

# 完全保持能量守恒的非常定 自适应网格模式

刘 卓 曾庆存

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

## 提 要

本文基于自适应网格的原理, 发展了一套网格随时间变的自适应网格模式。该模式保持着 IAP 模式原有的整体积分性质, 并具有在任何时刻可随意调整网格点的疏密程度及网格点与边界相重合的特点。可用于台风路径的数值预报等方面。

**关键词:** 自适应网格模式; 网格非常定; 能量守恒。

## 一、引 言

文献[1]中, 我们介绍了网格常定的自适应网格模式, 该模式适用于区域边界不规则的系统的问題, 例如, 在近岸海流的计算中海岸线比较复杂的问题; 还有就是系统需要在局部区域加密网格的问题, 如, 某些系统在局部区域的变化尺度比较小, 在较粗的网格系统中反映不出来, 象赤道逆流等, 或者是系统在较粗的网格系统中局部区域容易出现计算紊乱, 如在地形非常陡峭的区域等。这些都需要在该区域加密网格, 以提高分辨率, 增加计算可靠性。以上这些问题均可用文献[1]中网格常定的自适应网格模式。

倘若我们不能预先知道需要加密网格的区域, 如锋面、飑线的形成等问题, 或者所研究的系统随时间变而需要加密网格的区域也随时间变的问题, 如台风路径的数值预报, 由于台风中心附近压力梯度以及速度变化均比较剧烈, 因而需要在台风中心附近加密网格, 以提高分辨率。但由于台风中心的位置是随时间变化的, 因而要求网格加密的区域也能随台风中心的移动而移动。诸如此类的问题, 就要求网格点能够适时和比较灵活地改变, 以适应任何时刻物理量空间分布的特点。

因此, 本文的主要内容是要设计一个网格既能在局部区域加密而又能随时间变化的模式。文献[2]中介绍了自适应网格的原理及其构造方法, 由该网格的特点使我们构造非常定的自适应网格模式成为可能。即在 $(\xi, \eta, \tau)$ 坐标系与 $(x, y, t)$ 坐标系之间寻找一个一一对应的映射:

$$x = x(\xi, \eta, \tau), \quad y = y(\xi, \eta, \tau), \quad t = \tau,$$

它把 $\xi-\eta$ 平面上的矩形区域 $D'$ 映射到 $X-Y$ 平面上的计算区域 $D(\tau)$ , 映射可通过自适

应网格生成法中的权函数  $W(x, y, t) = W(x(\tau), y(\tau))$  来确定, 由文献[2]可知, 权函数  $W(x, y, t)$  的作用就是调节网格点的疏密程度, 例如在某些区域网格点需要加密, 则可将  $W$  取大一些; 反之,  $W$  取小一些。因此, 权函数  $W(x, y, t)$  的选取可与所求物理量  $A(x, y, t)$  的空间分布有关。例如, 在物理量  $A(x, y, t)$  梯度很大的区域加密网格, 而在其它区域网格稀疏一些, 则  $W(x, y, t)$  可取为

$$W(x, y, t) = \sqrt{1 + \alpha [\nabla A(x, y, t)]^2},$$

$\alpha > 0$  是常数, 视具体情况而定。因此, 在物理量  $A$  梯度大的地方,  $W$  也大, 其相应的区域网格点就要密集一些。

在台风路径的数值预报当中,  $w(x, y, t)$  可取为

$$w(x, y, t) = B e^{-\beta r^2},$$

$$r^2 = [x - xc(t)]^2 + [y - yc(t)]^2,$$

其中,  $B$ 、 $\beta$  为常数,  $[xc(t), yc(t)]$  为台风中心  $t = t$  时刻的位置。因此, 在台风中心附近,  $W$  达到最大值, 因而网格最密; 而在远离台风中心的地方,  $W$  迅速减小, 因而网格比较稀。

在实际计算中, 只需构造离散时刻  $\tau = \tau^{n+1}$  时区域  $D(\tau^{n+1})$  内的计算网格, 如果计算区域的边界  $\partial D(\tau)$  也随时间变化, 就要先确定区域边界在  $\tau = \tau^{n+1}$  时刻的位置, 以此作为变换满足的方程组的边界条件, 再根据物理量  $A(x, y, t)$  在  $t = t^n$  时刻的分布来确定权函数  $W(x, y, t^{n+1})$ , 最后利用自适应网格生成法来构造  $\tau = \tau^{n+1}$  时刻的曲线网格。

