

# 海气耦合非线性随机模式求解探讨

唐佑民

(成都气象学院, 成都 610041)

## 提 要

本文首先对一个假定随机强迫为高斯白噪声的四次方非线性海气耦合随机模式进行了 $\varepsilon$ 一阶近似的摄动处理, 将非线性随机模式化为显含随机项的线性系统和隐含随机项的非线性系统, 通过对输出响应的分析表明: 该模式结构和随机项的特性使得随机强迫输出的响应只能通过模式的线性区; 非线性项仅对气候系统的方差及其对应的频谱有一定的偏差作用, 而对一般输出特性没有贡献。在这基础上, 求出了模式输出谱, 并给出了计算。

**关键词:** 海气耦合; 非线性; 随机模式; 摄动分析。

## 一、引 言

考虑海气相互作用, 从全球能量平衡角度出发, 可得一个二阶非线性随机微分方程描述的气候模式<sup>[1]</sup>。对此模式, 以前的分析是对非线性项作泰勒展开, 略去一次以上高阶项的一般线性化处理<sup>[2,3]</sup>。这样求解虽简单, 也能揭示模式一些物理属性, 然因模式描述的气候量变化范围可在冰期、间冰期之间, 很难满足泰勒展开理论要求的展开区间很小的限制。因此, 理论上应有较大的误差, 但事实上, 这种处理所得的解在定性上却能与实测结果相当一致, 定量误差也不明显<sup>[3]</sup>。什么原因使得如此? 非线性项的线性化能对模式解的性态有何影响, 能产生多大的定量偏差? 有否必要对非线性项进行更复杂、精细的处理? 为此, 本文通过对其随机模式非线性项的摄动法处理, 分析、探讨了这些问题, 为模式进一步分析奠定了一定的数学基础。

## 二、海气耦合随机模式与摄动法求解

考虑海面与大气的热交换, 忽略平流和扩散作用, 以 $T_S$ 代表海温,  $T$ 为气温, 则全球海气耦合能量平衡模式为

$$\begin{cases} C \cdot h \frac{dT_S}{dt} = H_S^w + H_L^w + H_R^w \\ CH \frac{dT}{dt} = H_S + H_L + H_R \end{cases} \quad (1)$$

式中 $H_L^w + H_S^w$ 与 $H_L + H_S$ 分别为海洋大气的感热、潜热输送, 在全球平均时, 应有

1991年3月18日收到, 1992年11月10日收到再改稿。

$H_S^w + H_L^w + H_S + H_L = 0$ .  $H_R^w$ 、 $H_R$  是海洋与大气的净辐射平衡。

采用文献[1]提供的参数化公式

$$\begin{aligned} H_S + H_L^w &= c_H(1+B)\rho c_p(T-T_S)|V|, \\ H_S + H_L &= c_H(1+B)\rho c_p(T_S-T)|V|, \\ H_R^w &= \frac{1}{4}\mu Q(1-\alpha^w) - e^w\sigma T_S^4, \quad \alpha^w = a^w - b^w T_s, \\ H_R &= \frac{1}{4}\mu Q(1-\alpha) - e\sigma T^4, \quad \alpha = a - bT, \end{aligned}$$

上式各符号物理意义同文献[1]。

把各项参数代入 (1) 式有

$$\begin{cases} C^* h \frac{dT_S}{dt} = c_H(1+B)\rho c_p|V|(T-T_S) + \frac{1}{4}\mu Q(1-\alpha^w) - e^w\sigma T_S^4, \\ HC \frac{dT}{dt} = -c_H(1+B)\rho c_p|V|(T-T_S) + \frac{1}{4}\mu Q(1-\alpha) - e\sigma T^4. \end{cases} \quad (2)$$

为进行摄动求解, 对方程 (2) 进行无量纲化。令

$$\begin{aligned} T_S &= \tilde{T}_S T_S^{(0)}, \quad T = \tilde{T} T^{(0)}, \quad t = \tilde{t} \tau, \\ (T - T_S) &= \Delta \tilde{T}_S (T^{(0)} - T_S^{(0)}). \end{aligned}$$

