

强迫耗散作用下的 Rossby 包络 孤立波及其相互作用

谭本旭

(北京大学地球物理系, 北京 100871)

伍荣生

(南京大学大气科学系, 南京 210008)

提 要

本文讨论了强迫和耗散对 Rossby 包络孤立波的影响, 得到了在强迫和耗散共同作用下, 当准共振条件和锁相条件满足时, 包络孤立波从外场那里获取能量来克服耗散并形成稳定的锁相包络孤立波。本文还研究了在强迫和耗散作用下两个包络孤立波的碰撞相互作用, 发现在某些参数下, 两波碰撞后性质变化不大, 而在另外一些参数下, 碰撞后两波性质显著改变。

关键词: 非线性 Rossby 波; 孤立波的碰撞。

一、引 言

Rossby 波非线性理论研究始于 60 年代, 在 70 年代末和 80 年代, Rossby 波非线性理论得到了极大的发展, 并逐步形成了 Rossby 孤立波 (KdV 型)理论和偶极波 (modon)理论^[1-6]。

除了孤立波和偶极波外, 非线性 Rossby 波还存在另一种孤立波形态——包络孤立波^[7-9]。但迄今为止, 人们对 Rossby 包络孤立波的研究仍很少, 它的许多性质现仍不清楚。如, 它是怎样产生的, 以何种方式传播?包络孤立波间的相互作用性质如何?外部强迫和耗散对包络孤立波性质有什么影响?这些都是一些基本问题, 对它们作深入研究将有助于人们对大气中大尺度波动演变规律的认识, 从而加深人们对一些重要天气现象(如阻塞系统)的理解。

最近, 谭本旭等^[10]讨论了正压大气中 Rossby 包络的性质, 研究了包络孤立波间的碰撞相互作用, 得到了一些有趣的结果, 这里将进一步考察外部强迫和耗散对 Rossby 包络孤立波及其它们的碰撞相互作用性质的影响。

二、基本方程组

考虑一简单的位于 β -平面通道的正压流体模型。流体上界为自由面, 下界为平坦刚性壁。为简单起见, 本文仅考虑外部动量或热量源汇以及摩擦作用所引起的 Ekman

1992年3月25日收到, 1993年12月3日收到再改稿。

冲击, 暂不考虑地形强迫, 这样, 对于大尺度运动, 它满足准地转涡度方程 (无量纲形式)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi + (\tilde{\beta} - \bar{u}'') \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\varepsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) - \mu \nabla^2(\psi, \psi^*), \quad (1)$$

及其侧边界条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = 0, \pi. \quad (2)$$

(1)式中 $\mu \nabla^2 \psi$ 为 Ekman 冲击所引起的涡源, $\mu \nabla^2 \psi^*$ 为动量的涡源, 无量纲数 $\tilde{\beta} = (L/L_0)^2$, $\mu = E/(2Ro^2)^{1/2}$, L 为运动的特征长度尺度, L_0 为静止 Rossby 波波长的 $1/2\pi$ 倍, E 为 Ekman 数, Ro 为 Rossby 数, ε 为一小参数, 它表征非线性的强弱, 在本文中我们取 $\mu = o(\varepsilon^2)$.

方程(1)为一非线性偏微分方程, 要求得它的一般解析解是困难的, 由于非线性项带有小参数 ε , 下面将利用多重尺度摄动法求它的弱非线性解, 除单个非线性 Rossby 波外, 我们还要研究波与波的相互作用, 作为初步研究, 本文暂考虑两波情形.

除快时空变量 t, x 和 y 外, 再引入如下慢时空变量

$$T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t; \quad X_1 = \varepsilon x, \quad X_2 = \varepsilon^2 x. \quad (3)$$

相应地有

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2}. \quad (4)$$

将扰动流函数 ψ 按小参数 ε 展开

$$\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} + \dots, \quad (5)$$

将(4)和(5)两式代入(1)式, 令 ε 的同次幂的系数为零, 可得 $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots$ 所满足的方程, $\psi^{(0)}$ 满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi^{(0)} + (\tilde{\beta} - \bar{u}'') \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

(6)式就是线性 Rossby 波的经典问题, 设它有两波包解:

$$\psi^{(0)} = \sum_{j=1}^2 A_j(T_1, T_2; X_1, X_2) \varphi_j(y) e^{i(k_j x - \omega_j t)} + \text{c.c.}, \quad (7)$$

式中 $\varphi_j(y)$ 满足

$$\frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - \left(k_j^2 - \frac{\tilde{\beta} - \bar{u}''}{\bar{u} - c_j}\right) \varphi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

及其相应的边界条件 $\varphi_j(0) = \varphi_j(\pi) = 0$. 方程(8)及其边界条件确定了波的经向结构及其相速 c_j . 只有当 $\bar{u}(y)$ 取某些特定函数时, 方程(8)才能求得解析解, 一般只能数值求解.

