

半地转模式中非线性慢行波解的研究*

黄思训 项 杰

(中国人民解放军空军气象学院, 南京 211101)

提 要

本文讨论了在半地转近似下带有 Rayleigh 摩擦并以静止流体为背景的非线性 Rossby 行波解的存在性。研究表明: 当 $\mu=0$ 时存在孤波解和周期解; 当 $0<\mu<\mu_0$ 时存在振荡型行波解; 当 $\mu\geq\mu_0$ 时存在单调行波解, 特别在一组特定参数下, 导出了单调行波解的解析表达式。最后指出: 对于中纬地区, 且 c_x (波速) 远大于 c_x^* (临界波速) 时, 系统易产生振荡型行波解; 对于高、低纬地区, 且 c_x 接近 c_x^* 时, 系统易产生单调行波解。

关键词: 同宿轨道; 单调行波解; 振荡型行波解; 反应扩散方程; 临界波速。

一、引 言

锋面是一种重要的天气系统, 锋面通常被认为是一个密度不连续面, 锋面过境时气象要素往往变化剧烈, 如冷锋过境时往往气压急升, 温度剧降, 北风加大, 故通常将锋前后的气象要素看成是不连续的。但这只是粗略地考虑, 若仔细分析锋过境后各气象要素的自动记录, 则往往可见气象要素的变化并非是简单跳跃, 而是有其本身的特点和结构, 如锋后中尺度雨带等等。在实际中往往一条冷锋南下时, 其强度和结构变化不大, 呈准稳定状态, 这样粗略地可将其看成是一个行波。当前半地转模式已广泛应用于锋面的研究^[1]。研究半地转模式中振荡型行波解与单调行波解的存在条件及其特殊的结构和移速, 并将其与锋面的结构与移速比较, 无疑是很有意义的工作。本文试图在这方面作一些理论上的探讨, 为此定性地讨论了 Rossby 行波解的存在性及各参数变化对 Rossby 行波解的影响, 对于这种波解的实际存在性以及与锋面结构比较, 有待于以后进一步观测证实。由于半地转模式的非线性性质, 要研究该模式中非线性行波解的存在性及结构是困难的, 作为第一步我们先对二层均质不可压缩流体模型进行讨论, 并以静止流体为背景讨论非线性 Rossby 行波解的存在性, 并在一组特定参数下给出解析表达式。最后我们对所得结果进行定性讨论, 指出解的结构与 Rayleigh 摩擦有关, 当无摩擦 (即 $\mu=0$ 时) 系统只可能存在周期解与孤波解; 当有较小摩擦时 (即 $0<\mu<\mu_0$ 时), 系统存在振荡型行波解; 当有较大摩擦时 (即 $\mu\geq\mu_0$ 时) 系统存在单调行波解。本文采用反应扩散方程中求行波解的追赶法技巧, 结合处理退化方程的方法来研究上述问题。

1992年1月10日收到, 11月15日收到再改稿。

* 国家自然科学基金及大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室资助项目。

二、数学模型及定性分析

考虑二层均质不可压缩流体, 上下层密度为 ρ_1 和 ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), 应用地转动量近似后且以静止流体为背景, 则有以下的 β 平面上半地转模式方程组:

$$\frac{Du_g}{Dt} - fv = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \mu u_g, \quad (1)$$

$$\frac{Dv_g}{Dt} + fu = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mu v_g, \quad (2)$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} + (c_0^2 + \varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \quad (3)$$

其中 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$, $f = f_0\beta y$,

f_0 与 β 为常数, $\varphi = g^*h$ 为位势扰动, $c_0^2 = \bar{\varphi} = g^*\bar{h}$ 为流体静止时重力波波速的平方, $\bar{h}$ 则为流体静止时第二层流体的高度,

h 为高度扰动 (见图 1), $g^* = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ 为约化重力加速度, u_g 、 v_g 为地转风, 即

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (4)$$

在该模式中我们引进了 Rayleigh 摩擦项, μ 为摩擦系数。由 (1)、(2) 式可得到半地转模式中的涡度方程

$$\begin{aligned} \frac{D\zeta_g}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial y} \\ + f_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta v_g = -\mu\zeta_g, \end{aligned} \quad (5)$$

这里 ζ_g 为地转风涡度, 由 (4) 式可得

$$\zeta_g = \frac{1}{f_0}|\nabla|^2\varphi. \quad (6)$$

下面我们讨论由 (3)、(5)、(6) 式所构成的系统行波解的存在性。令

$$u = U(\xi), \quad v = V(\xi), \quad \varphi = \Phi(\xi), \quad \xi = kx + ly - vt, \quad (7)$$

