面上的  
湿位涡(实线)分布图

单位:  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , 虚线为图 2  
中  $5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  等值线

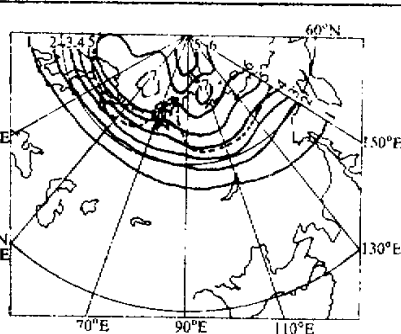


图 2 1983 年 3 月  $\theta_{se} = 316K$  等值面上  
的湿位涡(实线)分布图

单位:  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , 虚线为图 1  
中  $5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  等值线

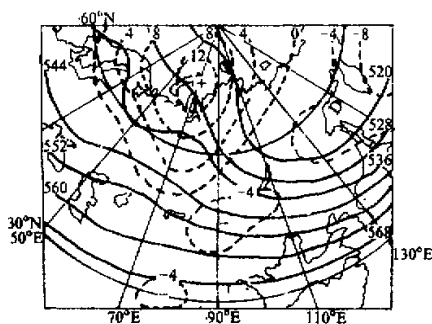


图 3 1980 年 3 月 500hPa 的平均高度  
(实线)分布图和高度距平(虚线)图

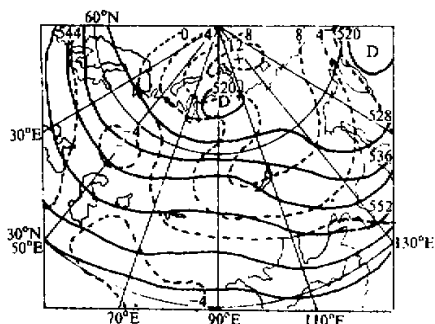


图 4 1983 年 3 月 500hPa 的平均高度  
(实线)分布图和高度距平(虚线)图

样对比明显,若再考虑距平场,则两张图的区别才显著起来,且表现的特征基本与湿等熵位涡场一致。

通过以上分析可以看出:湿等熵位涡分析在某种程度上优于平均高度场分析。要从平均场和距平场综合分析才能明显看出的特征,只要在某个等  $\theta_{se}$  面上分析湿位涡分布即可。

#### 四、小 结

本文推出的大尺度湿位涡方程及其守恒形式,可能对天气分析、预报有一定用途。其在  $\theta_{se}$  坐标系中的表达式,使用起来尤为方便。由于某些条件的限制,我们没有给出气块轨迹分析的示例,而仅仅给出了月平均湿等熵位涡分析应用的示例。例子中得出的结论仅供参考,有待于用更多例子验证。

## 参 考 文 献

- [1] 杨大升等, 1983, 动力气象学(修订本), 气象出版社, 183—184, 104—110.
- [2] Holton, James R., 1979, *An Introduction to Dynamic Meteorology* (Second Edition), Academic Press, 83—92, 35—38.
- [3] Yang Dasheng and T. N. Krishnamurti, 1981, Potential Vorticity of Monsoonal Low-level flows, *J. Atmos. Sci.*, 38, 676—2695.
- [4] 王永中, 杨大升, 1984, 暴雨和低层流场的位涡, 大气科学, 8(4), 411—417.
- [5] 雷雨顺, 1986, 能量天气学, 气象出版社, 16—19.
- [6] 李丁民, 1987, 能量位涡平衡方程及其在暴雨诊断分析中的应用, 高原气象, 6(3), 193—207.
- [7] Crum, Francis X. et al., 1988, A case study of atmospheric block using isentropic analysis, *Mon. Wea. Rev.*, 116, 223—241.
- [8] 傅焕宇等, 1989, 江南岭北 3 月连阴雨湿度条件, 气象, 15(10), 36—42.
- [9] 留小强等, 1990, 等熵客观分析方法及其应用, 气象, 16(2), 39—42.
- [10] 章基嘉, 葛玲, 1983, 中长期天气预报基础, 气象出版社, 198—201.

## The Wet Potential Vorticity Equation and its Application

Liu Xiaoqiang, Wang Tianmin

(Jiangxi Meteorological Station, Nanchang 330046)

Wu Baojun, Hu Shengchang

(Academy of Meteorological Science, Beijing 100081)

Chen Qianjin

(National Meteorological Center, Beijing 100081)

## Abstract

The wet potential vorticity equation and its approximate form are deduced on the conditions of wet adiabatic and frictionless. The characteristics of conservation of wet potential vorticity of large scale weather systems are obtained by means of the scale analysis. The conservation of wet potential vorticity is similar to that of dry potential vorticity. The wet potential vorticity includes the effects of water vapor. Therefore it is used more conveniently than the dry potential vorticity. Finally, the wet isentropic potential vorticity is applied in the analyses of the continuously rainy and fine weather in March in the area south to the Yangtze River and north to Nanling Mountains. The results are consistent with the experience of forecasters.

**Key words:** wet potential vorticity; wet adiabatic; conservation; isentropic analysis.