$\tilde{T}_S$ 、 $\tilde{T}$  分别为海洋和大气的特征温度,  $\Delta \tilde{T}_S$  为海洋和大气温差特征值, 单位均为 K 氏度。 $\tilde{t}$  为特征时间, 单位为 s。 $T_S^{(0)}$ 、 $T^{(0)}$ 、 $\tau$ 、 $(T^{(0)} - T_S^{(0)})$  分别为各特征值对应的无量纲数, 则

$$\begin{cases} \frac{dT_S^{(0)}}{dt} = \frac{1}{C^* h} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}_S} [c_H(1+B)\rho c_p|V|\Delta \tilde{T}_S (T^{(0)} - T_S^{(0)}) \\ \quad + \frac{1}{4}\mu Q(1-a^w) + \frac{1}{4}\mu Q b^w \tilde{T}_S T_S^{(0)} - e^w\sigma \tilde{T}_S^4 T_S^{(0)*}] \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{CH} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} [-c_H(1+B)\rho c_p|V|\Delta \tilde{T} (T^{(0)} - T_S^{(0)}) \\ \quad + \frac{1}{4}\mu Q(1-a) + \frac{1}{4}\mu Q b \tilde{T} T^{(0)} - e\sigma \tilde{T}^4 T^{(0)*}] \end{cases} \quad (3)$$

(3) 式即为无量纲方程。摄动求解之前, 应先讨论各项无量纲尺度。由文献[2]参数化方案, 经尺度量级分析表明, 方程 (3) 非线性项无量纲系数是比右端其它各项小一个量级的无量纲小参数, 不妨令为  $\epsilon$ 。又设

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \frac{1}{C^* h} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}_S} [c_H(1+B)\rho c_p|V|\Delta \tilde{T}_S], \quad \lambda_{12} = \frac{1}{C^* h} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}_S} [\frac{1}{4}\mu Q(1-a^w)], \\ \lambda_{13} &= \frac{1}{C^* h} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}_S} [\frac{1}{4}\mu Q b^w \tilde{T}_S], \quad \lambda_{21} = \frac{1}{CH} \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}} [-c_H(1+B)\rho c_p|V|\Delta \tilde{T}], \end{aligned}$$

$$\lambda_{22} = \frac{1}{CH} \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}} \left[ \frac{1}{4} \mu Q (1-a) \right], \quad \lambda_{23} = \frac{1}{CH} \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}} \left[ \frac{1}{4} \mu Q b \tilde{T} \right],$$

则 (3) 式变为

$$\begin{cases} \frac{dT_S^{(0)}}{d\tau} = \lambda_{11}(T^{(0)} - T_S^{(0)}) + \lambda_{12} + \lambda_{13} T_S^{(0)} - \varepsilon T_S^{4(0)}, \\ \frac{dT^{(0)}}{d\tau} = \lambda_{21}(T^{(0)} - T_S^{(0)}) + \lambda_{22} + \lambda_{23} T^{(0)} - \varepsilon T^{4(0)}. \end{cases} \quad (4)$$

考虑天气快变量对海洋与大气的随机强迫作用  $W_1(t)$ 、 $W_2(t)$ ，并视为高斯白噪声过程，则相应的无量纲随机模式为

$$\begin{cases} \frac{dT_S^{(0)}}{d\tau} = \lambda_{11}(T^{(0)} - T_S^{(0)}) + \lambda_{12} + \lambda_{13} T_S^{(0)} - \varepsilon T_S^{4(0)} + W_2(t) \\ \frac{dT^{(0)}}{d\tau} = \lambda_{21}(T^{(0)} - T_S^{(0)}) + \lambda_{22} + \lambda_{23} T^{(0)} - \varepsilon T^{4(0)} + W_1(t) \end{cases} \quad (5)$$

