

频散效应对 Rossby 波动量和 热量输送的影响*

刘式适 黄 伟 刘 霞

(北京大学地球物理系, 北京 100871)

提 要

本文分析了扰动的频散效应对 Rossby 波动量和热量输送的影响, 分析指出: (1) 频散效应是大气大尺度运动中扰动动能向平均动能转换(即能量逆转)的根本原因, 也是扰动有效位能转化为扰动动能所必不可少的。(2) 正压大气大尺度运动扰动动能转化为平均动能的充分条件为基本气流水平切变 $\partial \bar{u} / \partial y$ 的特征宽度 $L^{(1)}$ 小于临界宽度 $L_c \equiv |\gamma| / \nu$ (ν, γ 分别为粘性系数和频散系数); 斜压大气大尺度运动扰动有效位能转化为扰动动能的充分条件为基本位温垂直变化 $\partial \bar{\theta} / \partial z$ 的特征厚度 $D^{(1)}$ 小于临界厚度 $D_c \equiv |\kappa| / k$ (k, κ 分别为导温系数和热频散系数)。本文还求解了表征基流变化的线性 KdV-Burgers 方程。

关键词: 扰动; Rossby 波; 耗散; 频散。

一、引 言

人们早就发现, 在大气大尺度运动中经常存在扰动动能转化为基本气流动能的现象。这就是被 Starr^[1] 称之为负粘性现象的能量逆转问题。刘式适和刘式达^[2]修正了经典的 Prandtl 混合长理论, 引入了湍流频散的概念, 指出频散效应是导致能量逆转的根本原因, 所谓负粘性现象实质上是一定条件下的负频散现象。刘式适^[3]应用频散效应分析行星边界层大气中的平衡运动, 得到了更接近于实际大气风速分布的修正的 Ekman 螺旋线。本文应用频散效应分析它对 Rossby 波动量和热量输送的影响, 不但说明了大尺度运动的能量逆转, 而且给实际大气 Rossby 波的动量和热量输送以合理的解释。同时, 本文还求解了反映扰动对基流作用的线性 KdV-Burgers 方程。

二、频散效应对 Rossby 波动量和热量经向输送的影响

若考虑动量和热量的经向输送, 则沿纬圈平均的 x 方向的运动方程和绝热方程可以写为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f \bar{v} = - \frac{\partial \bar{u}' \bar{v}'}{\partial y}, \quad (1)$$

1993年1月6日收到, 2月5日收到修改稿。

* 本文获国家攀登工程“非线性科学”的资助。

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\theta}'v'}{\partial y}, \quad (2)$$

其中符号“—”表示沿纬圈平均。 $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 (u', v') 分别表示平均风速和扰动风速, $\bar{\theta}$ 和 θ' 分别是平均位温和扰动位温, f 为 Coriolis 参数。

若定义质量积分的平均动能(基本气流动能)和扰动动能分别为

$$K_m^* = \int_M \frac{1}{2} \bar{u}^2 \delta M, \quad (3)$$

$$K_r^* = \int_M \frac{1}{2} (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2) \delta M, \quad (4)$$

则在正压条件下平均动能与扰动动能之间的转换函数为

$$\{K_m, K_r\}_1 = - \int_M \bar{u}'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \delta M, \quad (5)$$

$\{K_m, K_r\}_1 > 0$ 表示平均动能向扰动动能转换; $\{K_m, K_r\}_1 < 0$ 表示扰动动能向平均动能转换。

图 1 是在等压面上常见的 Rossby 波的图象。在槽线(等位相线)的中部往往是基本气流 $\bar{u}$ 的最大值。从图 1 明显看出, 在上部(那里槽线呈西北-东南走向, 称为导式波) $\bar{u}'v' < 0$, 表示西风动量向南输送; 而在下部(那里槽线呈东北-西南走向, 称为曳式波) $\bar{u}'v' > 0$, 表示西风动量向北输送。因此, 图 1 表征的 Rossby 波动量在经向由 $\bar{u}$ 的低值向高值输送, 相应, 扰动动能向平均动能转换, 这就是能量逆转。