这里, 波振幅 $A_j(T_1, T_2; X_1, X_2)$ 还未确定, 它由高阶问题确定. 若外部强迫函数

选取为

$$\psi^* = Q(y)e^{ik_1 x} + \text{c.c.}, \quad (9)$$

式中 $Q(y)$ 是外源的经向分布函数。这里已假定外源在 X 向呈波状分布, 其波长与波 1 相同。再设

$$\omega_1 \ll 1, \quad (10)$$

即认为波 1 是准静止的, 这样, 外部强迫是一种准共振强迫, 在上述假设下, 由 $O(\varepsilon)$ 和 $O(\varepsilon^2)$ 问题给出 A_j 满足的方程组

$$\begin{cases} i \frac{\partial A_1}{\partial T} + \alpha_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} + (\sigma_1^* |A_1|^2 + \gamma_{12}^* |A_2|^2) A_1 + i\mu_0 A_1 - i\mu_0 q e^{i\Omega T} = 0, \\ i \left(\frac{\partial A_2}{\partial T} + c_{g2} \frac{\partial A_2}{\partial X} \right) + \alpha_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial X^2} + (\sigma_2^* |A_2|^2 + \gamma_{21}^* |A_1|^2) A_2 + i\mu_0 A_2 = 0, \end{cases} \quad (11)$$

式中 $T = T_2$, $X = X_1 - c_{g1} T_1$, $\Omega = \omega_1 / \varepsilon^2$, $\mu_0 = \mu / \varepsilon^2$, $c_{g2}' = (c_{g1} - c_{g2}) / \varepsilon$, c_{g1} 和 c_{g2} 分别为波 1 和波 2 的群速度。外部强迫参数

$$q = \int_0^\pi \frac{\varphi_1}{\bar{u} - c_1} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} - k_1^2 Q \right) dy \quad / \quad \int_0^\pi \frac{\varphi_1}{\bar{u} - c_1} \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dy^2} - k_1^2 \varphi_1 \right) dy.$$

方程组(11)称为带有强迫耗散的耦合的非线性 Schrodinger 方程组。系数 α_1 和 α_2 称为色散系数, σ_1^* 和 σ_2^* 为朗道常数, γ_{12}^* 和 γ_{21}^* 为相互作用系数。这些系数的表达式为与扰动波数 k_j 和基流 $\bar{u}(y)$ 等有关的积分式, 它们的值依赖于波数 k_j 和基流 $\bar{u}(y)$ 等, 限于篇幅, 这里不再写出它们的表达式, 读者可参看文献[10]。

(11)式表明, 若不考虑强迫和耗散, 单个非线性 Rossby 波满足

$$i \frac{\partial A}{\partial T} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \sigma^* |A|^2 A = 0. \quad (12)$$

这就是著名的非线性 Schrodinger 方程, 当 $\alpha\sigma^* > 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} |A(X, 0)| dX > 0.904$ 时, 它的解由色散波列和若干包络孤立波构成。关于 Rossby 包络孤立波的性质, 我们已作了仔细的分析^[10], 在此不再讨论。

对于两个非线性 Rossby 波, 若不考虑强迫和耗散, 它们满足

$$\begin{cases} i \frac{\partial A_1}{\partial T} + \alpha_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} + (\sigma_1^* |A_1|^2 + \gamma_{12}^* |A_2|^2) A_1 = 0, \\ i \left(\frac{\partial A_2}{\partial T} + c_{g2} \frac{\partial A_2}{\partial X} \right) + \alpha_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial X^2} + (\sigma_2^* |A_2|^2 + \gamma_{21}^* |A_1|^2) A_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

方程组(13)称为耦合的非线性 Schrodinger 方程组, 文献[11]证明, 除两组特殊系数外, 对于一般的系数, 方程组(13)不能用散射反演法求解, 我们^[10]曾分析过由方程组(13)所描述的两波的能量变化特征, 得到了它们各自能量守恒的结论。同时, 我们还用数值积分方法研究了两包络孤立波的碰撞相互作用。得到了许多有趣的结果, 这里, 我们将

进一步研究外部强迫和耗散对 Rossby 包络孤立波及其相互作用性质的影响。

三、耗散对包络孤立波的作用

有耗散但无外部强迫时, 单个非线性 Rossby 波满足

$$i\frac{\partial A}{\partial T} + \alpha\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \sigma^*|A|^2A = -i\mu_0 A. \quad (14)$$

这就是带有耗散的非线性 Schrodinger 方程, 当 $\mu_0 = 0$ 时, (14) 式的单个包络孤立波解为

$$A = \sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma^*}} \eta \operatorname{sech} \eta (X - 2\alpha\xi T) e^{i[\xi X - \alpha(\xi^2 - \eta^2)T]}, \quad (15)$$