(5) 式为非线性的，在应用随机摄动求解之前，我们对上式作必要的数学处理。

不妨设 (4) 式的气候系统平衡态为  $(T_e, T_{se})$ ，对 (5) 式进行坐标平移： $T^{(0)} = T_e + T'$ ， $T_S^{(0)} = T_{se} + T_{S'}$ ，对平移化简后的方程，设  $T' = T_0 + \varepsilon T_1'$ ， $T_{S'} = T_{S0}' + \varepsilon T_{S1}'$  进行小参数展开，对展开后的方程，根据  $\varepsilon$  同次幂系数为零的摄动原则，最后化简有

$$\varepsilon^0: \quad \begin{cases} \dot{T}_0' = \lambda_{21}(T_0' - T_{S0}') + \lambda_{23} T_0' + W_1(t), \\ \dot{T}_{S0}' = \lambda_{11}(T_0' - T_{S0}') + \lambda_{13} T_{S0}' + W_2(t); \end{cases} \quad (6)$$

$$\varepsilon^1: \quad \begin{cases} \dot{T}_1' = \lambda_{21}(T_1' - T_{S1}') + \lambda_{23} T_1' - T_0'^4 \\ \quad - 6T_0'^2 T_e^2 - 4T_0'^3 T_e - 4T_0' T_e^3, \\ \dot{T}_{S1}' = \lambda_{11}(T_1' - T_{S1}') + \lambda_{13} T_{S1}' - T_{S0}'^4 \\ \quad - 6T_{S0}'^2 T_{se}^2 - 4T_{S0}'^3 T_{se} - 4T_{S0}' T_{se}^3. \end{cases} \quad (7)$$

把 (6)、(7) 两式化为气温的单一方程，并记  $\alpha = \lambda_{13} - \lambda_{11}$ ， $\beta = \lambda_{21} + \lambda_{23}$ ， $\gamma = \lambda_{21} \lambda_{11}$ ，则有

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{T}_0' - (\alpha + \beta) \dot{T}_0' + (\alpha\beta + \gamma) T_0' = \bar{W}(t); \quad (8)$$

$$\varepsilon^1: \quad \begin{aligned} \ddot{T}_1' - (\alpha + \beta) \dot{T}_1' + (\alpha\beta + \gamma) T_1' = & \alpha(T_0'^4 + 6T_0'^2 T_e^2 + 4T_0'^3 T_e + 4T_0' T_e^3) \\ & + \lambda_{21}(T_{S0}'^4 + 6T_{S0}'^2 T_{se}^2 + 4T_{se} T_{S0}'^3 + 4T_{S0}' T_{se}^3) \\ & - (4T_0'^3 + 12T_0' T_e^2 + 12T_0'^2 T_e + 4T_e^3) \dot{T}_0'. \end{aligned} \quad (9)$$

(8)、(9) 两式的解可表示为下列形式<sup>[4]</sup>：

$$T_0'(t) = \int_0^\infty h(\tau) \bar{w}(t-\tau) d\tau, \quad (\tau < 0 \text{ 时}, h(\tau) = 0)$$

$$T_1'(t) = \int_0^\infty h(\tau)(\alpha A_0 + \lambda_{21} B_0 - C_0 \dot{T}_0') d\tau,$$

其中  $A_0$ 、 $B_0$ 、 $C_0$  分别为 (9) 式右端各括号项。

由 (6) 式又得  $T_{S0}'$  方程

$$\ddot{T}_{S0}' - (\alpha + \beta)\dot{T}_{S0}' + (\alpha\beta + \gamma)T_{S0}' = \bar{w}_1(t), \quad (10)$$

式中

$$\bar{w}_1(t) = \dot{w}_2(t) + \lambda_{11}w_1(t) + (\lambda_{21} + \lambda_{23})w_2(t).$$