其中 $k, l \geq 0$ 表示 x, y 方向的“波数”, v 为“圆频率”, 由于我们没有考虑基本气流, 即讨论以静止流体为背景的非线性 Rossby 行波 (若有基本气流 $\bar{u}$ 存在, 讨论也完全类似, 这里不再重复。又由观察事实说明 Rossby 波相对于基本气流向西传播, 于是我们仅考虑 $v < 0$ 的情形。另外, 记“'”为各物理量对 ξ 的微商, 则有

$$u_g = -\frac{l}{f_0}\Phi', \quad v_g = \frac{k}{f_0}\Phi', \quad \zeta_g = \frac{k^2 + l^2}{f_0}\Phi'', \quad (8)$$

这样方程 (3)、(5) 可改写为

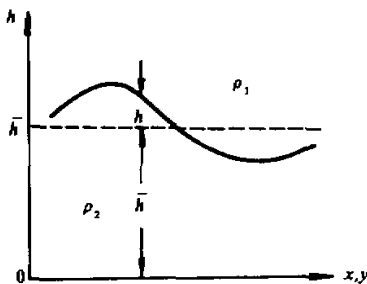


图 1 二层均质不可压缩流动模型

$$[(kU + IV - v)\Phi']' + \lambda^2 f_0^2 (kU + IV)' + \lambda^2 \beta k \Phi' = -\mu \Phi'', \quad (9)$$

$$(kU + IV - v)\Phi' + (kU + IV)\Phi + C_0^2 (kU + IV)' = 0, \quad (10)$$

其中 $\lambda^2 = (k^2 + l^2)^{-1}$, 积分 (9)、(10) 式可得

$$kU + IV - v)\Phi'' + \mu \Phi' + \lambda^2 \beta k \Phi + \lambda^2 f_0^2 (kU + IV) = d_1 \text{ (常数)}, \quad (11)$$

$$(kU + IV - v)\Phi + c_0^2 (kU + IV) = d_2 \text{ (常数)}, \quad (12)$$

设给出边界条件 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, $kU + IV \rightarrow 0$, $\Phi, \Phi', \Phi'' \rightarrow 0$, 于是利用边界条件可知常数 $d_1 = d_2 = 0$, 由 (12) 式可得

$$kU + IV = \frac{v\Phi}{c_0^2 + \Phi}. \quad (13)$$

把 (13) 式代入 (11) 式可得

$$Z'' - m(1 + Z)Z' + A(Z - \theta)Z = 0, \quad (14)$$

其中

$$Z = \frac{\Phi}{c_0^2}, \quad A = -\frac{\lambda^2 \beta k}{v}, \quad m = \frac{\mu}{v}, \quad \theta = -\left(1 + \frac{f_0^2 v}{\beta k c_0^2}\right). \quad (15)$$

(14) 式是二阶非线性常微分方程, 由于设 $v < 0$, 故 $A > 0$, $m < 0$, 下面我们仅讨论 $\theta > 0$ 的情形。记 $c_x = -v/\kappa$ (x 方向的波速), $c_x^* = c_0^2 \beta / f_0^2$ (临界波速), $\theta > 0$ 等价于 $c_x > c_x^*$ 。目前对一般形式反应扩散方程行波解研究得相当活跃。方程归结为 $Z'' + cZ' - f(Z) = 0$ 的形式。Fisher^[2]在研究优势基因的发展时, 建立了此数学模型, 1937 年 Kolmogorov 等^[3]第一次用相平面方法证明了波前解存在性。管克英^[4]在研究 Burgers-KdV 方程时亦归结 $f(Z)$ 为二项式情形, 1975 年, Roth^[5]研究 $f(Z)$ 为三项式情形得到了单调及非单调行波解, 详细内容可见文献[6]。文献[7]讨论了非线性重力行波解。但本文的模型中 Z' 的系数 $-m(1 + Z)$ 是 Z 的单调增加函数, 所以给在证明单调行波解时带来了困难, 本文采用追赶法技巧结合处理退化方程的方法, 证明了系统单调与非单调行波解存在性。在一组特殊参数下, 找到了单调行波解的解析表达式。(14) 式可归结为如下形式的非线性常微分方程组:

$$Z' = P, \quad (16)$$

$$P' = m(1 + Z)P - A(Z - \theta)Z, \quad (17)$$

系统有两个平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\theta, 0)$ 。在 $(0, 0)$ 附近 (16)、(17) 式的线性化方程组为