## 二、非常定自适应网格模式的方程及守恒性

### 1. 地图投影坐标下的正压原始方程

取局地笛卡尔地图投影坐标下的浅水波方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + m \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -m \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + m \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -m \frac{\partial \varphi}{\partial y} - f u, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + m^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u \varphi}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v \varphi}{m} \right) \right] = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $m$  是地图投影放大系数, 它只是纬度的函数。

为构造完全保持能量守恒的差分格式, 作 IAP 变量替换<sup>[3, 4]</sup>

$$U = \Phi u, \quad V = \Phi v, \quad \Phi = \sqrt{\varphi},$$

则可推出

$$\begin{cases}
 \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\partial U(\frac{u}{m})}{\partial x} + (\frac{u}{m}) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\partial U(\frac{v}{m})}{\partial y} + (\frac{v}{m}) \frac{\partial U}{\partial y} \right] \\
 = -m\Phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + fV, \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\partial V(\frac{u}{m})}{\partial x} + (\frac{u}{m}) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\partial V(\frac{v}{m})}{\partial y} + (\frac{v}{m}) \frac{\partial V}{\partial y} \right] \\
 = -m\Phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + fU, \\
 \frac{\partial \phi}{\partial t} + m^2 \left[ \frac{\partial (\frac{U}{m})\Phi}{\partial x} + \frac{\partial (\frac{V}{m})\Phi}{\partial y} \right] = 0.
 \end{cases} \quad (2)$$

容易证明, 方程(2)具有总能量及总质量守恒的性质

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_B \frac{U^2 + V^2 + \phi^2}{m^2} dx dy = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \iint_B \frac{\phi}{m^2} dx dy = 0.$$

## 2. 非常定自适应网格坐标下方程的变形

为将笛卡尔坐标系 $(x, y, t)$ 下满足的方程变换到参数平面坐标系 $(\xi, \eta, \tau)$ 中去, 需要下面的坐标变换关系式:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{(x,y,t)} &= \left( \frac{\partial A}{\partial \tau} \right)_{(\xi,\eta,\tau)} - x_\tau \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{(x,y,t)} - y_\tau \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)_{(x,y,t)} \\
 \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{(x,y,t)} &= \frac{1}{J} \left[ y_\eta \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{(\xi,\eta,\tau)} - y_\xi \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)_{(\xi,\eta,\tau)} \right], \\
 \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)_{(x,y,t)} &= \frac{1}{J} \left[ -x_\eta \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{(\xi,\eta,\tau)} + x_\xi \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)_{(\xi,\eta,\tau)} \right],
 \end{aligned}$$

其中 $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ 为坐标变换的 Jacobi 项, 于是

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{(x,y,t)} = \left( \frac{\partial A}{\partial \tau} \right)_{(\xi,\eta,\tau)} - \frac{1}{J} (y_\tau x_\tau - x_\eta y_\tau) \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_{(\xi,\eta,\tau)} - \frac{1}{J} (-y_\xi x_\tau + x_\xi y_\tau) \left( \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)_{(\xi,\eta,\tau)}$$

由于坐标 $x = x(\xi, \eta, \tau)$ ,  $y = y(\xi, \eta, \tau)$ 是时间 $\tau$ 的函数, 因此, Jacobi 项 $J$ 也是时间 $\tau$ 的函数,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \tau} &= x_{\xi\tau} y_\eta + x_\xi y_{\eta\tau} - x_{\eta\tau} y_\xi - x_\eta y_{\xi\tau} = x_{\xi\tau} y_\eta - x_{\eta\tau} y_\xi + x_\xi y_{\eta\tau} - x_\eta y_{\xi\tau} \\
 &= (x_\tau y_\eta)_\xi - (x_\tau y_\xi)_\eta - (x_\xi y_\tau)_\eta - (x_\eta y_\tau)_\xi \\
 &= (y_\eta x_\tau - x_\eta y_\tau)_\xi + (-y_\xi x_\tau + x_\xi y_\tau)_\eta.
 \end{aligned}$$

地图投影放大系数 $m$ 与自适应网格的坐标有关, 因而也是时间 $\tau$ 的函数, 定义

$$u_1 = y_\eta x_\tau - x_\eta y_\tau, \quad v_1 = -y_\xi x_\tau + x_\xi y_\tau,$$