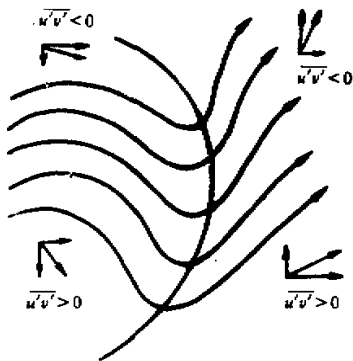


图 1 Rossby 波的能量逆转

能量逆转从图 1 中 Rossby 波的螺旋结构

不难得到说明。设扰动流函数 ψ' 为

$$\psi' = a \cos \theta, \quad \theta = kx + ly - \omega t, \quad (6)$$

a 为振幅, θ 为位相, k 和 l 分别为 x 和 y 方向上的波数, ω 为圆频率。作为第一近似, 我们忽略 a, k, l, ω 的变化, 在准地转条件下有

$$u' \equiv -\frac{\partial \psi'}{\partial y} = la \sin \theta, \quad (7)$$

$$v' \equiv \frac{\partial \psi'}{\partial x} = -ka \sin \theta,$$

因而

$$\bar{u}'v' = -kla^2 \sin^2 \theta. \quad (8)$$

将上式沿纬圈平均, 设波长为 L , 则

$$\bar{u}'v' = \frac{1}{L} \int_0^L -kla^2 \sin^2 \theta dx = \frac{1}{kL} \int_0^{2\pi} -kla^2 \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{2} kla^2, \quad (9)$$

由此可见, 对图 1 上部的导式波(槽线斜率为 $\tan \alpha \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\text{const}} = -\frac{\partial \theta}{\partial x} / \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{k}{l}$,

导式波, $\tan \alpha < 0$, k, l 同号) $\bar{u}'v' < 0$; 对图 1 下部的曳式波 ($\tan \alpha > 0$, k, l 异号) $\bar{u}'v' > 0$ 。

从物理上分析为什么会出现如图 1 的能量逆转呢? 依 Prandtl 混合长理论, 认为存

在一个混合长 $l' = y - y_0$, 在 l' 内空气微团保持自身的属性不变, 它移动 l' 后与其它空气进行交换产生扰动。传统认为

$$u' \equiv \bar{u}(y_0) - \bar{u}(y) = -l' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (10)$$

因而

$$-\overline{u'v'} = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (11)$$

其中 $\nu \equiv l'v' > 0$ 称为粘性系数, $\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ 表示粘性效应。如果只存在粘性效应, 当 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0$ 时, $-\overline{u'v'} > 0$; 当 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} < 0$ 时, $-\overline{u'v'} < 0$ 。这样, 动量在经向只能由 $\bar{u}$ 的高值向低值输送。相应, 平均动能只能转化为扰动动能, 就不会出现能量逆转。为了给以说明, Starr 就称为负粘性。

实际上(10)式未考虑 $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$, 若考虑之, 则(10)式应改写为

$$u' = -l' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{1}{2} l'^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (12)$$

相应, (11)式应改写为

$$-\overline{u'v'} = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \quad (13)$$

其中 $\gamma \equiv -\frac{1}{2} l'^2 v'$ 称为频散系数, $-\gamma \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$ 表征频散效应, 在图 1 中的区域, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} < 0$, 则在上部, 只有 $\gamma > 0$, 才能使动量由 $\bar{u}$ 的低值向高值输送; 而在下部, 只有 $\gamma < 0$, 才能使动量由 $\bar{u}$ 的低值向高值输送。因此, 形成能量逆转的根本原因还在于频散效应。

(13)式代入(5)式, 得

$$\{K_m, K_s\}_1 = \int_M \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right] \delta M, \quad (14)$$

因而, 发生正压 Rossby 波能量逆转的必要条件为

$$\gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} > 0, \quad (15)$$

而充分条件为

$$\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 < \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (16)$$

充分条件(16)还可以改写为

$$L^{(u)} \equiv \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} / \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right| < \frac{|\gamma|}{\nu} \equiv L_c^{(u)}, \quad (17)$$

这里 $L^{(u)} \equiv \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} / \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|$ 表示基本气流水平切变的特征宽度, $L_c^{(u)} \equiv |\gamma|/\nu$ 为临界宽度。(17)式表明, 对大尺度运动, 只有当 $L^{(u)} < L_c^{(u)}$ 时, 才能发生能量逆转, 它使大尺度基本气流得以维持, 而使扰动衰减。

类似地可讨论热量的经向输送。若定义质量积分的平均有效位能和扰动有效位能分别为

$$A_m^* = \int_M \frac{f_0^2}{2N^2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \delta M, \quad (18)$$

$$A_e^* = \int_M \frac{f_0^2}{2N^2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)^2 \delta M, \quad (19)$$

其中 f_0 为 f 的特征值, N 为 Brunt-Väisälä 频率, $\bar{\phi}$ 为相应基本气流 $\bar{u}$ 的流函数 ($\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}$), ϕ' 为扰动流函数。

