

自适应网格在大气海洋问题中的初步应用

刘 卓 曾庆存

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

提 要

自适应网格法是 80 年代兴起的通过求解椭圆型方程的边值问题来数值生成网格的一种新方法。它是在任意形状的区域上求偏微分方程的数值解的一种非常有效的工具。该方法抛弃了等距均匀的差分网格, 代之以能够自动地适应所研究问题中解的特征的疏密程度不均的曲线网格。如在边界上计算网格与实际边界相重合, 在区域内部可任意调节网格点的疏密程度等。本文扼要地介绍了自适应网格的原理及其构造方法。并将其应用于生成南海区域的计算网格以及数值预报台风路径的自适应网格。

关键词: 自适应网格; 南海区域网格; 台风路径预报网格。

一、引 言

在地球流体力学的数值计算中, 常常要求偏微分方程的数值解, 将偏微分方程离散为差分方程, 在离散的网格点上求解代数方程。用离散函数来逼近连续函数时, 首先需要将连续的计算区域剖分成离散的计算网格。如何选择计算网格, 将会对计算方法的特点造成深刻的影响。

在已有的许多模式的设计当中, 均采用等距的均匀网格进行离散、剖分。在等距均匀的差分网格上用有限差分方法进行计算。但是等距的差分网格有许多局限性, 它主要表现在以下几个方面:

当计算区域边界不是规则的形状时, 等距均匀的计算网格必然造成离散的计算区域边界与实际的区域边界不相吻合。因而在边值问题的计算中, 边界条件的处理不但需要使用复杂繁琐的插值公式, 而且也是造成计算误差的重要根源。同样, 对于微分系统在邻近边界的地方有很大的梯度的情况, 边界插值也会带来严重的误差, 甚至会根本改变解在边界附近的特性。在许多问题的研究中, 边界条件的准确与否决定了微分系统的解的主要特性。

采用传统的均匀网格进行离散的另一个缺陷是当所求物理量在计算区域中某一小部分区域内其尺度变化要小于网格的格距时, 计算将无分法辨出这一区域物理量的变化特性来。如采用缩小网格距的办法来克服以上缺陷, 则计算量将会大大的增加。以目前计算机的条件来看, 网格点不可能分得很细。此外, 对于所求物理量的梯度在某些区域很大的情况, 例如在台风中心附近, 气压梯度及速度的变化都十分剧烈, 如果网格距比较

粗, 则计算可能会产生紊乱。而在台风影响范围以外的广大区域, 各物理量的变化比较平缓, 没必要将网格点取得很密, 在整个区域内均匀的加密网格将是一种极大的浪费。

为了避免等距差分网格与边界不重合所带来的问题, 一般采用有限元方法。该方法采用与区域边界相吻合的计算网格进行剖分, 有效地提高了计算的精度。但是, 由于有限元方法需要每一步求解大型矩阵, 其计算量及存储量都比较大; 对于局部区域需要提高网格分辨率的问题, 目前采用比较多的是粗细网格搭配的嵌套网格技术。该方法虽然提高了网格的分辨率, 但在粗细网格交界的内边界上, 特别是流出处, 容易出现计算紊乱。

80 年代国际上兴起了用数值方法生成与区域边界相重合的计算网格的新方法, 称为数值网格构造法。该方法构造的网格坐标仍可采用有限差分法, 具有方法简单、计算量小的特点, 并且可局部区域加密网格, 因而越来越受到计算物理和计算数学界的重视。

数值网格构造法是一门既古老而又年轻的学科。其数学原理虽早已存在, 但将该原理应用于计算流体力学当中来却是近十几年来的事, 而其在计算地球流体力学中的应用则更少。至今, 人们对它的了解还很不够。本文的目的是介绍数值网格构造法中的一种——自适应网格生成法, 并将其应用于南海区域的计算网格以及数值预报台风路径的自适应网格的生成, 取得了良好的效果。