则

$$\left(\frac{\partial(1/m)}{\partial\tau}\right)_{(\xi,\eta,\tau)} = \left(\frac{\partial(1/m)}{\partial t}\right)_{(x,y,t)} + \frac{1}{J} \left[ u_1 \left(\frac{\partial(1/m)}{\partial\xi}\right)_{(\xi,\eta,\tau)} + v_1 \left(\frac{\partial(1/m)}{\partial\eta}\right)_{(\xi,\eta,\tau)} \right],$$

右端第一项为 0, 所以

$$\left(\frac{\partial(1/m)}{\partial\tau}\right)_{(\xi,\eta,\tau)} = \frac{1}{J} \left[ u_1 \left(\frac{\partial(1/m)}{\partial\xi}\right)_{(\xi,\eta,\tau)} + v_1 \left(\frac{\partial(1/m)}{\partial\eta}\right)_{(\xi,\eta,\tau)} \right],$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{J}/m)}{\partial\tau} &= \sqrt{J} \frac{\partial(1/m)}{\partial\tau} + \frac{1}{m} \frac{\partial\sqrt{J}}{\partial\tau} \\ &= \sqrt{J} \frac{1}{J} \left( u_1 \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi} + v_1 \frac{\partial(1/m)}{\partial\eta} \right) + \frac{1}{m} \frac{1}{2\sqrt{J}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{J}} \left( u_1 \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi} + v_1 \frac{\partial(1/m)}{\partial\eta} \right) + \frac{1}{2\sqrt{J}} \left( \frac{\partial(u_1/m)}{\partial\xi} + \frac{\partial(v_1/m)}{\partial\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{J}} \left( u_1 \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi} + \frac{\partial(u_1/m)}{\partial\xi} \right) + \frac{1}{2\sqrt{J}} \left( v_1 \frac{\partial(1/m)}{\partial\eta} + \frac{\partial(v_1/m)}{\partial\eta} \right). \end{aligned}$$

由上式并方程(2), 可得非常定的地图投影坐标下的自适应网格模式的方程,

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tau} - \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{J})u_1}{\partial\xi} + u_1 \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{J})}{\partial\xi} \right] - \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{J})v_1}{\partial\eta} + v_1 \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{J})}{\partial\eta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{m})u_2}{\partial\xi} + u_2 \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{m})}{\partial\xi} \right] + \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{m})v_2}{\partial\eta} + v_2 \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{m})}{\partial\eta} \right] \\ &= -\frac{\Phi}{\tilde{J}} \left( y_\eta \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{m})}{\partial\xi} - y_\xi \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{m})}{\partial\eta} \right) + f\tilde{V}, \\ &\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tau} - \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{J})u_1}{\partial\xi} + u_1 \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{J})}{\partial\xi} \right] - \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{J})v_1}{\partial\eta} + v_1 \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{J})}{\partial\eta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{m})u_2}{\partial\xi} + u_2 \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{m})}{\partial\xi} \right] + \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{m})v_2}{\partial\eta} + v_2 \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{m})}{\partial\eta} \right] \\ &= -\frac{\Phi}{\tilde{J}} \left( -x_\eta \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{m})}{\partial\xi} + x_\xi \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{m})}{\partial\eta} \right) - f\tilde{U}, \\ &\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tau} - \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{J})u_1}{\partial\xi} + u_1 \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{J})}{\partial\xi} \right] - \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{J})v_1}{\partial\eta} + v_1 \frac{\partial(\tilde{\Phi}/\tilde{J})}{\partial\eta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\tilde{U}/\tilde{J})\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial(\tilde{V}/\tilde{J})\Phi}{\partial\eta} \right] = 0, \\ &\frac{\partial\tilde{m}}{\partial\tau} = \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{m}/\tilde{J})u_1}{\partial\xi} + u_1 \frac{\partial(\tilde{m}/\tilde{J})}{\partial\xi} \right] + \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\tilde{m}/\tilde{J})v_1}{\partial\eta} + v_1 \frac{\partial(\tilde{m}/\tilde{J})}{\partial\eta} \right] \\ &\frac{\partial\tilde{J}}{\partial\tau} = \frac{1}{2\tilde{J}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\eta} \right), \end{aligned} \right. \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned}\tilde{J} &= \sqrt{J}, \quad \tilde{m} = \tilde{J}/m, \quad u_2 = (y_\eta u - x_\eta v)/m, \quad v_2 = (-y_\xi u + x_\xi v)/m, \\ \tilde{F} &= F\tilde{m}, \quad F = U, V, \varphi, \quad \tilde{U}_1 = y_\eta \tilde{U} - x_\eta \tilde{V}, \quad \tilde{V}_1 = -y_\xi \tilde{U} + x_\xi \tilde{V}.\end{aligned}$$