同样  $T_{S0}'$  可写成

$$T_{S0}'(t) = \int_0^\infty h_1(\tau)\bar{w}_1(t-\tau)d\tau.$$

$T_0'(t)$ 、 $T_1'(t)$ 、 $T_{S0}'(t)$  表达式中的  $h(\tau)$  和  $h_1(\tau)$  是脉冲响应函数, 分别由 (8) 式和 (10) 式来求得。比较两式可知当令两式右端随机项均为单位脉冲函数  $\delta(t-\tau)$  时, 它们的等效方程是相同的, 即统一可写成<sup>[5]</sup>

$$\begin{cases} h''(t) - (\alpha + \beta)h'(t) + (\alpha\beta + \gamma)h(t) = 0, \\ h(0) = 0, \quad h'(0) = 1. \end{cases} \quad (11)$$

因此  $h(t) = h_1(t)$ 。

由  $T' = T_0' + \varepsilon T_1'$ 、 $T_S' = T_{S0}' + \varepsilon T_{S1}'$  以及  $T_0'$ 、 $T_{S0}'$ 、 $T_1'$  的解可得模式 (5) 在  $\varepsilon$  一阶时气温  $T'$  的输出响应统计量

$$\begin{aligned} E[T'(t)] &= E[T_0'(t)] + \varepsilon E[T_1'(t)] \\ &= \int_0^\infty h(\tau)E[\bar{w}(t-\tau)]d\tau + \varepsilon \int_0^\infty h(\tau)E[\alpha A_0 + \lambda_{21} B_0 - C_0 \dot{T}_0']d\tau. \end{aligned}$$

从  $\bar{w}(t)$ 、 $\bar{w}_1(t)$  与  $w_1(t)$ 、 $w_2(t)$  的关系看出, 他们描述的是一定常线性系统, 因此,  $\bar{w}(t)$ 、 $\bar{w}_1(t)$  也是一高斯白噪声。所以,

$$E[T'(t)] = \varepsilon \alpha \int_0^\infty h(\tau)E(A_0)d\tau + \varepsilon \lambda_{21} \int_0^\infty h(\tau)E(B_0)d\tau - \varepsilon \int_0^\infty h(\tau)E(C_0 \dot{T}_0')d\tau.$$

对右端各项积分运算有

$$E[T'(t)] = \frac{3\varepsilon}{\alpha + \beta} \{ \alpha [\varphi_{T_0}'(0) + 2T_c^2 \varphi_{T_0}'(0)] + \lambda_{21} [\varphi_{T_{S0}}^2(0) + 2T_{se}^2 \varphi_{T_{S0}}(0)] \},$$

$\varphi_{T_0}'(0)$  与  $\varphi_{T_{S0}}(0)$  分别表示气温和海温  $\varepsilon^{(0)}$  阶方差,

$$\varphi_{T_0}'(0) = E[T_0'^2(t)] \quad \varphi_{T_{S0}}(0) = E[T_{S0}'^2(t)].$$

间隔为  $u$  的响应自相关函数为

$$E[T'(t)T'(t+u)] = E[T_0'(t)T_0'(t+u)] + \varepsilon \{ E[T_1'(t)T_0'(t+u)]$$

$$+ E[T_0'(t)T_1'(t+u)]];$$

或写为

$$\begin{aligned} R_{T'T'}(u) &= R_{T_0'T_0'}(u) + \varepsilon[R_{T_1'T_0'}(u) + R_{T_0'T_1'}(u)] \\ R_{T_0'T_1'}(u) &= E[T_0'(t)T_1'(t+u)] \\ &= E\left[\int_0^\infty h(\tau_1)\bar{w}(t-\tau_1)d\tau_1 \cdot \int_0^\infty h(\tau)(\alpha A_0 + \lambda_{21}B_0 - C_0\dot{T}_0')d\tau\right]. \end{aligned}$$