平均有效位能与扰动有效位能之间的转换函数为

$$\{A_m, A_e\} = - \int_M \frac{g^2}{N^2 \theta_0^2} \bar{\theta}' v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \delta M, \quad (20)$$

其中 θ_0 为静止大气的位温, $N^2 = g \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial z}$ 。由上式知, $\{A_m, A_e\} > 0$ 表示平均有效位能转化为扰动有效位能; $\{A_m, A_e\} < 0$ 表示扰动有效位能转化为平均有效位能。

与(11)式相似,经典理论认为

$$-\bar{\theta}' v' = k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}, \quad (21)$$

其中 $k > 0$ 称为导温系数。因 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} < 0$ 时, $\bar{\theta}' v' > 0$, 它表示,在经向,热量只能由高位温向低位温输送。相应,平均有效位能只能转化为扰动有效位能。

但考虑 $\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2}$ 后,(21)式修改为

$$-\bar{\theta}' v' = k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2}, \quad (22)$$

这里 κ 称为热扩散系数。相应,(20)式改写为

$$\{A_m, A_e\} = \int_M \frac{g^2}{N^2 \theta_0^2} \left[k \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right)^2 - \kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right] \delta M, \quad (23)$$

所以,在经向,若热量由低位温传向高位温,或扰动有效位能转换为平均有效位能的必要条件为

$$\kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} > 0, \quad (24)$$

而充分条件为

$$k \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right)^2 < \kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2}. \quad (25)$$

上式还可以改写为

$$L^{(2)} = \left| \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y} / \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right| < \frac{|\kappa|}{k} \equiv L_c^{(2)}, \quad (26)$$

这里 $L^{(2)} \equiv \left| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} / \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right|$ 表示平均位温水平切变的特征宽度, $L_c^{(2)} \equiv \frac{|\kappa|}{k}$ 为相应的临界

宽度。注意基本气流的热成风关系:

$$f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}, \quad (27)$$

则不难知

$$L^{(2)} \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} / \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y \partial z}, \quad (28)$$

因此, 这里 $L^{(2)}$ 实质也是基本气流垂直切变的特征宽度。

我们知道, 综合动量和热量经向输送的 Eliassen-Palm 通量矢量为

$$\mathbf{J} = -\overline{u'v'} \mathbf{j} + \left(f_0 / \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) \overline{\theta'v'} \mathbf{k}, \quad (29)$$

以(13)和(22)式代入上式得

$$\mathbf{J} = \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} - \left(f_0 / \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right) \left(k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right) \mathbf{k}, \quad (30)$$

若应用热成风关系(27), E-P 通量矢量(30)式可化为

$$\mathbf{J} = \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} + \frac{f_0^2}{N^2} \left(k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k}, \quad (31)$$

若取 $k = \nu$, $\kappa = \gamma$, 则上式改写为

$$\mathbf{J} = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \mathbf{k} \right) - \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y \partial z} \mathbf{k} \right), \quad (32)$$

所以, E-P 通量由两部分构成, 第一部分为

$$\mathbf{J}_1 = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \mathbf{k} \right), \quad (33)$$

它表征耗散效应, 依赖于风速的水平和垂直切变; 第二部分为

$$\mathbf{J}_2 = \gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y \partial z} \mathbf{k} \right), \quad (34)$$

它表征频散效应, 依赖于风速水平和垂直切变在 y 方向的变化。

三、频散效应对 Rossby 波动量和热量垂直输送的影响

若考虑动量和热量的垂直输送, 则沿纬圈平均的 x 向运动方程和绝热方程可写为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f \bar{v} = -\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{N^2 \theta_0}{g} \bar{w} = -\frac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z}, \quad (36)$$

其中 $\bar{w}$ 和 w' 分别为平均垂直速度和扰动垂直速度。

纯斜压条件下平均动能与扰动动能之间的转换函数为

$$\{K_m, K_r\}_2 = - \int_M \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \delta M, \quad (37)$$

$\{K_m, K_r\}_2 > 0$ 表示平均动能向扰动动能转换; $\{K_m, K_r\}_2 < 0$ 表示扰动动能向平均动能转换, 产生能量逆转。

仿(13)式,我们可以有

$$-\overline{u'w'} = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (38)$$

若上式右端仅有第一项,在垂直方向,动量只能由 $\bar{u}$ 的高值向低值输送;只有存在第二项,才可能发生能量逆转。

(38)式代入(37)式有

$$\{K_m, K_e\}_2 = \int_M \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 - \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] \delta M, \quad (39)$$