当网格不随时间变化的时候, 方程(3)就是方程(2)在空间坐标变换后的改写. 但当网格坐标随时间而变化时, 就多出了一些含有  $u_1$  和  $v_1$  的项. 此外, 在对时间  $\tau$  的偏导数当中出现了  $\sqrt{J}/m$ ——这正体现了网格点的相对面积是时间的函数.

为简单起见, 定义如下的微分算子:

$$\begin{aligned}L_1(\tilde{F}) &= \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{J}})u_1}{\partial\xi} + u_1 \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{J}})}{\partial\xi} \right] + \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{J}})v_1}{\partial\eta} + v_1 \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{J}})}{\partial\eta} \right], \quad F = U, V, \varphi, m, \\ L_2(\tilde{F}) &= \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{m}})u_2}{\partial\xi} + u_2 \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{m}})}{\partial\xi} \right] + \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{m}})v_2}{\partial\eta} + v_2 \frac{\partial(\frac{\tilde{F}}{\tilde{m}})}{\partial\eta} \right], \quad F = U, V, \\ P_x(\tilde{\varphi}) &= \frac{\Phi}{\tilde{J}} \left( y_\eta \frac{\partial(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}})}{\partial\xi} - y_\xi \frac{\partial(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}})}{\partial\eta} \right), \quad P_y(\tilde{\varphi}) = \frac{\Phi}{\tilde{J}} \left( -x_\eta \frac{\partial(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}})}{\partial\xi} + x_\xi \frac{\partial(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}})}{\partial\eta} \right), \\ D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1) &= \frac{1}{\tilde{m}} \left[ \frac{\partial(\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{J}})\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial(\frac{\tilde{V}_1}{\tilde{J}})\Phi}{\partial\eta} \right],\end{aligned}$$

于是, 方程(3)可简记为

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tau} - L_1(\tilde{U}) + L_2(\tilde{U}) = -P_x(\tilde{\varphi}) + f\tilde{V}, \\ \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tau} - L_1(\tilde{V}) + L_2(\tilde{V}) = -P_y(\tilde{\varphi}) - f\tilde{U}, \\ \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau} - L_1(\tilde{\varphi}) + D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1) = 0, \\ \frac{\partial\tilde{m}}{\partial\tau} = L_1(\tilde{m}), \\ \frac{\partial\tilde{J}}{\partial\tau} = \frac{1}{2\tilde{J}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\eta} \right). \end{cases} \quad (3)'$$

在周期边界条件或刚壁边界条件下, 上列微分算子有如下性质:

$$\begin{aligned}\iint_{\tilde{B}} L_1(\tilde{F})\tilde{F}d\xi d\eta &= 0, \quad F = U, V, \varphi, \\ \iint_{\tilde{B}} L_2(\tilde{F})\tilde{F}d\xi d\eta &= 0, \quad F = U, V, \\ \iint_{\tilde{B}} D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)\tilde{m}d\xi d\eta &= 0,\end{aligned}$$

$$\iint_B [\tilde{U} P_x(\tilde{\varphi}) + \tilde{V} P_y(\tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi} D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)] d\xi d\eta = 0,$$

$$\iint_B [\tilde{m} L_1(\tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi} L_1(\tilde{m})] d\xi d\eta = 0.$$

由这些性质容易推出方程(3)'满足总能量及总质量守恒:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_B (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 + \tilde{\varphi}^2) d\xi d\eta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \iint_B \tilde{\varphi} \tilde{m} d\xi d\eta = 0.$$

### 3. 非常定自适应网格坐标下的差分方程

首先定义差分算子及平均算子,

$$(\delta_\alpha A)_{l'} = A_{l'+\frac{1}{2}} - A_{l'-\frac{1}{2}}, \quad (\bar{A})_{l'} = \frac{1}{2} (A_{l'+\frac{1}{2}} + A_{l'-\frac{1}{2}}).$$