对上式积分化简有

$$\begin{aligned} R_{T_0'T_1'}(u) &= 4\alpha T_e [3\varphi_{T_0'}(0) + T_e^2] \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1)h(\tau_2)\varphi_{\bar{w}\bar{w}}(-u-\tau_1+\tau_2+\tau)d\tau d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad + 4\lambda_{21} T_{se} [3\varphi_{T_{se}'}(0) + T_{se}^2] \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1)h(\tau_2)\varphi_{\bar{w}_1\bar{w}_1}(-u-\tau_1 \\ &\quad + \tau_2+\tau)d\tau d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $\varphi_{\bar{w}\bar{w}}(\cdot)$  与  $\varphi_{\bar{w}_1\bar{w}_1}(\cdot)$  是随机项  $\bar{w}(t)$ 、 $\bar{w}_1(t)$  的自相关函数。由高斯白噪声  $\bar{w}(t)$ 、 $\bar{w}_1(t)$  性质

$$\varphi_{\bar{w}\bar{w}}(-u-\tau_1+\tau_2+\tau) = \begin{cases} \varphi_{\bar{w}\bar{w}}(0), & -u-\tau_1+\tau_2+\tau=0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因此, (i) 当  $-u-\tau_1+\tau_2+\tau=0$  时, 利用脉冲响应函数<sup>[7]</sup>

$$h(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\gamma - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}}} \exp\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\tau\right) \sin\sqrt{\gamma - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}}\tau$$

和积分公式<sup>[8]</sup>

$$\int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^\infty h(\tau)d\tau \int_0^\infty h(\tau_1)d\tau_1 \int_0^\infty h(\tau_2)d\tau_2$$

化简 (12) 式有

$$\begin{aligned} R_{T_0'T_1'}(u) &= 4T_e \alpha [3\varphi_{T_0'}(0) + T_e^2] \varphi_{\bar{w}\bar{w}}(0) \frac{1}{(\gamma + \alpha\beta)^3} \\ &\quad + 4T_{se} \lambda_{21} (3\varphi_{T_{se}'}(0) + T_{se}^2) \varphi_{\bar{w}_1\bar{w}_1}(0) \frac{1}{(\gamma + \alpha\beta)^3}. \end{aligned} \quad (13)$$

(ii) 当  $-u-\tau_1+\tau_2+\tau \neq 0$  时,

$$R_{T_0'T_1'}(u) = 0. \quad (14)$$

同理可求出  $R_{T_1'T_0'}(u) = R_{T_0'T_1'}(u)$ 。

不妨令 (13) 式右端项为  $a$ , 则

$$R_{TT'}(u) = \begin{cases} R_{T_0'T_0'}(u) + 2\epsilon a, & -u - \tau_1 + \tau_2 + \tau = 0, \\ R_{T_0'T_0'}(u), & \text{其他.} \end{cases} \quad (15)$$

无论在 (13) 式或 (14)、(15) 式, 实际上都与  $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 、 $\tau$  无关, 为讨论简便, 不妨令  $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$ , 则

$$R_{TT'}(u) = \begin{cases} R_{T_0'T_0'}(u) + 2\epsilon a, & u = 0, \\ R_{T_0'T_0'}(u), & u \neq 0. \end{cases} \quad (16)$$

相应的频谱密度有

$$S_{TT'}(\omega) = \begin{cases} S_{T_0'T_0'}(\omega), & \omega \neq \infty, \\ R_{T_0'T_0'}(u) + 2\epsilon a, & \omega = \infty. \end{cases} \quad (17)$$

从 (16)、(17) 式看, 非线性项的作用仅在  $u=0$  或  $\omega=\infty$  才产生, 即只对系统的方差和方差对应的频谱有贡献, 而对一般情况下的自相关函数和频谱输出响应, 在近似到  $\epsilon$  一阶时, 非线性项不起作用。