$$Z' = P, \quad P' = A\theta Z + mP, \quad (18)$$

特征方程为 $\lambda^2 - m\lambda + A\theta = 0$, 特征根为 $\Lambda^\pm = \frac{1}{2}[m \pm \sqrt{m^2 + 4A\theta}]$, $\Lambda^\pm$ 为异号实根, 故 $(0, 0)$ 为 (18) 式的鞍点, 亦为 (16)、(17) 式的鞍点。在 $(\theta, 0)$ 附近 (16)、(17) 式的线性化方程组为

$$Z' = P, \quad P' = -A\theta(Z - \theta) + m(1 + \theta)P, \quad (19)$$

特征方程为

$$\lambda^2 - m(1 + \theta)\lambda + A\theta = 0,$$

特征根为

$$\bar{\lambda}^{\pm} = \frac{1}{2}[m(1 + \theta) \pm \sqrt{m^2(1 + \theta)^2 - 4A\theta}].$$

为了以后研究方便, 引进

$$m_0^2 = \frac{4A\theta}{(1 + \theta)^2} \quad (\text{或} \quad m_0 = -2\frac{\sqrt{A\theta}}{1 + \theta} < 0). \quad (20)$$

当 $m=0$ 时, 即 $\mu=0$ (无 Rayleigh 摩擦) 时, $(\theta, 0)$ 为 (19) 式的中心, 以后我们知 $(\theta, 0)$ 亦为 (16)、(17) 式的中心; 当 $m_0 < m < 0$ 时, 特征根为共轭复数, 故 $(\theta, 0)$ 为 (19) 式的稳定焦点, 亦为 (16)、(17) 式的稳定焦点; 当 $m \leq m_0$ 时, 特征根为负实根, 故 $(\theta, 0)$ 为 (19) 式的稳定结点, 亦为 (16)、(17) 式的稳定结点。

以上我们讨论了平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\theta, 0)$ 附近的局部性质, 下面来讨论轨线的整体性质。研究表明, 当 $m=0$ 时, 系统存在同宿轨道, 亦即存在孤波解, 与此同时在 $(\theta, 0)$ 附近存在周期波解; 当 $m_0 < m < 0$ 时, 轨线实现鞍焦联接, 此时得到振荡型行波解; 当 $m \leq m_0$ 时, 实现鞍结联接, 系统存在单调行波解。

首先对 $m=0$ 进行讨论, 此时 (14) 式退化为

$$Z'' + AZ(Z - \theta) = 0, \quad (21)$$

显然有

$$\Phi = c_0^2 Z = \frac{2\theta c_0^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \sqrt{A\theta}(kx + ly - vt). \quad (22)$$

$m=0$ 对应的解为一支孤立波解, 在相平面上, 这条轨道是同一个鞍点 $(0, 0)$ 的稳定流形和不稳定流形, 此轨道为同宿轨道 (Homoclinic)。这条轨道在后面的讨论中起着非常重要的作用。

三、基本引理及单调行波解的存在性

在讨论行波解存在唯一性时, 我们先建立一些引理, 首先考虑如下初值问题:

$$\frac{dP_i}{dZ} = m_i(1 + Z) - \frac{AZ(Z - \theta)}{P_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (23)$$

$$P_i(0) = 0, \quad P_i(Z) > 0, \quad (0 < Z < Z_0, \quad Z_0 \in (0, \theta)) \quad (24)$$

和

$$\frac{dP_i}{dZ} = m_i(1 + Z) - \frac{AZ(Z - \theta)}{P_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (25)$$

$$P_i(\theta) = 0, \quad P_i(Z) > 0, \quad (Z_1 < Z < \theta, \quad Z_1 \in [0, \theta)) \quad (26)$$

引理 1 若 $P_i(Z) \equiv P_{m_i}(Z)$ 是 (23)、(24) 或 (25)、(26) 式的解, 则存在充分小的正数 δ , 使 $P_i(Z)$ 当 $Z \in (0, \delta)$ 时 [或当 $Z \in (\theta - \delta, \theta)$ 时], 关于 m_i 是单调增加的。

证明 我们仅对 (23)、(24) 式的解进行证明, (25)、(26) 式的解亦可类似证明。由 (23) 式可得

$$\frac{d(P_1 - P_2)}{dZ} = (m_1 - m_2)(1 + Z) + \frac{AZ(Z - \theta)}{P_1 P_2} (P_1 - P_2), \quad (27)$$

$$(P_1 - P_2)|_{Z=0} = 0. \quad (28)$$

不妨设 $m_1 < m_2$, 令 $f(Z) = -AZ(Z - \theta)$, $w(Z) = \exp\left\{-\int_Z^\delta \frac{f(\tau)}{P_1(\tau)P_2(\tau)} d\tau\right\}$, 这里 $0 < Z < \delta < \theta$, 再令 $W(Z) = [P_1(Z) - P_2(Z)]w(Z)$, 则 (27) 式转化成