其中  $\alpha = \xi, \eta$ , 当  $A$  在整点上时,  $l' = l$ ; 在半点上时,  $l' = l + \frac{1}{2}$ . 本文采用 B-网格来离散方程(3)', 即  $u, v, x, y$  取在整点  $(i, j)$  上,  $\varphi$  取在半点  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$  上,  $J, m$  分别取在整点和半点上, 则差分算子取为

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{F})_{i,j} &= \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \delta_\xi \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right) u_1^\xi + u_1 \delta_\xi \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)^\xi \right] + \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ \delta_\eta \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right) v_1^\eta + v_1 \delta_\eta \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)^\eta \right] \\ &= \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ u_1^{-\xi} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{i+\frac{1}{2}} - u_1^{-\xi} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right]_j + \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ v_1^{-\eta} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{j+\frac{1}{2}} - v_1^{-\eta} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{j-\frac{1}{2}} \right]_i, \\ L_1(\tilde{F})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ u_1^{-\eta} \delta_\xi \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)^\xi + \delta_\xi u_1^{-\eta} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)^\xi \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ v_1^{-\xi} \delta_\eta \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)^\eta + \delta_\eta v_1^{-\xi} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)^\eta \right] \\ &= \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ u_1^{-\eta} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{i+\frac{3}{2}} - u_1^{-\eta} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right]_{j+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2\tilde{J}} \left[ v_1^{-\xi} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{j+\frac{3}{2}} - v_1^{-\xi} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{J}} \right)_{j-\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}}, \\ L_2(\tilde{F})_{i,j} &= \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \delta_\xi \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right) u_2^\xi + u_2 \delta_\xi \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right)^\xi \right] + \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \delta_\eta \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right) v_2^\eta + v_2 \delta_\eta \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right)^\eta \right] \\ &= \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ u_2^{-\xi} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right)_{i+\frac{1}{2}} - u_2^{-\xi} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right]_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\tilde{m}} \left[ \overline{v_2}^{-\eta}_{j+\frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right)_{j+1} - \overline{v_2}^{-\eta}_{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{F}}{\tilde{m}} \right)_{j-1} \right], \\
P_x(\tilde{\varphi})_{ij} &= \frac{1}{\tilde{f}} (\overline{y_\eta}^{-\xi} \tilde{\Phi} \delta_\xi \frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}}^\eta - \overline{y_\xi}^{-\eta} \tilde{\Phi} \delta_\eta \frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}}^\xi)_{ij}, \\
P_y(\varphi)_{ij} &= \frac{1}{\tilde{f}} (-\overline{x_\eta}^{-\xi} \tilde{\Phi} \delta_\xi \frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}}^\eta + \overline{x_\xi}^{-\eta} \tilde{\Phi} \delta_\eta \frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{m}}^\xi)_{ij}, \\
D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\tilde{m}} \left[ \delta_\xi \left( \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{f}} \right)^\eta \overline{\Phi}^{-\xi} + \delta_\eta \left( \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{f}} \right)^\xi \overline{\Phi}^{-\eta} \right]_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

于是可得差分方程为

$$\begin{cases}
\left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau} \right)_{ij} - L_1(\tilde{U})_{ij} + L_2(\tilde{U})_{ij} = -P_x(\tilde{\varphi})_{ij} + (f\tilde{V})_{ij}, \\
\left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tau} \right)_{ij} - L_1(\tilde{V})_{ij} + L_2(\tilde{V})_{ij} = -P_y(\tilde{\varphi})_{ij} - (f\tilde{U})_{ij}, \\
\left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - L_1(\tilde{\varphi})_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = 0, \\
\left( \frac{\partial \tilde{m}}{\partial \tau} \right)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = L_1(\tilde{m})_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}, \\
\left( \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tau} \right)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\tilde{f}} (\delta_\xi \overline{u_1}^{-\eta} + \delta_\eta \overline{v_1}^{-\xi})_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}.
\end{cases} \quad (4)$$

上列差分算子有与微分算子相对应的整体性质:

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} L_1(\tilde{F})_{ij} \tilde{F}_{ij} \Delta \xi \Delta \eta &= 0, \quad F = U, V, \\
\sum_{ij} L_1(\tilde{F})_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \Delta \xi \Delta \eta &= 0, \quad F = \varphi, m, \\
\sum_{ij} L_2(\tilde{F})_{ij} \tilde{F}_{ij} \Delta \xi \Delta \eta &= 0, \quad F = U, V, \\
\sum_{ij} D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \tilde{m}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \Delta \xi \Delta \eta &= 0, \\
[\sum_{ij} (\tilde{U} P_x(\tilde{\varphi}) + \tilde{V} P_y(\tilde{\varphi}))_{ij} + \sum_{ij} \tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} D(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}] \Delta \xi \Delta \eta &= 0, \\
\sum_{ij} [\tilde{m} L_1(\tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi} L_1(\tilde{m})]_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \Delta \xi \Delta \eta &= 0.
\end{aligned}$$

由于这些性质, 由(4)式不难推出, 当有周期或刚壁边界条件时, 在离散情况下仍有总能量及总质量守恒:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\sum_{ij} (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2)_{ij} + \sum_{ij} \tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^2] \Delta \xi \Delta \eta = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{ij} \tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \tilde{m}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \Delta \xi \Delta \eta = 0. \quad (5b)$$

如果时间差分取 Euler 前差, 即  $\delta_{\tau} A / \delta_{\tau} = (A^{n+1} - A^n) / \Delta \tau$ , 再定义时间平均算子:  $\bar{A}^{\tau} = (A^{n+1} + A^n) / 2$ , 而差分方程取梯形隐式:

$$\begin{cases} \left( \frac{\delta_{\tau} \tilde{U}}{\delta \tau} \right)_{ij} - L_1(\tilde{U}^{\tau}) + L_2(\tilde{U}^{\tau}) = -P_x(\tilde{\varphi}^{\tau}) + f\tilde{V}^{\tau}, \\ \left( \frac{\delta_{\tau} \tilde{V}}{\delta \tau} \right)_{ij} - L_1(\tilde{V}^{\tau}) + L_2(\tilde{V}^{\tau}) = -P_y(\tilde{\varphi}^{\tau}) - f\tilde{U}^{\tau}, \\ \left( \frac{\delta_{\tau} \tilde{\varphi}}{\delta \tau} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - L_1(\tilde{\varphi}^{\tau}) + D(\tilde{U}_1^{\tau}, \tilde{V}_1^{\tau}) = 0, \\ \left( \frac{\delta_{\tau} \tilde{m}}{\delta \tau} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = L_1(\tilde{m}^{\tau}), \\ \left[ \frac{\delta_{\tau} \tilde{J}}{\delta \tau} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\tilde{J}^{\tau}} (\delta_{\xi} \tilde{u}_1^{\tau} + \delta_{\eta} \tilde{v}_1^{\tau}). \end{cases} \quad (6)$$

差分算子中的  $1/\tilde{J}$ ,  $1/\tilde{m}$  分别用  $1/\tilde{J}^{\tau}$ ,  $1/\tilde{m}^{\tau}$  代替, 则代替(5)式还有

$$\frac{\delta_{\tau}}{\delta \tau} \left[ \sum_{ij} (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2)_{ij} + \sum_{ij} \tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^2 \right] \Delta \xi \Delta \eta = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\delta_{\tau}}{\delta \tau} \sum_{ij} \tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \tilde{m}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \Delta \xi \Delta \eta = 0 \quad (7b)$$

故方程(6)保持完全的能量及质量守恒。

### 三、时间积分方案

#### 1. 基于梯形隐式的时间积分的分解算法

为了节省计算的工作量, 在采用梯形隐式的差分方程的情况下, 将计算分解成适应过程、演变过程和网格坐标变换过程。

##### (1) 适应过程

$$\begin{cases} \tilde{U}_{ij}^1 = \tilde{U}_{ij}^n - \Delta \tau_1 [P_x(\tilde{\varphi}^{\tau})_{ij}^n - f\tilde{V}_{ij}^{\tau}], \\ \tilde{V}_{ij}^1 = \tilde{V}_{ij}^n - \Delta \tau_1 [P_y(\tilde{\varphi}^{\tau})_{ij}^n + f\tilde{U}_{ij}^{\tau}], \\ \tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^1 = \tilde{\varphi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - \Delta \tau_1 D(\tilde{U}_1^{\tau}, \tilde{V}_1^{\tau})_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n, \end{cases} \quad (8)$$

这里  $\bar{A}^{\tau} = \frac{1}{2}(A^1 + A^n)$ ,  $x^1 = x^n$ ,  $y^1 = yzjn$ 。因此,  $\tilde{J}^{\tau} = \tilde{J}^n$ ,  $\tilde{m}^{\tau} = \tilde{m}^n$ 。