需说明的是, 上述结论与确定性气候模式的认识是有较大差异的。在确定性气候模式中, 非线性的作用是由气候系统内部特性决定。本文讨论的是一随机模式, 考虑外界随机强迫下非线性的作用。从前面推导来看, 这种外界随机强迫对非线性项的作用是由随机强迫项与非线性项的乘积的积分形式表示出来, 在随机强迫视为高斯白噪声和非线性项为偶次幂函数的条件下, 此积分在一般情况下可化为高斯白噪声奇次幂高阶矩的积分形式, 而高斯白噪声具有奇次幂高阶矩为零的特性。因此, 积分为零, 非线性项不起作用。从物理意义上看, 我们可以这样来认识: 模式输出响应是模式系统对随机强迫的响应, 包括随机强迫通过模式系统线性区或非线性区所反映的输出响应。本文的模式系统结构和随机强迫项的特性使得非线性对随机强迫没有响应或者说随机强迫项没有通过非线性区, 即随机强迫只被模式线性区输出, 非线性项仅对气候系统的方差和方差谱作贡献。而一般气候模式不涉及外界随机强迫项, 对非线性项的认识也就无法用本文观念来解释。

对方差和方差谱输出响应 ( $u=0$  或  $\omega=\infty$ ), 非线性的作用使之比线性时多了  $2\epsilon a$ , 从 (13) 式看出, 非线性项的贡献与随机项强度  $\varphi_{\bar{w}\bar{w}}(0)$ 、 $\varphi_{\bar{w}_1\bar{w}_1}(0)$  成正相关, 即随机强迫越大, 非线性贡献越明显。另外, 它还与系统本身的一些特性有关, 如方差  $\varphi_{T_0'}(0)$ 、 $\varphi_{T_{S0}'}(0)$  反馈系数等。表达式已给出, 不再赘述。

进一步, 求出一般情况 ( $u \neq 0$  或  $\omega \neq \infty$ ) 下 (16)、(17) 式的最终表达式。

$\bar{w}(t)$ 、 $\bar{w}_1(t)$  是由  $w_1(t)$ 、 $w_2(t)$  决定的一随机过程, 不妨令  $w_1(t)$ 、 $w_2(t)$  的频谱密度呈一比例, 即  $S_{w_1}(\omega) = q^{-1} S_{w_2}(\omega)$  ( $q$  是比值系数)。利用扩散系数  $D$  与白色噪声谱的关系  $S_{w_1} = D_1 / \pi$ ,  $S_{w_2} = D_2 / \pi$ , 可得  $q^{-1} = D_1 / D_2$ 。

不难求出系统 (8) 的频域响应函数

$$H(\omega) = \frac{i\omega - \lambda_{21}q - (\lambda_{13} - \lambda_{11})}{-\omega^2 - i\omega(\alpha + \beta) + (\alpha\beta + \gamma)},$$

相应的频谱密度可写成

$$S_{TT} = S_{T_0'T_0'}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{w_1}(\omega) = \frac{[\omega^2 + (\lambda_{21}q + \lambda_{13} + \lambda_{11})^2]}{[-\omega^2 + (\alpha\beta + \gamma)^2 + \omega^2(\alpha + \beta)^2]} S_{w_1}(\omega). \quad (18)$$

应用留数定理易求出自相关函数

$$\begin{aligned} R_{TT}(u) &= R_{T_0'T_0'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{T_1'T_1'}(\omega) e^{i\omega u} d\omega \\ &= \frac{D_1 [m_2(t_1^2 - m_1^2)e^{-m_1 u} - m_1(t_1^2 - m_2^2)e^{-m_2 u}]}{(m_1 + m_2)(m_1 - m_2)m_1 m_2}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $m_1 = (\sqrt{t_3^2 + 4t_2^2} - t_3)/2$ ,  $m_2 = (\sqrt{t_3^2 + 4t_2^2} + t_3)/2$ ,  $t_1 = \lambda_{21}q + \lambda_{13} - \lambda_{11}$ ,  $t_2 = \alpha\beta + \gamma$ ,  $t_3 = \alpha + \beta$ .