$$\frac{dW(Z)}{dZ} = (m_1 - m_2)(1 + Z)w(Z), \quad (29)$$

因为当 $\tau \in (0, \delta)$ 时, $f(\tau) > 0$, $P_i(\tau) > 0$, 且 $P_1(\tau)P_2(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 点有二阶零点, 故 $\lim_{Z \rightarrow 0} w(Z) = 0$, 即 $W(0) = 0$, 又 $dW/dZ < 0$, 由此推出 $W(Z) < 0$ [$Z \in (0, \delta)$], 从而 $P_1(\tau) < P_2(\tau)$, 亦即 $P_i(Z)$ 关于 m_i 是单调增加的。

引理 2 若对两个 m_i ($i = 1, 2$), $m_1 < m_2$, 问题

$$\frac{dP}{dZ} = m(1 + Z) - \frac{AZ(Z - \theta)}{P}, \quad (30)$$

$$P(0) = P(\theta) = 0, \quad P(Z) > 0 \quad (Z \in (0, \theta)), \quad (31)$$

有解 $P_i(Z) \equiv P_{m_i}(Z)$, 则对任何 $m \in (m_1, m_2)$, (30)、(31) 式必有解 $P = P_m(Z)$ 。

证明 利用引理 1 中 $P_m(Z)$ 关于 m 的单调性立刻可得到引理的结论。

引理 3 设 $\{m_i\}$ 是一列单调上升的序列, 且 $m_i \rightarrow m^*$ ($i \rightarrow \infty$), 若 $m = m_i$ 时 (30)、(31) 式有解 $P_i(Z)$, 则 $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i(Z) = P^*(Z)$ 存在且 $P^*(Z)$ 是 (30)、(31) 式当 $m = m^*$ 时的解。

证明 由 (30)、(31) 式可得

$$\frac{1}{2} P_i^2(Z) = m_i \int_0^Z (1 + \tau) P_i(\tau) d\tau - \int_0^Z A \tau(\tau - \theta) d\tau, \quad (32)$$

记 $M_i = \max P_i(Z)$, $a = -m_i(\theta + \theta^2/2)$, $b = A\theta^3/4$, 于是

$$\frac{1}{2} M_i^2 \leq a M_i + b, \quad (33)$$

由此推出 M_i 有界。又由于 $P_i(Z)$ 关于 m_i 是单调上升且有上界 (其上界为同宿轨道), 于是 $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i(Z) = P^*(Z)$, 对 (32) 式利用 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\begin{cases} \frac{1}{2} P^{*2}(Z) = m^* \int_0^Z P^*(\tau)(1 + \tau) d\tau - \int_0^Z A \tau(\tau - \theta) d\tau, \\ P^*(0) = P^*(\theta) = 0, \quad P^*(Z) > 0, \quad (Z \in (0, \theta)), \end{cases}$$

从而可知 $P^*(Z)$ 是 (30)、(31) 式对应于 $m = m^*$ 的一个解。

下面利用上述引理及追赶法特殊技巧来证明单调行波解的存在性。

定理 1 当 $m \in (-\infty, m_0]$ 时存在唯一的单调行波解 $Z(\xi)$, 满足 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Z(\xi) = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Z(\xi) = \theta$ 。

证明 记从 $(0, 0)$ 出发位于第一象限内的轨线为 $P_m(Z)$, 由于 $Z' = P > 0$, 故轨线 $P_m(Z)$ 与 $O_\varepsilon = \{(Z, P) | Z^2 + P^2 = \varepsilon^2\}$ (ε 为充分小正数), 在第一象限相交后, 不能再与 P 轴相交。其次证明当 $Z \in (0, \theta)$ 时轨线不能与 Z 轴相交。现在过 $(\theta, 0)$ 点作直线 $L_1: P = -\gamma(Z - \theta)$, γ 为充分小待定常数。记由直线 L_1 , $Z = \varepsilon$ 与 Z 轴围成的区域为 Δ (见图 2), 则在 Δ 内成立, $0 < P < -\gamma(Z - \theta)$, 因为 $m < 0$, 故 $-m\gamma(Z - \theta) < mP < 0$, 在 Δ 内考虑