算子符号的右上标  $n$ , 表示算子中的  $u$ 、 $v$ 、 $\Phi$  等均用第  $n$  层的值。



## (2) 演变过程

$$\begin{cases} \tilde{F}_{ij}^n = \tilde{F}_{ij}^{n-1} - \Delta\tau_{II} L_2(\tilde{F}^n)_{ij}, & F = U, V \\ \tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n = \tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-1}, \end{cases} \quad (9)$$

这里  $\tilde{A}^n = \frac{1}{2}(A^n + A^I)$ , 由于  $x^n = x^I, y^n = y^I$ , 因此,  $\tilde{J}^n = \tilde{J}^I, \tilde{m}^n = \tilde{m}^I$ .

同样, 算子符号的右上标 I 表示算子中的  $u, v, \Phi$  等均用第 I 层的值.

## (3) 网格坐标变换过程

根据物理量  $A^n = A(x^n, y^n, t^n)$  的空间分布, 确定权函数  $W(x, y, t^{n+1}) = f(A^n)$ ,  $A$  可以是  $u, v, \phi$  或者是其组合, 函数  $f(A)$  视具体问题而定, 它应能反映出物理量  $A$  的空间分布情况. 通过  $W = W(x, y, t^{n+1})$  来更新自适应网格坐标  $(x^{n+1}, y^{n+1}) = (x(\tau^{n+1}), y(\tau^{n+1}))$ . 从而有

$$\begin{aligned} x_\tau &= (x^{n+1} - x^n) / \Delta\tau_{III}, & y_\tau &= (y^{n+1} - y^n) / \Delta\tau_{III}, \\ u_1 &= y_\eta x_\tau - x_\eta y_\tau, & v_1 &= -y_\xi x_\tau + x_\xi y_\tau. \end{aligned}$$

其中,  $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta$  均取时间平均. 最后得到

$$\begin{cases} \tilde{J}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{J}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta\tau_{III}}{2\tilde{J}^n} (\delta_\xi \bar{u}_1 + \delta_\eta \bar{v}_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n, \\ \tilde{m}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{m}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n + \Delta\tau_{III} L_1(\tilde{m}^n)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n, \\ \tilde{F}_{ij}^{n+1} = \tilde{F}_{ij}^n + \Delta\tau_{III} L_1(\tilde{F}^n)_{ij}, & F = U, V, \\ \tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{\phi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n + \Delta\tau_{III} L_1(\tilde{F}^n)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n. \end{cases} \quad (10)$$

第一、第二个过程不涉及坐标变换, 因而可采用常定的自适应网格下的差分方程, 计算可以更简单一些, 本文之所以写成比较复杂的形式是为了整个过程的统一性.

三个过程均采用隐式的差分方程, 这样可以适当地放大时间步长. 此外, 三个过程的时间步长也可以是不一样的. 例如, 适应过程可采用  $\Delta\tau_I = 2 \text{ min}$ , 演变过程  $\Delta\tau_{II} = 10 \text{ min}$ , 网格坐标变换过程  $\Delta\tau_{III} = 30 \text{ min}$ ; 甚至  $\Delta\tau_{III} = 60 \text{ min}$ , 如果网格随时间变化不大的话.

即使作了上述分解, 整个过程仍满足完全的能量守恒及质量守恒.

## 2. 基于蛙跳格式的时间积分及时向滤波

按方程(4)求出各物理量在  $\tau = \tau^n$  时刻的时间倾向  $(\partial \tilde{F} / \partial \tau)^n, \tilde{F} = \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{\phi}, \tilde{m}, \tilde{J}$ . 然后采用蛙跳格式(Leap-frog scheme)

$$\tilde{F}^{n+1} = \tilde{F}^{n-1} + 2\Delta\tau \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} \right)^n, \quad (11)$$

求出  $\tau = \tau^{n+1}$  时刻的解.

为了消除蛙跳格式所产生的计算解, 本文采用 Robert 时间滤波方案,

$$\tilde{F}^* = \tilde{F}^n + \alpha(\tilde{F}^{n-1} - 2\tilde{F}^n + \tilde{F}^{n-1}), \quad (12)$$

用  $\tilde{F}^*$  来代替  $\tilde{F}^n$ ,  $\alpha$  可取为 0.025.