二、自适应网格的原理及其构造方法

自适应网格的构造原理是通过坐标变换将参数平面上的一个简单区域 (如矩形区域或多个矩形所组成的区域) 变换到物理平面上的计算区域, 使得矩形区域的边界与计算区域边界一一对应, 区域内部与内部相对应。这样一来, 有限差分方法可直接在参数平面上进行计算, 而无需考虑真实的区域边界的形状。即使当计算区域的边界是非常定的, 该坐标的应用仍使得计算在参数平面上的一个固定的等距、均匀的矩形网格系统上进行, 而其边界始终与真实的区域边界相重合。这样做大大地减化了计算, 使得边界上的值可直接用于网格点上, 而不需要任何形式上的插值, 从而可以准确地表达边界条件, 有效地克服了等距差分网格在边界上所带来的误差。

引入坐标变换使得计算网格与物理区域边界相重合的思想最早是由 Thompson 等人在 1974 年发表的关于边界拟合曲线坐标系 (Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate System) 的文章中阐述的^[1]。该文通过求解 Poisson 方程的边值问题

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \quad (1)$$

来生成适合于计算机翼绕流等问题的网格。其中, $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ 用于调整网格点的疏密程度。例如, 若想在某处 $\xi = \xi'$ 附近网格加密, 则 $P(\xi, \eta)$ 应满足 $P < 0$, 当 $\xi > \xi'$; $P > 0$, 当 $\xi < \xi'$, 因此 P 可取为

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^n a_i \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sign}(\xi - \xi_j) \exp(-d_j [(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2]^{1/2}).$$

其中, a_i, c_i 的选取使 $\xi = c$ 的线向线 $\xi = \xi_i$ 的线聚拢; b_j, d_j 的选取使得 $\xi = c$ 的线向点

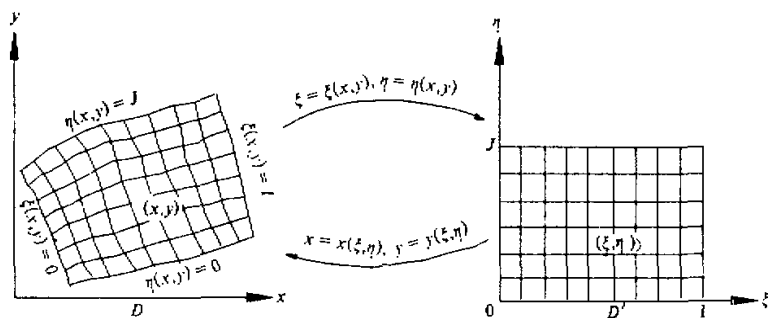


图 1 坐标变换示意

(ξ_i, η_j) 聚拢。 $Q(\xi, \eta)$ 具有类似的形式。

与变换方程(1)相对应的反变换为

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2(Px_{\xi} + Qx_{\eta}), \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta}), \end{cases} \quad (2)$$

其中, α, β, γ 是 x, y 对 ξ, η 的一阶导数的平方项, J 为坐标变换的 Jacobi 项: $J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$ 。

椭圆型方程生成网格法具有网格曲线光滑, 可调节区域内部网格点的疏密程度的优点。但如此生成的网格的正交性没有保障。在某些情况下, 有些网格 (在边界附近) 中网格线之间的夹角太小, 不适合计算要求。此外, $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ 是 ξ, η 的函数, 它只能确定 $\xi-\eta$ 平面上需要调整网格线或点的位置 (ξ, η) , 但这不是物理平面上的网格线或点的位置。因而, P, Q 的选取不能完全确定物理平面上需要调整网格线或点的位置。

1981 年, J. U. Brackbill 和 J. S. Saltzman 提出了自适应网格生成法^[2]。该方法利用变分原理推导出了满足某些网格曲线特性的坐标变换方程(椭圆型方程), 通过解椭圆型方程的边值问题来求得自适应网格坐标。该方法生成的网格具有以下几个特点:

- (1) 与真实的计算区域边界相适应, 即边界相重合。这样可减小由于网格点与区域边界不吻合所造成的边界误差。
- (2) 与物理量的空间分布相适应, 即可根据物理量的特性调节网格点的疏密程度。这样可以提高局部区域网格的分辨率, 以反映出尺度比较小的系统。同时, 在物理量变化剧烈的地方自动加密网格, 而在物理量变化较缓的地方网格相对粗一些。其目的在于在保持不增加计算量或少增加计算量的情况下, 提高计算精度以克服不稳定性。
- (3) 尽可能地保持网格曲线的光滑性。目的在于减小解在网格点上的截断误差。
- (4) 尽可能地保持网格曲线的正交性。这样就保证了网格曲线之间的夹角不会太小。
- (5) 网格随时间变的灵活性。在非常定解问题中, 系统将随时间而变, 物理量梯度大的地方随时间的不同其空间位置也不同, 这就要求有一个控制网格点密度的函数, 可灵活地调节网格点的疏密程度。
- (6) 有限差分法可直接在参数平面上的等距均匀的矩形网格上进行, 而不用考虑边