(18)、(19) 式是气温自相关函数和自相关谱输出响应在  $\varepsilon$  一阶时的估计量。他们描述的变化过程为一 Markov 过程，这与实际相一致<sup>[9]</sup>。

从前面的分析和 (18)、(19) 表达式看， $\varepsilon$  一阶估计量实际上就是模式 (5) 直接略去非线性项的线性系统的响应，即摄动法求解在近似到  $\varepsilon$  一阶时，非线性项对模式 (5) 自相关函数和自相关谱输出响应没有贡献。为验证这点，我们进行了 (18) 式的计算，并与文献[1]泰勒展开线性化的频谱输出响应和实际结果作了比较。

将文献[2]和[12]参数化值代入无量纲参数  $\lambda_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 表达式，可得无量纲参数值；并取  $D_1 = 1.5$ ,  $D_2 = 1.2$ <sup>[3]</sup>；现代气候条件下，气候平衡态无量纲值 ( $T_c$ ,  $T_{se}$ ) = (2.88, 2.89)。把这些值代入 (18) 式和文献[1]的[24]式，得图 1 曲线 A 和 C。

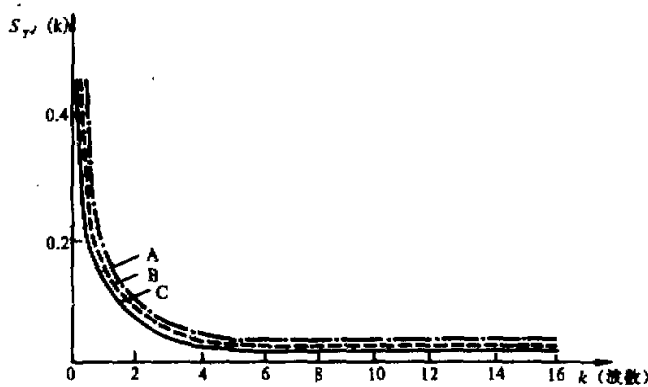


图 1 模式计算分析

A: 本文[18]式计算曲线, B: 实际计算谱 (1881—1986 年北半球温度距平序列),

C: 文献[1]中(24)式计算曲线

图 1 曲线 B 是根据 1881—1986 年北半球温度距平序列功率谱密度实际计算值。从图看出: A、B、C 三条曲线相当接近, 甚至已几近吻合。这表明: 对非线性项的处理, 无论是直接略去, 还是泰勒展开线性化, 在一定条件下, 模式输出响应在定量上引起的差异很小, 即几乎也是共同解, 并且与实际相当吻合。产生的原因, 正如本文前面摄动分析所指出, 是模式的结构和随机强迫项的假定共同作用的结果。这也就回答了引言提出的问题。

当  $\mu = 0$  (或  $\omega = \infty$ ) 时, 系统的输出响应为

$$R_{TT}(0) = \frac{D_1^2 [m_2(r_1^2 - m_1^2) - m_1(r_1^2 - m_2^2)]}{(m_1 + m_2)(m_1 - m_2)m_1 m_2} + 2\epsilon a,$$

$$S_{TT}(\infty) = 2\epsilon a.$$

上式右端  $2\epsilon a$  项为非线性作用项。这表明, 非线性项作用仅对系统方差和方差谱有贡献。这也解释了为什么一些工作<sup>[10,11]</sup>对系统线性化后所得理论方差值与实际方差值存在较明显误差的原因。

类似地, 可对海温变化的输出响应统计特征作同样分析, 为节省篇幅, 不再列出。

### 三、结束语

本文利用摄动法对一个海气耦合非线性随机模式作了求解, 分析了非线性项的作用, 结果表明: 非线性项对模式自相关函数和自相关谱密度输出响应没有贡献, 这意味着对模式 (5) 的研究, 在某些情况下不必再在非线项处理上作过多的考虑。