因此,发生斜压 Rossby 波能量逆转的必要条件为

$$\gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} > 0, \quad (40)$$

充分条件为

$$\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 < \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}. \quad (41)$$

上式还可改写为

$$D^{(1)} \equiv \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} / \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right| < \frac{|\gamma|}{\nu} \equiv D_c^{(1)}, \quad (42)$$

这里 $D^{(1)} \equiv \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} / \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right|$ 表示基本气流垂直切变的特征厚度, $D_c^{(1)} \equiv \frac{|\gamma|}{\nu}$ 为临界厚度。

(42)式表明: 对大尺度运动,只有当 $D^{(1)} < D_c^{(1)}$ 时才能发生斜压 Rossby 波的能量逆转。

实践告诉我们,在斜压大气中, Rossby 波的槽线通常自下而上向西倾斜,则由(37)式算得 $\{K_m, K_e\}_2 > 0$, 即平均动能转化为扰动动能。不过,大量的计算表明,斜压大气大尺度扰动动能的绝大部分并非来自平均运动动能,而是来自扰动有效位能,见图 2。

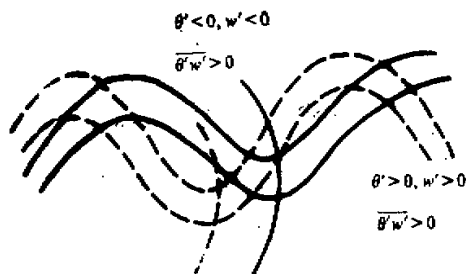


图 2 温度槽落后于流场槽 $\overline{\theta'w'} > 0$

扰动有效位能与扰动动能之间的转换函数为

$$\{A_e, K_e\} = \int_M \frac{g}{\theta_0} \overline{\theta'w'} \delta M, \quad (43)$$

$\{A_e, K_e\} > 0$ 表示扰动有效位能转化为扰动动能; $\{A_e, K_e\} < 0$ 表示扰动动能转化为扰动有效位能。

下面,我们将说明: 若只存在耗散效应,则 $\{A_e, K_e\} < 0$, 只有计入频散效应, 才有 $\{A_e, K_e\} > 0$, 即实现扰动有效位能向扰动动能的转换。

仿(22)式,我们可以有

$$-\overline{\theta'w'} = k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}, \quad (44)$$

若仅有耗散效应,右端仅有第一项,因层结稳定, $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$, 则 $-\overline{\theta'w'} > 0$, 即在垂直方向,热量自上而下,由 $\bar{\theta}$ 的高值向低值输送,相应, $\{A_e, K_e\} < 0$, 扰动动能转化为扰动有效位能;只有计入频散效应,即加入(44)式右端的第二项,才有可能使得 $-\overline{\theta'w'} < 0$ 或 $\overline{\theta'w'} > 0$, 即热量向上输送,相应,扰动有效位能转化为扰动动能。

(44)式代入(43)式有

$$\{A_e, K_e\} = \int_M \frac{g}{\theta_0} \left(-k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right) \delta M, \quad (45)$$

由此可见,扰动有效位能转化为扰动动能的必要条件为

$$\kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} > 0, \quad (46)$$

而充分条件为

$$k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}. \quad (47)$$

上式还可改写为

$$D^{(2)} \equiv \left| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} / \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right| < \frac{|\kappa|}{k} \equiv D_c^{(2)}, \quad (48)$$

这里 $D^{(2)} \equiv \left| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} / \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right|$ 表示平均位温垂直变化的特征厚度, $D_c^{(2)} \equiv \frac{|\kappa|}{k}$ 为临界厚度。

(48)式表明,只有当 $D^{(2)} < D_c^{(2)}$ 时,才能出现像图 2 那样,扰动有效位能转化为扰动动能,使斜压 Rossby 波得到发展。

四、正压大气基本气流的变化

本节求解由于动量的经向输送所引起的正压大气基本气流的变化。

(13)式代入(1)式,忽略 Coriolis 力的作用,我们有

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3}, \quad (49)$$

这是我们求解正压大气基本气流 $\bar{u}$ 变化的线性 KdV-Burgers 方程。如果没有频散效应 ($\gamma = 0$), 则方程(49)化为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \quad (50)$$

这是 $\bar{u}$ 的热传导方程。由于这里只有粘性效应,在经向,动量由 $\bar{u}$ 的高值输向低值,基本气流的动能因粘性而耗损,因而 $\bar{u}$ 随时间逐渐减小。事实上,若 $\bar{u}$ 的初值为