界的形状以及物理量的空间分布。

自适应网格生成法的主要思想就是采用变分原理,给出用来度量网格曲线某种性质的泛函,如网格曲线的整体光滑性和正交性以及网格点的疏密分布等,对泛函取极小值的解就是所要求的网格坐标。

首先,取度量网格整体光滑性的泛函为

$$I_s = \iint_D [(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2] dx dy = \iint_D (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2) dx dy,$$

由于

$$\xi_x = \frac{1}{J} y_\eta, \quad \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi, \quad \xi_y = -\frac{1}{J} x_\eta, \quad \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi,$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J d\xi d\eta,$$

所以在 ξ - η 平面上

$$I_s = \iint_D \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta. \quad (3)$$

在正交网格坐标系中, $\nabla \xi \cdot \nabla \eta = 0$, 因此很自然地取度量网格正交程度的泛函为

$$I_o = \iint_D (\nabla \xi \cdot \nabla \eta)^2 dx dy,$$

或面积加权的泛函为

$$I'_o = \iint_D (\nabla \xi \cdot \nabla \eta)^2 J^3 dx dy = \iint_D (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta. \quad (4)$$

取度量加权的面积泛函为

$$I_w = \iint_D W(x, y) J dx dy = \iint_D W J^2 d\xi d\eta, \quad (5)$$

当 $w(x, y)$ 给定时, 极小化 I_w 可以推出 $\nabla(WJ^2) = 0$ 。

由此可见, 在极小化 I_w 时 $WJ^2 = \text{常数}$ 。由于 J 为坐标变换的 Jacobi 项, 可表示为网格点的相对面积。所以, 可用 W 来控制网格点的疏密程度。例如, 在物理量变化剧烈的地方, 希望网格点密集一些, 可适当地将 W 取大一些; 反之, W 取小一些。因此, 权函数 $W(x, y)$ 就是调节网格点密度的控制函数。对于非常定问题, W 可以是时间的函数, $W = W(x, y, t)$ 。这就保证了网格点随时间变的灵活性。权函数 W 的选取形式可以是多种多样的, 例如 W 选为某个物理量 A 的梯度函数

$$W(x, y, t) = f(\nabla A(x, y, t)),$$

$f(z)$ 为 z 的单调递增函数, 可选 $f(z) = c_1 \sqrt{1 + c_2 z^2}$ ($c_1 > 0, c_2 > 0$) 等形式, 这样当 A 的梯度 ∇A 较大时, W 也增大, J 变小, 因而这部分区域的网格点比较密集。

到此, 我们得到三个泛函, 分别生成不同性质的三种曲线网格。由(3)生成了光滑的曲线网格, (4)可生成正交的曲线网格, 而(5)则生成可以任意地调节网格点疏密程度

的曲线网格。如果我们将这三个泛函加起来,

$$I = I_s + \lambda_w I_w + \lambda_o I_o, \quad (\lambda_w \geq 0, \lambda_o \geq 0),$$

于是得到一个新的泛函, 它既能调节网格点的疏密程度, 又能适当地保持网格的光滑性及正交性。 λ_w, λ_o 可根据具体问题加以选择, 当调节网格点的密度比较重要时, λ_w 取大一些; 当网格曲线之间的交角太小时, 可加大 λ_o 以改善网格曲线的正交性。

由量纲分析可知,

$$I_s \sim \left(\frac{N}{L}\right)^2 \cdot L^2, \quad I_o \sim \left(\frac{L}{N}\right)^2 \cdot L^2, \quad I_w \sim \overline{W} \left(\frac{L}{N}\right)^2 \cdot L^2,$$