式中 η 和 ξ 分别与包络孤立波的振幅和移速有关, 它们由初始条件决定。包络孤立波的一个显著特点是, 移速与振幅无关, 而载波移速却与振幅有关。

当有耗散存在时, 包络孤立波的性质会发生什么改变呢? 下面对此加以研究。

将(14)式乘以 A 的复共轭 A^* , 将(14)式的复共轭方程乘以 A , 再将所得两式相减, 有

$$i\frac{\partial}{\partial T}|A|^2 + \alpha\frac{\partial}{\partial X}\left(A^*\frac{\partial A}{\partial X} - A\frac{\partial A^*}{\partial X}\right) = -i2\mu_0|A|^2. \quad (16)$$

从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对 X 积分上式, 若 $|X| \rightarrow \infty$ 时 $A \rightarrow 0$, 有

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 dX = -2\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 dX. \quad (17)$$

将(14)式乘以 $\frac{\partial A^*}{\partial X}$, 其复共轭方程乘以 $\frac{\partial A}{\partial X}$, 两式相加, 有

$$\begin{aligned} & i\left(\frac{\partial A^*}{\partial X}\frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial A^*}{\partial T}\right) + \alpha\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial A^*}{\partial X}\right) + \sigma^*|A|^2\frac{\partial}{\partial X}|A|^2 \\ & = -i\mu_0\left(A\frac{\partial A^*}{\partial X} - A^*\frac{\partial A}{\partial X}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

由于

$$i\frac{\partial A^*}{\partial X}\frac{\partial A}{\partial T} = i\frac{\partial}{\partial T}\left(A\frac{\partial A^*}{\partial X}\right) - i\frac{\partial}{\partial X}\left(A\frac{\partial A^*}{\partial T}\right) + i\frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial A^*}{\partial T}, \quad (19)$$

将(19)式代入(18)式, 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分(18)式, 有

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A\frac{\partial A^*}{\partial X} - A^*\frac{\partial A}{\partial X}\right) dX = -2\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A\frac{\partial A^*}{\partial X} - A^*\frac{\partial A}{\partial X}\right) dX. \quad (20)$$

(17)和(20)式就是我们将要利用的两个关系式, 我们仍设(14)式的解形如(15)式, 只是其中的参数 η 和 ξ 不再是常数, 而是时间的函数, 为了确定 η 和 ξ 的函数形式, 将(15)式代入到(17)和(20)两式, 有

$$\frac{d\eta}{dT} = -2\mu_0\eta, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dT}(\xi\eta) = -2\mu_0(\xi\eta). \quad (22)$$

(21)式表明, 在耗散作用下, 包络孤立波的振幅随时间呈指数衰减, 波宽随时间变宽, 将(22)式展开并利用(21)式, 得

$$\eta \frac{d\xi}{dT} = 0. \quad (23)$$

由于 η 不等于零, 必有 $d\xi/dT=0$, 这表明, ξ 不随时间变化, 即耗散对包络孤立波的传播速度没有影响, 这与 KdV 型孤立波和偶极波的情形很不相同, 耗散不仅使 KdV 型孤立波和偶极波强度减弱, 同时使它们的移速减慢^[12-14].

以上是理论分析的结果, 我们直接对(14)式进行了数值计算, 其结果与上面的结论很好地一致^[15].

四、强迫和耗散对包络孤立波的作用

在强迫和耗散共同作用下, 非线性 Rossby 波满足.

$$i\frac{\partial A}{\partial T} + \alpha\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \alpha^*|A|^2A = -i\mu_0A + i\mu_0q\mathrm{e}^{i\Omega T}, \quad (24)$$

(24)式右端两项分别代表耗散和强迫的作用. 这就是带有强迫耗散的非线性 Schrodinger 方程. 仿前一节的推导, 可得以下两个关系式:

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dX = -2\mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dX + 2\mu_0 q \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-i\Omega T} \int_{-\infty}^{\infty} A dX), \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \frac{\partial A^*}{\partial X} - A^* \frac{\partial A}{\partial X} \right) dX = -2\mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \frac{\partial}{\partial X} - A^* \frac{\partial A}{\partial X} \right) dX. \quad (26)$$

(25)式中 $\mathrm{Re}(\)$ 表示括号里的量取实部, 设(24)有解

$$A = \sqrt{\frac{w\alpha}{\sigma^*}} \eta \mathrm{sech} \eta (X - 2\alpha\xi T) \mathrm{e}^{i[\xi X - \alpha(\xi^2 - \eta^2)T + \sigma_0]}, \quad (27)$$