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0(y), \quad (51)$$

则方程(50)满足初条件(51)的解为

$$\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_0(\eta) e^{-(y-\eta)^2/4\nu t} d\eta, \quad (52)$$

由此可知,随着 t 的增大, $\bar{u}$ 将减小。

在第二节的分析中,我们已经知道,在图 1 的区域中, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} < 0$, 这样, $\nu > 0$ 必然形成 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} < 0$ 。但图 1 所示的能量逆转情况,在下部 $\bar{u}'\bar{\nu}' > 0$, 上部 $\bar{u}'\bar{\nu}' < 0$, 因而 $-\frac{\partial \bar{u}'\bar{\nu}'}{\partial y} > 0$, 则由方程(1)知, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} > 0$ 。之所以如此,这完全是频散效应所致,因此,必须分析和求解方程(49)。

首先对方程(49)作变换,令

$$\bar{u} = \bar{u}^* e^{\alpha t + \beta y}, \quad (53)$$

代入方程(49)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} + (\alpha - \nu\beta^2 - \gamma\beta^3)\bar{u}^* + (-2\beta\nu + 3\beta^2\gamma)\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y} \\ - (\nu - 3\beta\gamma)\frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial^3 \bar{u}^*}{\partial y^3} = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

若取

$$\beta = \frac{\nu}{3\gamma}, \quad \alpha = \frac{2\nu^3}{27\gamma^2}, \quad (55)$$

则方程(54)中 $\bar{u}^*$ 和 $\frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial y^2}$ 的系数为零,而 $\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y}$ 的系数 $-2\beta\nu + 3\beta^2\gamma = -\frac{\nu^2}{3\gamma}$ 。这意味着,作变换

$$\bar{u} = \bar{u}^* \exp\left(\frac{2\nu^3}{27\gamma^2}t + \frac{\nu}{3\gamma}y\right), \quad (56)$$

方程(49)化为

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} - \frac{\nu^2}{3\gamma} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y} + \gamma \frac{\partial^3 \bar{u}^*}{\partial y^3} = 0. \quad (57)$$

在变换(56)下,初条件(51)化为

$$\bar{u}^*|_{t=0} = \bar{u}_0(y) e^{-\frac{\nu}{3\gamma}y}. \quad (58)$$

在 $\gamma > 0$ 时,方程(57)满足初条件(58)的解为

$$\bar{u}^* = \frac{1}{(3\gamma t)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_0(\eta) e^{-\frac{\nu}{3\gamma}\eta} Ai\left(\frac{y + \frac{\nu^2}{3\gamma}t - \eta}{(3\gamma t)^{1/3}}\right) d\eta, \quad (59)$$

其中 $Ai(\)$ 表 Airy 函数。

将(59)式代入(56)式,可得

$$\bar{u} = \frac{e^{\frac{2\nu^3}{27\gamma^2}t}}{(3\gamma t)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_0(\eta) e^{\frac{\nu}{3\gamma}(y-\eta)} Ai\left(\frac{y + \frac{\nu^2}{3\gamma}t - \eta}{(3\gamma t)^{1/3}}\right) d\eta. \quad (60)$$

在 $\gamma < 0$ 时, 我们类似可求得

$$\bar{u} = \frac{e^{\frac{\gamma}{3}|\gamma|t}}{(3|\gamma|t)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_0(-\eta) e^{-\frac{\gamma}{3|\gamma|}(\eta+\eta)} Ai\left(-\frac{\eta - \frac{\gamma^2}{3|\gamma|}t + \eta}{(3|\gamma|t)^{1/3}}\right) d\eta. \quad (61)$$

由于 Airy 函数 $z = Ai(x)$ 满足方程

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - xz = 0, \quad (62)$$

则当 $x > 0$ 时, $Ai(x)$ 随 x 的增大呈指数减小; 当 $x < 0$ 时, $Ai(x)$ 随 $|x|$ 增大呈振荡状态, 见图 3。而且因为 $x \rightarrow \infty$ 时, $Ai(x)$ 的渐近式为

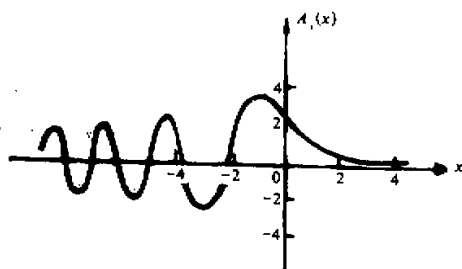


图 3 $Ai(x)$ 随 x 的变化

$$Ai(x) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot x^{-1/4} e^{-(2/3)x^{3/2}}, \quad (x \rightarrow \infty) \quad (63)$$