其中, L 为特征长度, N 为特征网格点数, $\overline{W}$ 为 W 的全场平均。因此, λ_o 应是 $(N/L)^4$ 的倍数, λ_w 应是 $(N/L)^4 / \overline{W}$ 的倍数。一般取值范围为 0 至 10 倍。

极小化 I 就得到了自适应网格变换所满足的方程:

$$\begin{cases} b_1 x_{\xi\xi} + b_2 x_{\xi\eta} + b_3 x_{\eta\eta} + a_1 y_{\xi\xi} + a_2 y_{\xi\eta} + a_3 y_{\eta\eta} = -\lambda_w J^2 \frac{\partial W}{\partial x} \\ a_1 x_{\xi\xi} + a_2 x_{\xi\eta} + a_3 x_{\eta\eta} + c_1 y_{\xi\xi} + c_2 y_{\xi\eta} + c_3 y_{\eta\eta} = -\lambda_w J^2 \frac{\partial W}{\partial y}, \end{cases} \quad (6)$$

其中, a_i, b_i, c_i 是 x, y 对 ξ, η 的一阶导数的平方项。

可用迭代法(SOR)求解方程(6), 如果 $\xi-\eta$ 平面上的计算区域是矩形的话, 还可采用多重网格法来加速迭代的收敛, 多重网格法将另文介绍。

三、应 用

首先, 利用自适应网格在边界上与计算区域边界相重合的特点, 将其应用于南海区域的计算网格的生成。南海海域由于其海岸线非常复杂, 相应的组成计算区域边界的形状也很复杂。一般难于用等距的差分网格来刻画其边界。自适应网格坐标的应用成功地拟合了计算区域的边界曲线, 避免了边界误差。

由于南海区域的形状比较复杂, 将一个矩形区域变换到南海区域不太容易, 而且效果也不好。因此, 本文根据南海区域的形状, 设计了一个由多个矩形所组成的区域(见图 2), 将其变换到南海区域。变换 $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ 采用上节中的自适应网格法, 边界条件的对应关系以及生成的网格(如图 3)。变换中的参数 $\lambda_w = 5.0$, $\lambda_o = 1.0$, $W(x, y) \equiv 1$ 。

从图 3a 可以看出, 在南海区域的南边界加里曼丹

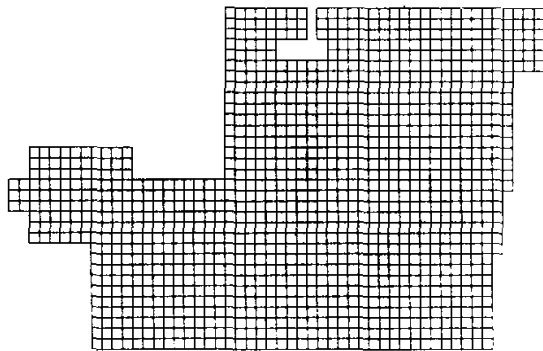


图 2 参数平面上的计算区域

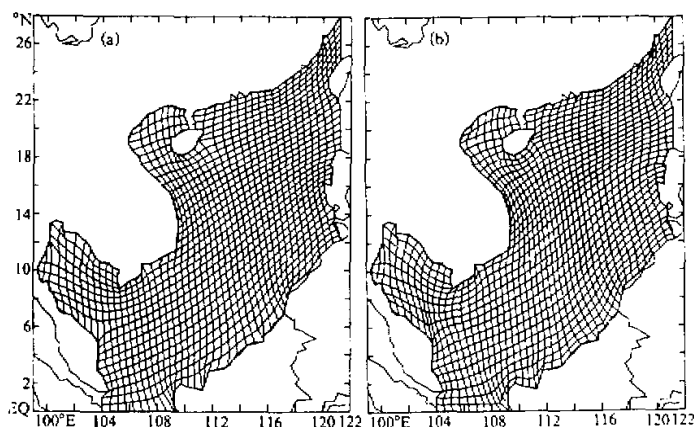


图 3 自适应网格法生成的网格

岛的附近, 网格点的分布远离海岸线, 造成该地区网格点比较稀疏。此外, 在海南岛的东南面以及马来半岛等地区也存在类似的情况, 这都是由于边界的特殊形状造成的, 可以通过调节面积权函数 $W(x,y)$ 来加以克服。