式中 σ_0 为常数, η 和 ξ 是时间的函数, 将(27)式代入(26)式, 得

$$\frac{d(\xi\eta)}{dT} = -2\mu_0(\xi\eta). \quad (28)$$

(28)式表明, 尽管有外部强迫, 量 $\xi\eta$ 最后趋于零, $\eta \rightarrow 0$, 表孤立波振幅衰减, $\xi \rightarrow 0$ 表孤立波移速趋于零, 不失一般性, 这里取 $\xi \rightarrow 0$. 这样, (27)式代入(25)式, 有

$$\frac{d\eta}{dT} + 2\mu_0\eta = \pi\mu_0q\sqrt{\frac{\sigma^*}{2\alpha}} \cos(\alpha\eta^2 T - \Omega T + \sigma_0). \quad (29)$$

若令

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2} - \chi_0, \quad \sigma = \alpha \eta^2 T - \chi_0, \quad \chi = T\Omega - \sigma. \quad (30)$$

这样(29)式化为

$$\frac{d\eta}{dT} + 2\mu_0\eta = \pi\mu_0q\sqrt{\frac{\sigma^*}{2\alpha}} \sin\chi. \quad (31)$$

σ 实质上是孤立波位相, χ 是孤立波位相与外部强迫场的位相间的位相差。(31)式表明, 耗散总是使包络孤立波振幅衰减, 而外部强迫既可使振幅增大, 也可使其减小, 这要取决于包络孤立波位相与外部强迫位相间的瞬时位相差。(30)式表明, 包络孤立波振幅变化会导致其位相变化, 这就使包络孤立波有可能通过调整自己的位相向外部场适应, 发生所谓“锁相”现象。出现“锁相”的条件为

$$\sigma = \Omega T - \chi_0, \quad (32)$$

$$\eta^2 = \frac{\Omega}{\alpha}, \quad (33)$$

$$\sin\chi_0 = \sqrt{\frac{\Omega}{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma^*}} \frac{2}{\pi q}. \quad (34)$$

这里 χ_0 是包络孤立波位相与外场位相间的锁相位相差。

(33)式表明, 要出现锁相, α 与 Ω 必须同号。(34)式表明, 要出现锁相, 还要求满足

$$0 < |\Omega| \leq \frac{1}{8} |\sigma^*| \pi^2 q^2 = \Delta\omega. \quad (35)$$

由于 $\Omega = \omega/\varepsilon^2$, 它与线性 Rossby 波的频率有关, (35)式表明, 当外场强度 q 值一定时, 只有当 $|\Omega| < \Delta\omega$ 时才能发生锁相。换句话说, 当 $|\Omega|$ 值一定时, 外场强度 q 必须超过一定的值时, 才可能发生锁相, 锁相发生时, 包络孤立波从外场那里获取能量来克服耗散。锁相解为

$$A = \sqrt{\frac{2\Omega}{\sigma^*}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\Omega}{\alpha}} \chi e^{i(\Omega T + \frac{\pi}{2} - \chi_0)}. \quad (36)$$

将(36)式代入(7)式, 可得包络孤立波的流函数

$$\psi^{(0)} = \sqrt{\frac{2\Omega}{\sigma^*}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\Omega}{\alpha}} \varepsilon(x - c_g t) e^{i(kx + \frac{\pi}{2} - \chi_0)} \varphi(y). \quad (37)$$

(37)式表明, 锁相包络孤立波的振幅等于 $\sqrt{2\Omega/\sigma^*}$, 它与线性 Rossby 波的频率和朗道常数有关, 而与外场强度无关; 包络孤立波以线性 Rossby 波的群速度 c_g 传播; 载波相速恒等于零。这些是锁相包络孤立波的主要特征。

要能从实际上观测到锁相现象, 要求锁相解必须是稳定的。文献[14]在 (η, χ) 平面上对(31)式的相平面图进行了分析, 发现除鞍点平衡点外, 还有稳定的结点或焦点平衡点, 这说明稳定的锁相解有可能实际存在。文献[14]还直接对(24)式进行数值积分, 验

证了上面结论的正确性。

五、强迫和耗散作用下的包络孤立波的碰撞

方程(11)表明, 当两非线性 Rossby 波在空间上是分离时, 它们分别满足(24)和(14)两式, 前两节的分析表明, 波 1 为锁相包络孤立波, 波 2 为一衰减的包络孤立波。当此两包络孤立波发生碰撞相互作用后, 它们将如何演变? 这是本节要加以研究的问题。

由于方程(11)很难解析求解, 这里将采用有限元法对它数值求解, 详细的数值求解方案可见文献[16]。在我们的计算中, 空间格距 Δx 取为 0.05, 时间格距取为 0.1, 迭代精度为 10^{-6} 。