因此, 无论是解(60)或(61)式, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 都有 $\bar{u} \rightarrow 0$, 这是初值问题的必然结果。

但如果规定 $\bar{u}(y)$ 在 $|y| < L^{(1)}$ 内不为零, 则解(60)或(61)的积分区间从 $(-\infty, \infty)$ 变为 $(-L^{(1)}, L^{(1)})$ 。若就取 $\eta = L^{(1)}$, $|\gamma|t = 3L^{(1)^2}$, 则在 $y = 0$ 处

$$Ai\left(\frac{\frac{\gamma^2}{3|\gamma|}t - \eta}{(3|\gamma|t)^{1/3}}\right) = Ai\left(\frac{\frac{L^{(1)^2}}{9^{1/3}L^{(1)}} - L^{(1)}}{9^{1/3}L^{(1)}}\right) = Ai\left(9^{-1/3}\left[\left(\frac{L^{(1)}}{L_c}\right)^2 - 1\right]\right), \quad (64)$$

这样, 只有当 $L^{(1)} < L_c$ 时, Ai 内的自变量变为负值, 于是, 可保证解(60)或(61)中的 $\bar{u}$ 随时间增长, 即出现能量逆转。初步的数值计算也证明了这一点^[4]。

五、结 论

综上所述, 我们可以得到如下几个结论:

(1) 大尺度扰动不仅存在耗散效应, 而且存在频散效应。只有考虑频散效应, 才能正确地描述 Rossby 波的动量和热量输送过程, 才能解释被 Starr 称为“负粘性现象”的能量逆转。

(2) 在大尺度扰动中, 如只有粘性效应, 通过 Rossby 波, 动量由基流的高值向低值输送; 加入频散效应后, 在一定的条件下可以出现动量由基流的低值向高值输送。

(3) 在大尺度扰动中,如只有传导效应,通过 Rossby 波,热量由位温的高值向低值输送;加入热频散效应后,在一定的条件下可以出现热量由位温的低值向高值输送。

(4) 线性 KdV-Burgers 方程可以帮助我们分析频散效应在物理量输送中的作用。

参 考 文 献

- [1] Starr, V. P., 1966, *Physics of Negative Viscosity Phenomena*, McGraw-Hill, pp. 255.
- [2] 刘式适、刘式达,1992,湍流的粘性和频散效应,大气科学, 16, 2 期,205—215.
- [3] Liu Shikuo (刘式适)、Huang Wei(黄 伟)、Rong Pingping (荣平平),1992, Effects of Turbulent Dispersion of Atmospheric Balance Motions of Planetary Boundary layer, *Advances in Atmospheric Sciences*, 9, No. 2, 147—156.
- [4] 黄 伟、刘式适,1993,频散效应对自由大气能量输送的影响,北京大学学报, 29, 第 5 期,595—603.

Influences of Dispersion Effects on Momentum and Heat Transports by the Rossby Waves

Liu Shikuo Huang Wei and Liu Xia

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract

In this paper the influences of dispersion effects on momentum and heat transports by the Rossby waves are analyzed. It is shown that

(a) The dispersion effects are the basic cause of energy inversion which represents that the eddies (or disturbances) give up kinetic energy to the mean flow in large-scale motion. The dispersion effects are also absolutely necessary for the eddies (or disturbances) to gain kinetic energy from available potential energy.

(b) For the barotropic atmosphere, the sufficient condition of energy inversion is that the characteristic width $L^{(1)}$ of horizontal shearing, $\partial \bar{u} / \partial y$, of basic flow is less than the critical width $L_c \equiv |\gamma| / \nu$ (ν and γ are the viscosity and dispersion coefficients, respectively). For the baroclinic atmosphere, the sufficient condition to transform available potential energy into kinetic energy of perturbations is that the characteristic thickness $D^{(2)}$ of vertical variation, $\partial \bar{\theta} / \partial z$, of mean potential temperature is less than the critical depth $D_c \equiv |\kappa| / k$ (k and κ are the thermal diffusivity and dispersion coefficients, respectively).

The linear KdV-Burgers equation which is used to study the variation of basic flow is solved, too.

Key words: disturbance; Rossby waves; dissipation; dispersion.