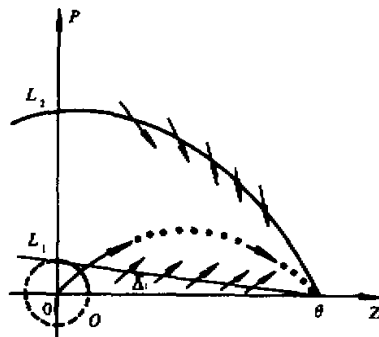


图 2 单调行波解的存在性

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dZ} &= m(1+Z) - \frac{AZ(Z-\theta)}{P} = \frac{mP(1+Z) - AZ(Z-\theta)}{P} \\ &> \frac{m\gamma(1+Z)(\theta-Z) - AZ(Z-\theta)}{P} > \frac{m\gamma(1+\theta) + A\varepsilon}{P}(\theta-Z), \end{aligned}$$

取 $\gamma < -A\varepsilon / m(1+\theta)$ 时, 有 $m\gamma(1+\theta) + A\varepsilon > 0$, 从而在 Δ 内 $dP/dZ > 0$, 即在 Δ 内轨线不会流向 Z 轴且与 Z 轴相交。过 $(\theta, 0)$ 作曲线 L_2 :

$$L_2: \quad \bar{P} = -\delta(Z - \theta) + \frac{m}{2}(Z^2 - \theta^2), \quad (\delta \text{ 为待定正常数}), \quad (34)$$

下面证明轨线不会与 L_2 相交。显然 $d\bar{P}/dZ = -\delta + mZ$ 。若 $P(Z)$ 与 $\bar{P}(Z)$ 在第一象限内相交于某点 (Z, P) , 则在此点

$$\frac{dP}{dZ} = m(1+Z) - \frac{AZ(Z-\theta)}{-\delta(Z-\theta) + \frac{m}{2}(Z-\theta)} = m(1+Z) + \frac{AZ}{\delta - \frac{m}{2}(Z+\theta)}$$

由于

$$\frac{d}{dZ} \left\{ \frac{Z}{\delta - \frac{m}{2}(Z+\theta)} \right\} = \frac{\delta - \frac{m}{2}\theta}{[\delta - \frac{m}{2}(Z+\theta)]^2} > 0,$$

故

$$\frac{AZ}{\delta - \frac{m}{2}(Z+\theta)} < \frac{A\theta}{\delta - m\theta}, \quad (Z \in [0, \theta])$$

于是

$$\frac{dP}{dZ} < m(1+Z) + \frac{A\theta}{\delta - m\theta} < -\delta + mZ, \quad (35)$$

从而我们选择 δ 如下, 使

$$G(\delta) = \delta^2 + \delta m(1-\theta) + (A - m^2)\theta < 0, \quad (36)$$

亦即判别式 $[m(1-\theta)]^2 - 4(A - m^2)\theta > 0$, 解出 $m < -2\sqrt{A\theta}/(1+\theta) = m_0$, 于是当 $m < m_0$ 时, 不等式 (36) 有解. 记 (36) 式中 $G(\delta) = 0$ 的两根为 $\delta_{\pm}$,

$$\delta_{\pm} = \frac{1}{2}[-m(1-\theta) \pm \sqrt{m^2(1-\theta)^2 - 4(A - m^2)\theta}].$$

不妨设 $0 < \theta < 1$, 从而 $\delta_+ > 0$, 选择 δ 如下:

$$\max(\delta_-, 0) < \delta < \frac{1}{2}[-m(1-\theta) + \sqrt{m^2(1-\theta)^2 - 4(A - m^2)\theta}]. \quad (37)$$

当 δ 满足 (37) 式时, $dP/dZ|_{L_2} < d\bar{P}/dZ$, 从而当 $m < m_0$ 时, $P_m(Z)$ 不能穿越 L_2 ($Z \in (0, \theta)$), 亦即 $P_m(Z)$ 在 L_2 的下方. 于是从 $(0, 0)$ 出发的轨线 $P_m(Z)$ 与 O_s 相交于第一象限后, 既不能穿越 L_2 ($Z \in (0, \theta)$), 又不能进入 Δ 区域, 且 $Z' = P > 0$, 故轨线当 $\xi \rightarrow +\infty$ 时, $P_m(Z)$ 必将进入 $(\theta, 0)$ 点, 即单调行波解是存在的.

当 $m = m_0$ 时, 取一系列 $\{m_n\}$, $m_n < m_0$, 且 m_n 单调增加到 m_0 , 由引理 3 可知, 极限情形亦存在单调行波解, 又由引理 1、2 易知, 当 $m \leq m_0$ 时单调行波解是唯一的 (见图 3).