A_1 和 A_2 的初始条件取为

$$\begin{cases} A_1 = \sqrt{\frac{2\Omega}{\sigma_1^*}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\Omega}{\alpha_1}} (X + X_{10}) \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \chi_0 \right) \right], \\ A_2 = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{\sigma_2^*}} \eta_2 \operatorname{sech} \eta_2 (X + X_{20}) \exp [i \xi_2 (X + X_{20})]. \end{cases} \quad (38)$$

式中 X_{10} 和 X_{20} 分别是两波的初始位置, $\chi_0 = \arcsin \left(\frac{2}{\pi q} \sqrt{\frac{2\Omega}{\sigma_1^*}} \right)$ 。

我们对两个自由包络孤立波的碰撞相互作用进行研究后发现^[10], 相互作用系数 γ_{12}^* 和 γ_{21}^* 的符号对解的性质影响很大, 在 $(\gamma_{12}^*, \gamma_{21}^*)$ 平面的不同象限, 两波碰撞行为很是不同, 本文的计算结果也同样显示了这一点。这里仅给出两组试验结果。

试验 I 的参数为: $\alpha_1 = 1.0$, $\sigma_1^* = 2.0$, $X_{10} = 0.0$, $\alpha_2 = 0.64$, $\sigma_2^* = 2.0$, $\eta_2 = 0.625$, $\xi_2 = 0.5$, $X_{20} = -13.0$, $c_{g2} = 1.0$, $\mu_0 = 0.01$, $\Omega = 1.0$, $q = 2.0$ 。这里波 1 为锁相包络孤立波, 其振幅为 1.0, 初始位于 $X_{10} = 0.0$, 无相互作用时, 它为静止的。

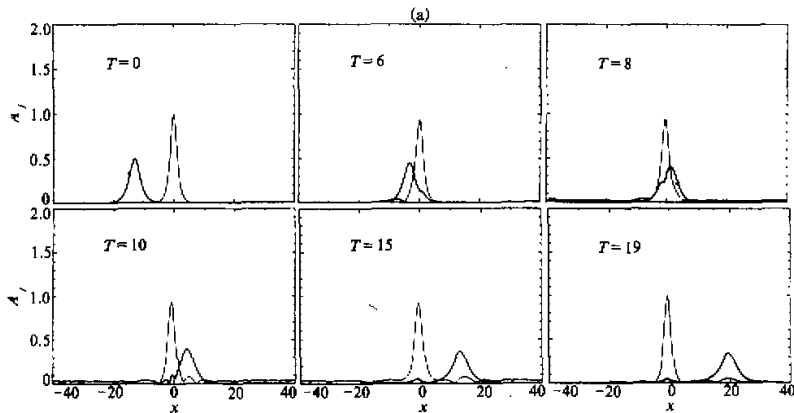


图 1 强迫耗散作用下的两包络孤立波的碰撞(I)

(a) $\gamma_{12}^* = 3, \gamma_{21}^* = 3$;