在计算过程中, 可在每一步时间积分后更新网格, 也可在进行若干步时间积分后更新网格.

这样的时间积分方案虽不能保证完全的能量守恒, 但实际应用表明, 只要  $\Delta\tau$  够小, 仍有较高精度.

#### 四、应用举例

利用这套模式, 我们作了台风路径数值预报的试验, 取得了良好的结果. 以 7908 号台风为例. 起始预报时间为 7 月 30 日 08 时.

图 1 给出了初始时刻自适应网格的分布情况, 网格最密处即为台风中心的初始位置. 图 2 给出了预报 72 小时后网格点的分布以及预报的路径和实况路径. 虚线代表预报的结果; 实线为观测路径. 从图中可以看出, 网格加密的区域随台风中心的移动而移动, 从而自始至终保持了台风中心附近网格的分辨率. 从预报的路径来看, 其结果与实况比较接近, 这说明该模式对于台风路径的数值预报具有一定的能力.

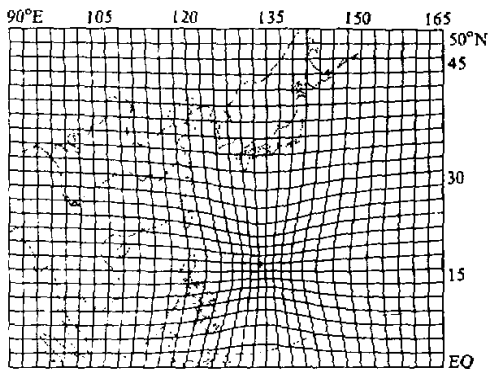


图 1 初始时刻自适应网格点的分布

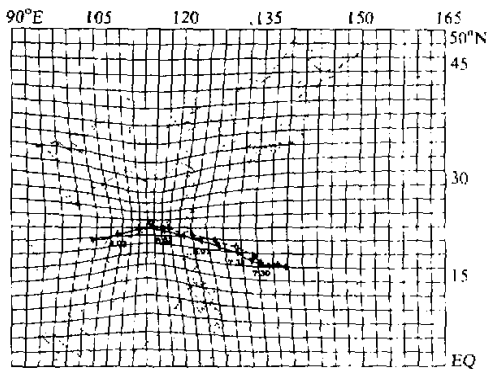


图 2 预报 72 小时后网格点的分布以及  
预报和实况路径

#### 五、小 结

本文设计了一套非常定的自适应网格模式. 给出了地图投影坐标下的非常定自适应网格模式的方程(3)以及相应的差分方程(4)和(6), 证明了两组差分方程分别满足瞬时的能量守恒和质量守恒以及完全的能量守恒和质量守恒. 针对这两组差分方程还给出了相应的时间积分方案, 该方案表明, 对于梯形隐式的差分方程(6), 在不破坏完全的能量

守恒及质量守恒的情况下, 可采用分解算法将整个计算分为 3 个过程: 适应过程、演变过程和网格坐标变换过程, 3 个过程分别取不同的时间步长, 因而可大大减少计算的工作量。本模式适用于局部区域需加密网格且网格点的位置随时间变的问题, 如台风路径的数值预报等问题。

### 参 考 文 献

- [1] 刘卓、曾庆存、李荣凤, 1995, 能量守恒的自适应网格模式在南海月平均流计算中的应用, 大气科学, 19, No.1, 40—51.
- [2] 刘卓、曾庆存, 1994, 自适应网格在大气海洋问题中的初步应用, 大气科学, 18, No. 6, 641—648.
- [3] 曾庆存、张学洪, 1981, 完全保持能量守恒的可压缩流体时一空差分格式和协调的分解算法, 中国科学, 第 11 期, 1355—1366.
- [4] 曾庆存、张学洪, 1987, 球面上斜压原始方程组保持总有效能量守恒的差分格式, 大气科学, 11, No. 2, 113—127.

## Perfectly Energy—Conservative Time—Dependent Adaptive Mesh Model

Liu Zhuo and Zeng Qingcun

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

### Abstract

Based on the principle of adaptive mesh, a time-dependent adaptive mesh model was developed. The model preserves the integral properties of the IAP model. It can adjust the densities of grid points everywhere at any time while the grid points at the boundary are coincident with the actual boundary. It can be used to the numerical forecasting of the typhoon track and other studies.

**Key words:** adaptive mesh model; time-dependent of mesh; energy-conservation.