从摄动分析来看, 上述结论主要是由模式结构和随机输入特性而造成的。如果随机输入不是高斯白噪声过程, 那么, 非线性项的不同处理也许会产生较明显差异。也正因为如此, 非线性项对模式的气候方差和方差谱起到了作用。

本文模式 (5) 与一般随机模式<sup>[1,3]</sup>是有区别的, 目前一般随机模式是对确定性非线性模式线性化 (泰勒展开), 视一阶以上高阶项展开量为随机项而得的线性随机模式; 而本文 (5) 式是视天气快变量累积效应为随机项, 直接所得的非线性随机模式。从随机模式思想来看, 本文这种随机项处理应更为合理。因为, 一方面实际过程往往是非线性的和随机的; 另一方面在泰勒展开一次以上高阶项本身也含有气候慢变量, 而把它视为随机项是不太符合随机模式思想的。关于这一点, 笔者曾作过较详细讨论<sup>[13]</sup>。当然, 本文随机项的处理也存在一定的局限, 这不利于在了解确定性非线性系统特性的基础上, 研究随机扰动项加入对非线性性质的影响, 例如噪声 (随机项  $w(t)$ ) 激发的状态翻转等特性。另外, 非线性 Fokker-planck 方程解析求解的困难性也使得模式 (5) 的输出概率密度难以有解析解形式。不过, 本文利用摄动处理, 在某种程度上解决了这个问题, 这也正是本文的意义所在。

需要说明的是, 摄动法解虽可以达到任意精度, 但鉴于积分中的困难, 本文只取到  $\epsilon$  一次项。对本文这样一个较弱非线性项的随机模式, 已能达到足够精度。



## 参 考 文 献

- [1] 李麦村, 1981, 海气相互作用的随机-动力理论, 海洋学报, 9, 382—389.
- [2] 唐佑民等, 1990, 海气耦合零维模式分析, 热带气象, 6, 129—139.
- [3] 李麦村等, 1984, 关于海温准三年及半年周期振荡的随机模式, 气象学报, 42, 168—175.
- [4] 何渝生编著, 1984, 随机振动解题法及习题, 重庆出版社, 300—325.
- [5] 甘幼琛、谢世浩编著, 1982, 随机振动的基本理论与应用, 湖南科学技术出版社, 225—234.
- [6] N.C 尼格姆著(何成慧等译), 1985, 随机振动概论, 上海交通大学出版社, 9—47.
- [7] 孟庆生, 1985, 单自由度及多自由度系统非平稳随机振动, 应用数学与力学, 6, 335—344.
- [8] 数学手册编写组, 1979, 数学手册, 人民教育出版社, 244—285.
- [9] Frankignoul C. and Hasselman K., 1977, Stochastic climate model, Part II, *Tellus*, 29, 289—305.
- [10] Fraedrich K., 1978, Structural and stochastic analysis of a zero-dimensional climate system, *Quart. J. R. Met. Soc.*, 104, 461—474.
- [11] 桂新蓉, 1987, 全球变化随机模式, 南京气象学院学报, 10, 128—137.
- [12] 彭沛霖、施永年, 1987, 赤道东太平洋海气耦合多年振荡的一个简单模式, 热带气象, 3, 286—297.
- [13] 唐佑民、郭岚, 1990, 海气耦合随机模式中随机项的处理, 成都气象学院学报, No.2—3, 45—52.

## Analysis of Solution of Nonlinear Stochastic Model with Air-Sea Interaction

Tang Youmin

(Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu 610041)

### Abstract

In this paper, using perturbation technique of one order approximation, a quartic nonlinear stochastic model of air-sea interaction is deduced to a linear system with random item and a nonlinear system without random item. By analyzing the output response, it is found that the model's self-correlation function and its power spectral density is not affected by nonlinear item and the variance of climatic system as well as its spectrum is only affected under the condition that random process is a Gaussian process. On the basis of above, the response spectral density and calculations of the model are carried out.

**Key words:** air-sea interaction; nonlinear; stochastic model; perturbation analysis.