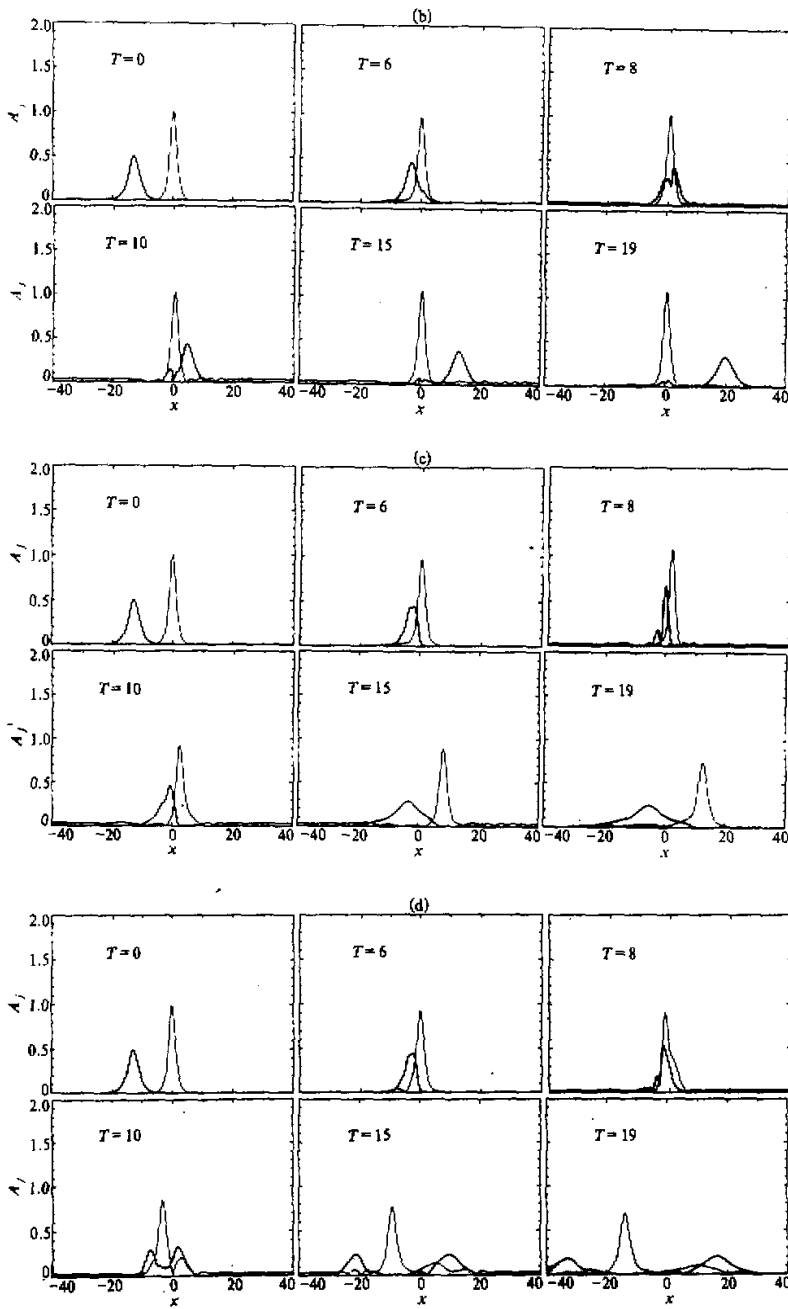


图1 强迫耗散作用下的两包络孤立波的碰撞(I)

(b) $\gamma_{12}^* = -3, \gamma_{21}^* = 3$; (c) $\gamma_{12}^* \approx -3, \gamma_{21}^* \approx -3$; (d) $\gamma_{12}^* = 3, \gamma_{21}^* = -3$.

波 2 振幅为 0.5, 初始位于 -13.0, 以 1.64 的速度向 X 正向传播。图 1 是在不同相互作用系数下两波的演变。

图 1a 是 $\gamma_{12}^* = 3$, $\gamma_{21}^* = 3$ 时两波的碰撞。通过碰撞, 两波性质变化不大, 都基本恢复原来的形状, 碰撞过程中, 两波有位相漂移(图 2d), 能量变化特点是, 波 1 能量维持不变(略有振荡), 波 2 能量呈指数衰减趋势(图 3d), 均与碰撞前能量变化特点一样。

图 1b 是 $\gamma_{12}^* = -3$, $\gamma_{21}^* = 3$ 时两波的碰撞。两波的碰撞行为与前一种情形基本相同, 唯一的差别是, 在图 1a 中, 通过碰撞, 波 1 分裂出一很小的“小孤波”随波 2 一起

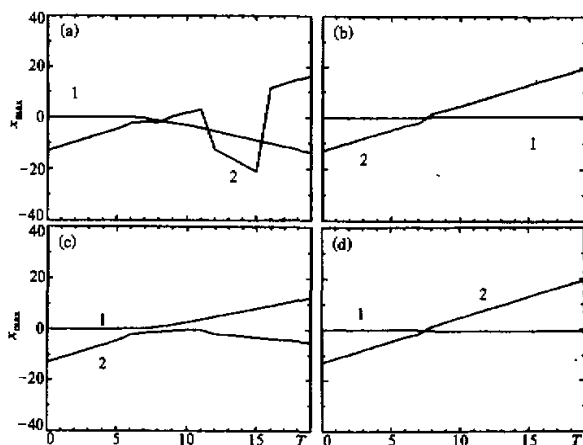


图 2 两波位相变化

曲线 1——波 1 位相, 曲线 2——波 2 位相

(a) $\gamma_{12}^* = 3$, $\gamma_{21}^* = -3$; (b) $\gamma_{12}^* = -3$, $\gamma_{21}^* = 3$; (c) $\gamma_{12}^* = -3$, $\gamma_{21}^* = -3$; (d) $\gamma_{12}^* = 3$, $\gamma_{21}^* = 3$

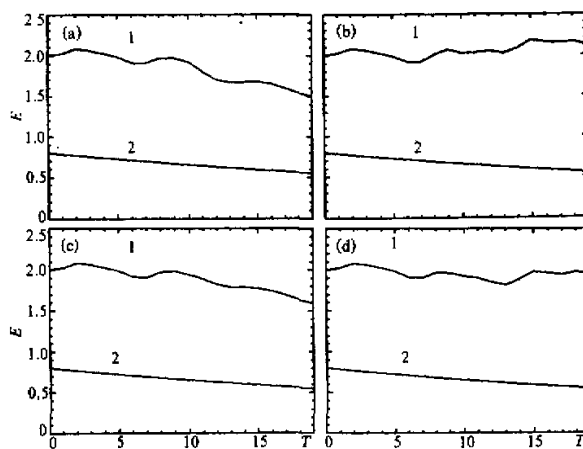


图 3 两波能量演变

曲线 1——波 1 能量, 曲线 2——波 2 能量; 参数 γ_{12}^* 和 γ_{21}^* 的说明与图 2 同

移动, 波 2 也分裂出一很小的“小孤波”留在波 1 中心静止不动, 而图 1b 中, 波 1 能量变化不明显, 只有波 2 频散出极少量的能量留在波 1 中心。