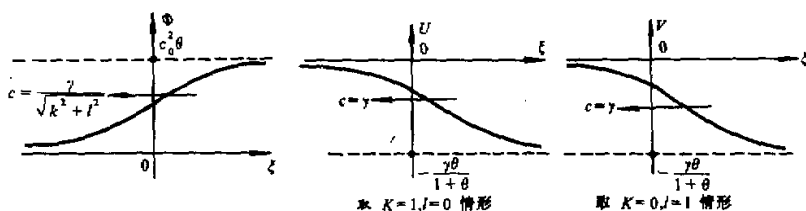


图 3 单调行波解 Φ , U , V 图形

如上我们从理论上证明了当 $m \leq m_0$ 时存在单调行波解, 一般来说要寻找单调行波解的解析表达式是相当困难的. 下面在一组特殊参数下我们找到了解析表达式. 利用单调行波解的行为, 当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时, $Z'(-\infty) = 0$; $Z'(+\infty) = 0$. 而 $\xi \rightarrow -\infty$ 对应于 $Z = 0$, 而 $\xi \rightarrow +\infty$ 时对应于 $Z = \theta$, 故不妨设

$$Z' = \alpha Z(Z - \theta), \quad (\alpha \text{ 是待定常数}), \quad (38)$$

于是 $Z'' = \alpha(2Z - \theta)Z' = \alpha^2 Z(2Z - \theta)(Z - \theta)$, 把 Z' 和 Z'' 代入 (14) 式可得

$$(2\alpha - m)\alpha Z - (\alpha^2 \theta + m\alpha - A) \equiv 0, \quad (39)$$

从而得到

$$\alpha = \frac{m}{2} < 0, \quad \alpha = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4A\theta}}{2\theta}. \quad (40)$$

由 (40) 式可知 m 应满足如下关系式:

$$\frac{-m - \sqrt{m^2 + 4A\theta}}{2\theta} = \frac{m}{2}, \quad (41)$$

由 (41) 式可解出 $m = \bar{m}_0 = -2\sqrt{\frac{A}{\theta+2}}$. 当 $m = \bar{m}_0$ 时, $\bar{\alpha}$ 选择为 $-\sqrt{\frac{A}{\theta+2}}$, 如此选择的 $\bar{\alpha}$ 代入 (38) 式并对 ξ 积分可得

$$\Phi = c_0^2 Z = c_0^2 \frac{\theta}{1 + e^{\bar{\alpha}\theta\xi}} = c_0^2 \theta [1 + e^{-\sqrt{\frac{A}{\theta+2}}\theta(kx + ly - \tau)}]^{-1}, \quad (42)$$

$\bar{m}_0$ 明显小于 m_0 . $\bar{m}_0$ 处在单调行波解存在范围内。

四、振荡型行波解存在性

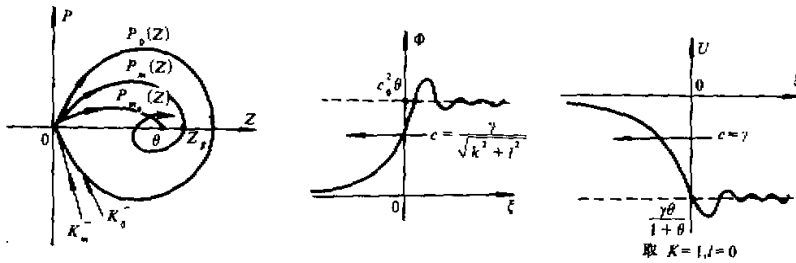
前面已讨论了 $m = 0$ 时是一支同宿轨道, $m \in (-\infty, \bar{m}_0]$ 时存在单调行波解。下面讨论对 $0 < m < m_0$ 时有振荡型行波解。

定理 2 当 $m \in (m_0, 0)$ 时, 存在振荡型行波解 $Z(\xi)$, 满足 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Z(\xi) = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Z(\xi) = \theta$ 。

证明 由前面讨论可知当 $m = 0$ 时存在一支同宿轨道 $P_0(Z)$, 当 $m \leq m_0$ 时存在唯一的单调行波解。由引理 1 可知 $P_m(Z)$ 从 $(0, 0)$ 出发在 $(0, 0)$ 邻域内关于 m 是单调上升的, 故当 $m \in (m_0, 0)$ 时, 轨线 $P_m(Z)$ 在 $(0, 0)$ 邻域内夹在 $P_0(Z)$ 与 $P_{m_0}(Z)$ 之间。显然 $P_m(Z)$ 不能与同宿轨道相交或相切。若在第一象限内 (Z, P) 点相交或相切, 由于

$$\left. \frac{dP_m}{dZ} \right|_{(Z,P)} = m(1+Z) - \frac{AZ(Z-\theta)}{P} < -\frac{AZ(Z-\theta)}{P} = \left. \frac{dP_0}{dZ} \right|_{(Z,P)},$$