由上一节可知, 权函数 $W(x,y)$ 的作用是, 当某区域网格点需要加密时, $W(x,y)$ 在该区域就取大一些。在前面生成的网格的过程中, 参数 $W(x,y)$ 的选取恒为 1, 因此效果不理想。

现在, 我们通过调节权函数 $W(x,y)$, 使得生成的网格比较均匀。例如, 在加里曼丹岛的海岸线附近 $W(x,y)$ 取为 2, 在海南岛附近、马来半岛沿岸等需要加密网格点的地方, $W(x,y)$ 可根据网格点需加密的程度在 1 和 2 之间取值, 在不需要加密网格点的地方, $W(x,y)$ 一律取为 1。这样重新生成的网格具有网格点比较均匀的特点(见图 3b)。

利用这套网格, 本文计算了南海海流的月平均流。图 4 给出了冬季季风强迫下的南

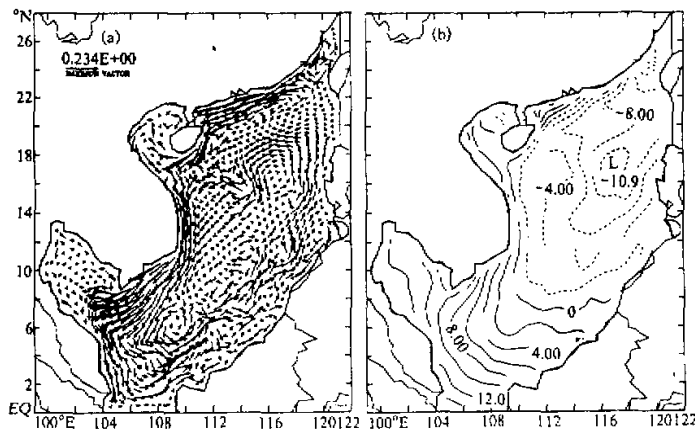


图 4 一月份月平均海流及海面起伏

海海流及海面起伏。从计算结果来看, 冬季南海区域的漂流总的形势与已有结果相吻合, 即整个南海区域由一大的气旋式环流所占据, 南部及北部又各有一中等尺度的气旋式环流^[7-9], “冬季南海暖流”^[10]也成功地模拟出来了。另外, 由于采用了与海岸线相重合的自适应网格坐标, 边界附近的流动基本上沿着海岸线流动, 因而更为合理。有关细节将另文介绍。

此外, 本文还利用自适应网格可在局部区域加密网格并且网格可随时间变的特点, 将其用于台风路径的数值预报。在台风路径的数值预报中遇到的一个问题就是在台风中心附近风速的变化及压力梯度都非常大, 在网格比较粗的情况下, 计算容易出现紊乱, 需要加密网格以提高其网格的分辨率。并且, 台风中心的位置是随时间变的。

图 5 给出了预报 7908 号台风路径的初始时刻的计算网格, 网格最密处是初始时刻台风中心的位置。决定网格疏密程度的权函数 $W(x, y, t)$ 由下式给出:

$$\begin{cases} W(x, y, t) = B e^{-\beta r^2}, \\ r^2 = [x - x_c(t)]^2 + [y - y_c(t)]^2, \end{cases} \quad (7)$$

$x_c(t), y_c(t)$ 为 t 时刻台风中心位置, B, β 为确定网格的参数, 分别取为 100 及 0.05, 确定自适应网格的另外两个参数 λ_w 和 λ_o 分别取为 0.03、0.01。由图可知: 自适应网格在台风中心附近比较密集, 从而提高了网格的分辨率; 同时, 由于网格是逐步加密的, 因而有效地避免了内边界的伪反射问题。

图 6 给出了预报 72 小时以后的计算网格以及预报的台风路径。由图可见: 自适应网格加密处是随着台风中心的移动而移动的。从而始终保持了台风中心附近网格的分辨率。计算表明, 3 天后台风环流结构仍清晰可见, 其预报路径与实况相比是令人鼓舞的。详细结果将另文介绍。