图 1c 是 $\gamma_{12}^* = -3$, $\gamma_{21}^* = -3$ 时两波的碰撞。碰撞使两波性质均发生显著变化, 波 2 追上波 1 并与其相互作用一段时间后, 波 2 由东移变为西退, 波形也逐渐变宽, 波 1 则由静止变为东移。两波能量变化特点是, 与碰撞前一样, 波 2 能量呈指数型衰减, 波 1 呈振荡型衰减而不是碰撞前的维持不变(图 3c)。

图 1d 中 $\gamma_{12}^* = 3$, $\gamma_{21}^* = -3$ 。碰撞后两波性质均有显著变化。碰撞使波 1 由静止变为西退, 同时频散出一部分能量向东传播。波 2 在碰撞过程中分裂成两部分, 一部分仍向东传播, 另一部分却向西传播, 两波能量均衰减(图 3a)。

以上是一小包络孤立波和一大包络孤立波的碰撞, 下面介绍两个强度相当的包络孤立波的碰撞(试验 II)。试验 II 中取 $\eta_2 = 1.25$, 此时波 2 的振幅也为 1.0, 其余参数与试验 I 相同, 数值计算结果表明, 当两波强度相当时, 碰撞使两波性质均发生显著变化,

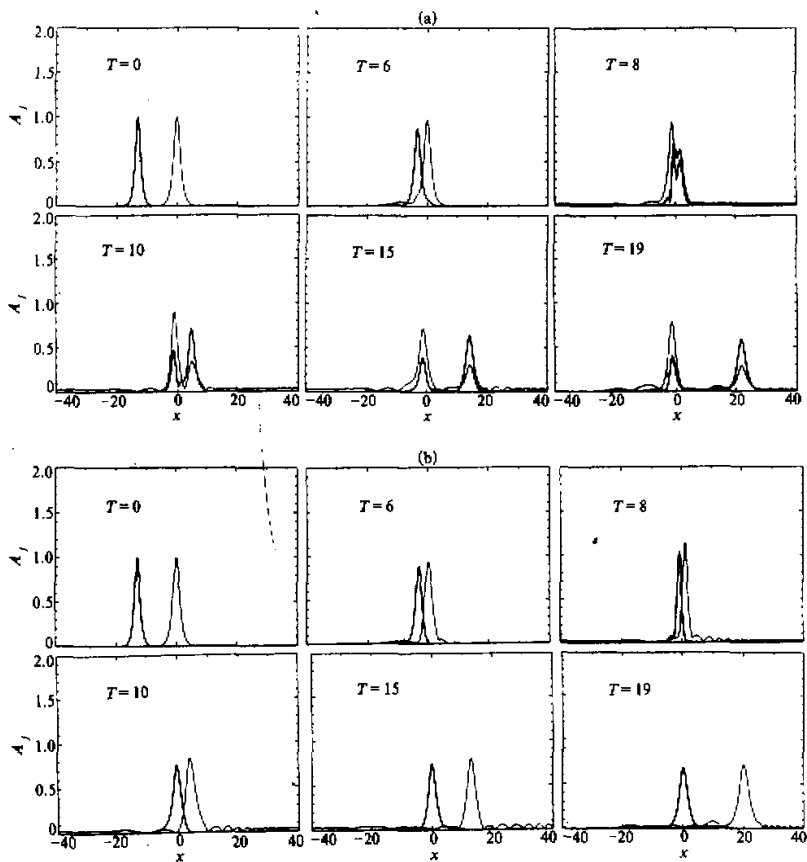


图 4 强迫耗散作用下的两包络孤立波的碰撞(II)

(a) $\gamma_{12}^* = 3$, $\gamma_{21}^* = 3$; (b) $\gamma_{12}^* = -3$, $\gamma_{21}^* = -3$

为节省篇幅, 这里仅给出两个例子 (图 4)。

图 4a 是 $\gamma_{12}^* = 3$, $\gamma_{21}^* = 3$ 时两波的碰撞, 碰撞使两波均发生分裂: 波 1 分裂出一“孤波”随波 2 一起传播, 波 2 也分裂出一“孤波”留在波 1 中心静止不动, 这里的分裂现象比图 1a 显著得多, 通过相互作用, 两波能量均随时间衰减 (图略)。