故相交或相切是不可能的。又由于 $(\theta, 0)$ 为焦点, 而在第一象限内 $Z' = P > 0$, 故轨线一定在某一个 ξ_0 与 Z 轴相交, 设交点为 $(Z_\beta, 0)$, 又因轨线相交后, $P < 0$, 由 $Z' = P < 0$, 故轨线在第四象限内 Z 是减少, 而 $(0, 0)$ 鞍点, 加上第四象限进入 $(0, 0)$ 点的方向 $K_m^- = \frac{1}{2}[m - \sqrt{m^2 + 4A\theta}]$, 但同宿轨道进入 $(0, 0)$ 点方向 $K_0^- = -\sqrt{A\theta}$, 于是 $K_0^- > K_m^-$, 从而当 $m \in (m_0, 0)$ 时, 在第四象限内进入 $(0, 0)$ 鞍点的方向在同宿轨道外面, 故 $P_m(Z)$ 在第四象限内不能进入 $(0, 0)$ 点 (显然 $P_m(Z)$ 在第四象限内不能与 $P_0(Z)$ 相交或相切), 于是轨道必然进入 $(\theta, 0)$ 焦点, 亦即振荡型行波解是存在的 (见图 4)。

图4 振荡型行波解($m \in (m_0, 0)$)

五、结 束 语

以上讨论可知,在半地转模式中确实存在非线性慢波行波解,且解的结构与摩擦有关。当 $\mu=0$ 即无摩擦时,系统只可能产生周期解与孤波解;当 $0 < \mu < \mu_0$ 即有较小摩擦时,系统存在振荡型行波解;当 $\mu \geq \mu_0$ 即较大摩擦时系统存在单调行波解,其中 μ_0 满足

$$\mu_0^2 = \frac{4k^2}{k^2 + l^2} c_0^2 \frac{\beta^2}{f_0} \left(1 - \frac{c_0^2}{c_x^2} \frac{\beta}{f_0^2} \right), \quad (43)$$

其中 $c_x = -v/\kappa$, 记 c_x^* (临界波速) $= \beta c_0^2 / f_0^2$, 则 $c_x \geq c_x^*$ 。下面讨论各个参数之间的制约关系。

第一种情形 若 k, l, v, c_0^2 固定, β, f_0 变化。因

$$f_0 \approx 2\Omega \sin \varphi, \quad \beta \approx \frac{2\Omega \cos \varphi}{R}, \quad (44)$$

其中 $\Omega \approx 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 为地球自转角速度, $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ 为地球半径, 把 (44) 式代入 (43) 式可得

$$\mu_0^2(\varphi) = \frac{4k^2 c_0^2}{k^2 + l^2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 \right) \left(1 - \frac{c_0^2}{2\Omega R c_x} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} \right). \quad (45)$$

下面我们讨论纬度 φ 变化对 μ_0 的影响, 记

$$M = \frac{4k^2 c_0^2}{k^2 + l^2} \frac{1}{R^2}, \quad r = \frac{1}{2\Omega R} \frac{c_0^2}{c_x}, \quad x = \frac{1}{\sin^2 \varphi},$$

则 (45) 式变为

$$\frac{1}{M} \mu_0^2(\varphi) = (x-1)(1-r\sqrt{x(x-1)}) \equiv F(x). \quad (46)$$

首先考虑 $F(x) = 0$, 推出 $x_1 = 1$, $x_2 = (r + \sqrt{r^2 + 4})/2r$, 即

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \arcsin \left[\frac{r\sqrt{r^2+4} - r^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (47)$$

另外考虑 $F'(x) = 0$ 的点 x_0 ,

$$F'(x) = 1 - r\sqrt{x(x-1)} - \frac{r(x-1)(2x-1)}{2\sqrt{x(x-1)}}, \quad (48)$$

亦即 x 满足方程

$$\frac{x}{x-1} = \frac{r^2}{4}(4x-1)^2, \quad (x > 1) \quad (49)$$

令 $y_1 = \frac{r^2}{4}(4x-1)^2$, $y_2 = \frac{x}{x-1}$, 由图 5 可知存在唯一的 x_0 ($x_0 > 1$) 满足 (49) 式, 从而

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x_0}}. \quad (50)$$

显然 $\varphi = \varphi_0$ 时, $\mu_0^2(\varphi)$ 在 $\varphi \in [\varphi_2, \pi/2]$ 时取得极大值 (见图 6)。