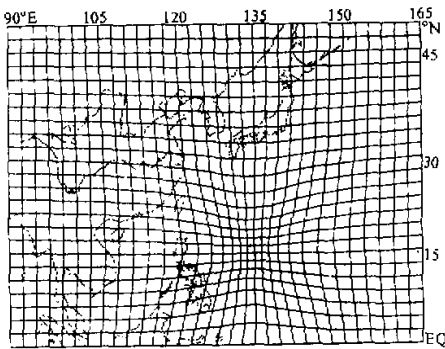


图 5 预报的初始时刻的计算网格
初始时刻的计算网格

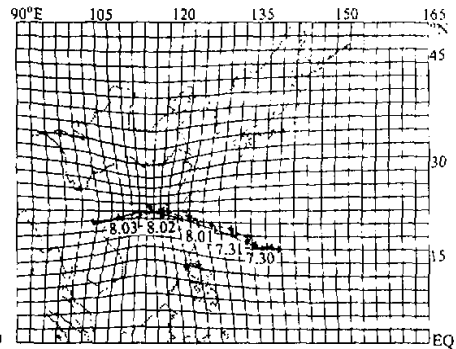


图 6 预报 72 小时以后的计算网格
实线代表观测的台风路径, 虚线为预报结果

四、小 结

本文针对等距均匀的差分网格的局限性, 提出了用与计算区域边界相重合的、疏密程度不均匀的曲线网格来代替等距差分网格的思想。扼要地介绍了自适应网格的原理及

其构造方法, 给出了自适应网格的坐标变换所满足的方程。该网格具有能够自动地适应计算区域的形状、适应物理量的空间分布状况及其随时间变化等特点, 可广泛地应用于河网计算、近岸海流计算、台风路径的数值预报、陡峭地形的研究、风暴潮的计算以及锋面、飑线的形成等等方面, 是研究具有复杂形状的区域计算问题、及大尺度与中小尺度系统并存问题非常有效的工具。

参 考 文 献

- [1] Thompson, Joe. F., Frank C. Thames, C. Wayne Mastin, 1974, Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate systems for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, *Journal of Computational Physics*, **15**, 229—319.
- [2] Brackbill, J. U., J. S. Saltzman, 1982, Adaptive zoning for singular problems in two dimensions, *Journal of Computational Physics*, **46**, 342—368.
- [3] 刘卓, 1992, 自适应网格及其在南海海流计算中的应用, 海洋环流研讨会论文集, 海洋出版社, 242—251.
- [4] Thompson, Joe. F. Thompson, Zahir U. A. Warsi, 1982, Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations — a review, *Journal of Computational Physics*, **47**, 1—108.
- [5] Thompson, Joe. F. (eds.), 1982, *Numerical Grid Generation*, North-Holland.
- [6] Thompson, Joe. F., Z. U. A. Warsi, C. Wayne Mastin, 1985, *Numerical Grid Generation—Foundations and Applications*, North-Holland.
- [7] 曾庆存、李荣凤、季仲贞、甘子钧、柯佩辉, 1989, 南海月平均流的计算, *大气科学*, **13**, No.2, 127—138.
- [8] 徐锡桢、邱章、陈惠昌, 1980, 南海水平环流概述, 中国海洋湖沼学会水文气象学会学术会议论文集, 137—145.
- [9] 王佳, 1985, 南中国海定常环流的一种模型, *山东海洋学院学报*, **15**, No.3, 22—31.
- [10] 管秉贤, 1978, 南海暖流—广东外海一支冬季逆风流动的海流, *海洋与湖沼*, **9**, No.2, 117—127.

The Preliminary Application of Adaptive Mesh in the Problems of Atmosphere and Ocean

Liu Zhuo and Zeng Qingcun

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

Adaptive mesh method which raises in 80's is a new method to numerical generate grid by solving a boundary value problem of elliptic equation. It is a very efficient tool to numerical calculate partial differential equations on any shape of domain. Instead of uniformly equidistant difference scheme, it uses nonuniformly curvilinear coordinate system which can automatically adapts the features of the solution, e.g., the calculation grid points at boundary are coincident with actual boundary, and the density of grid points can be adjusted in any subregion and etc. The principle of adaptive mesh and its generation method were introduced in this paper, and applied it to the generation of the computational mesh on the region of South China Sea and the adaptive mesh for the numerical forecasting of typhoon track.

Key words: adaptive mesh; computational mesh on South China Sea; adaptive mesh for typhoon track prediction.