图 4b 是 $\gamma_{12}^* = -3$, $\gamma_{21}^* = -3$ 时两波的碰撞, 与图 1b 一样, 碰撞使两波传播方向发生显著变化, 波 1 由静止变为东移, 波 2 由东移变为静止, 两波能量变化特点是, 波 2 能量始终呈指数型衰减, 波 1 能量碰撞前维持常数 (略有振荡), 碰撞后呈振荡型衰减 (图略)。

六、结 语

本文的研究结果表明:

- (1) 耗散总是使包络孤立波振幅衰减, 但它对包络孤立波的传播速度却没有影响。
- (2) 在强迫和耗散共同作用下, 当准共振条件(10)式和锁相条件(32), (33)和(34)式得到满足时, 包络孤立波通过调整自己的振幅和位相向外场适应, 产生新的平衡解——“锁相”包络孤立波。此时, 包络孤立波从外场那里获取能量来克服耗散维持稳定结构。因此, 准共振强迫可能是耗散大气中 Rossby 包络孤立波能长久维持的一个重要机制。
- (3) 数值研究结果表明, 两包络孤立波 (一个为锁相包络孤立波, 另一个为衰减的包络孤立波) 的碰撞, 在某些参数范围内, 碰撞后两波性质变化不大 (如图 1a、b), 而在另外一些参数范围内, 碰撞使两波性质显著改变, 如频散能量, 分裂孤立波, 改变传播方面, 甚至使锁相包络孤立波能量衰减, 这表明, 波与波的相互作用, 是导致波动发展演变的一个重要机制, 值得进一步深入研究。

参 考 文 献

- [1] Redekopp, L.G., 1977, On the theory of solitary Rossby waves, *J. Fluid Mech.*, **82**, 725—745.
- [2] Malguzzi, P. and Malanotte-Rizzoli, 1984, Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking, Part I: The analytical theory, *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2620—2628.
- [3] 刘式适、刘式达, 1983, 地球流体中的非线性波动, 中国科学, B 辑, 279—289.
- [4] 谭本旭、刘式适, 1988, 地球流体中的非线性 Rossby 波, 北京大学学报, **24**, 342—350.
- [5] Flierl, G. et al., 1980, The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies, *Dyn. Atmos. Oceans*, **5**, 1—41.
- [6] McWilliams, J., 1980, An application of equivalent modons to atmospheric blocking, *Dyn. Atmos. Oceans*, **5**, 43—66.
- [7] Benney, D.J., 1979, Large amplitude Rossby waves, *Stud. Appl. Math.*, **60**, 1—10.
- [8] Yamagata, T., 1980, The stability, modulation and long wave resonance of a planetary wave in a rotating, two-layer fluid on a channel β -plane, *J. Meteor. Soc. Japan*, **58**, 160—171.
- [9] Boyd, J.P., 1983, Equatorial solitary waves, Part II: Envelope solitons, *J. Phys. Oceanogr.*, **13**, 428—449.
- [10] 谭本旭、伍荣生, 1993, 非线性 Rossby 波及其相互作用, I. Rossby 包络孤立波的碰撞, 中国科学, B 辑, 437—448.
- [11] Zakharov, V.E. and E.I. Schulman, 1982, To the integrability of the system of two coupled nonlinear Schrödinger equations, *Physica D*, **4**, 270—274.
- [12] Malanotte-Rizzoli, P., 1982, Planetary solitary waves in geophysical fluids, *Advance in Geophysics*, **24**, 147—224.

- [13] McWilliams, J. et al., 1981, Numerical studies of barotropic modons, *Dyn. Atmos. Oceans.*, **5**, 219—238.
- [14] Ablowitz, M. and H. Segur, 1981, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Siam, Philadelphia.
- [15] 谭本胤, 1991, 非线性 Rossby 波及其相互作用, 南京大学博士论文.
- [16] Giffiths, D.F. et al., 1984, A numerical study of the nolinear Schrodinger equation, *Comp. Appl. Mech. Engng.*, **45**, 177—215.

Envelope Solitary Rossby Waves and Their Interactions under the Influence of Forcing and Dissipation

Tan Benkui

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871)

Wu Rongsheng

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing 210008)

Abstract

In this paper the effects of forcing and dissipation on envelope solitary Rossby waves are studied. It is found that under the quasi-resonance condition and phase-locking conditions an envelope solitary wave gains energy from the external forcing field to overcome the dissipation and becomes a steady phase-locking solitary wave. The effects of forcing and dissipation on the collision interaction of two envelope solitary waves are also studied. The results show that for a range of parameters the collision are soliton-like in the sense that the properties of the two waves change very little. For other parameters, the properties of the two waves change a lot after the collision.

Key words: nonlinear Rossby waves; collision of solitary waves.