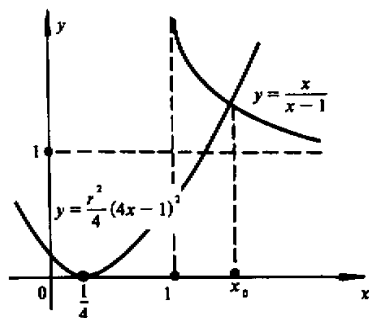


图 5 $F'(x) = 0$ 的解 x_0

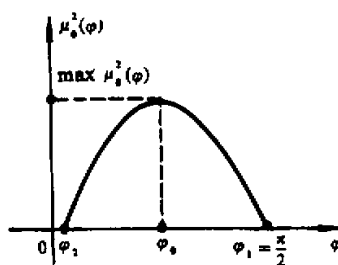


图 6 $\mu_0^2(\varphi)$ 的图象

从上面讨论可知, 在高纬地区, $\varphi \sim \pi/2$, 在低纬地区, $\varphi \sim \varphi_2$, 此时 μ_0 非常小, 于是易产生单调型行波解; 在中纬地区, $\varphi \sim \varphi_0$, μ_0 变得较大, 故 μ 易满足 $\mu < \mu_0$, 从而易产生振荡型行波解。由此可以预测在中纬地区, 锋面过后, 一些物理量由振荡性衰减到一个定常量。

第二种情形 设 k 、 l 、 β 、 f_0 与 c_x 固定, 此时仅考虑 μ_0^2 与 c_0^2 之间的关系。

$\mu_0^2 = \frac{4\beta^2 k^2}{k^2 + l^2} \frac{1}{f_0^4} c_0^2 (f_0^2 - \frac{\beta}{c_x} c_0^2)$, 当 $c_0^2 \in [0, \frac{f_0^2 c_x}{2\beta}]$ 内, μ_0^2 是 c_0^2 单调增加函数; 而当 $c_0^2 \in [\frac{f_0^2 c_x}{2\beta}, \frac{f_0^2 c_x}{\beta}]$ 时, μ_0^2 是 c_0^2 单调下降函数。记 $c_0^* = f_0 \sqrt{c_x / \beta}$ 为 c_0 的极限速度, 则

当 c_0 接近于 0 或 c_0^* 时 μ_0 很小, 易产生单调行波解; 当 c_0 接近于 $c_0^*/2$ 时, μ_0 最大, 此时易产生振荡型行波解。

第三种情形 设 k, l, β, f_0 与 c_0^2 固定, 此时 $c_x \geq c_x^*$, c_x 接近临界波速 c_x^* 时, μ_0 很小, 易产生单调行波解; 当 $c_x \gg c_x^*$ 时, μ_0 较大, 易产生振荡型行波解。

以上定性地讨论了非线性 Rossby 行波解的存在性及各参数变化对 Rossby 行波解的影响, 对于这类波解的实际存在性有待于我们以后进一步观测证实。

致 谢: 本文作者曾与张铭同志进行许多有益的讨论, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 杨大升等, 1980, 动力气象学, 气象出版社。
- [2] Fisher, R. F., 1937, The advance of advantageous genes, *Ann. of Eugenics*, 7, 355-369.
- [3] Kolmogorov, A., I. Petrovskij & N. Piskunov, 1937, Etude de lequation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a une probleme biologique, *Bull. Univ. Moscou, Ser. Int. Section A1*, 6, 1-25.
- [4] 管克英等, 1987, Burgers-KdV 混合型方程行波解的定性分析, 中国科学, A 辑, No.1, 64-73.
- [5] Haddler, K. P. & F. Roth, 1975, Travelling fronts in nonlinear diffusion equations, *J. Math. Biol.*, 2, 251-263.
- [6] 叶其孝、李正元, 1990, 反应扩散方程引论, 科学出版社。
- [7] 黄思朗、张 铭, 1991, 非线性重力行波解的研究, 中国科学, B 辑, No.10, 1111-1121.

On the Nonlinear Slow Travelling Wave in the Semi-Geostrophic Model

Huang Sixun and Xiang Jie

(Air Force Meteorological Institute, Nanjing 211101)

Abstract

In this paper, we have discussed the existence of nonlinear Rossby travelling waves with Rayleigh friction, and with a static flow as the basic flow under the semi-geostrophic approximation. The results show that when $\mu = 0$ there exists a solitary wave and periodic solutions; when $0 < \mu < \mu_0$ there exists an oscillatory travelling wave; when $\mu \geq \mu_0$, there exists a monotonic travelling wave. In particular, given a specific series of parameters, we have found an analytical solution for the monotonic travelling wave. In the end, we have pointed out that in the mid-latitude region for wave velocity $c_x \gg c_x^*$ (critical wave velocity) the oscillatory travelling wave of the system easily appears, but in the high and low latitude regions, for c_x close to c_x^* , the monotonic travelling wave easily appears.

Key words: homoclinic; monotonic travelling wave solution; oscillatory travelling wave solution; reaction-diffusion equation; critical wave velocity.