第19卷 第3期
1995 年 5 月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol. 19, No. 3
May 1995

正压原始方程的谱和初值问题的解
I: $\bar{u}$=常数

王希勇 曾庆存
(中国科学院大气物理研究所，北京 100080)

提 要

本文运用 Laplace 变换法和围道积分法分析线性化的正压原始方程组的谱问题。通过严格的数学推演从形式上给出了方程组的初值问题的解，从而原则上决定了连续谱、离散谱的出现条件。与已有的研究结果相比较，本文最大的特点是保证了了解的完备性，因而相应的展开定理便是自然的了。

关键词: 连续谱; 离散谱; Laplace 变换; Laplace 反变换; 围道积分。

一、前 言

标准模方法是研究大气运动模式中小扰动特性的重要方法。然而它实际上仅适用于只存在离散谱的情形，对连续谱却是无能为力。当基本气流非常数时，对应于离散谱的函数可以是不完备的。也就是说，必须加上连续谱[1—2]。近年来，曾庆存、李荣凤、张铭、卢佩生、张明华等人开展了一系列理论和数值计算工作研究连续谱，取得了大量成果[3—6]。例如对于正压涡度方程，一定条件下甚至可以只存在连续谱而没有离散谱[7]。曾庆存等人的一系列工作使我们对大气运动有了更深刻更全面的理解。

正压原始方程组的谱问题较为复杂，目前只有曾庆存等人做了一般性的讨论及许多计算。我们运用 Laplace 变化法和常微分方程理论把方程组化为一个二阶常微分方程的初值问题来进行分析，求解，然后运用 Laplace 反变换（可以化为围道积分）原则上给出线性化的正压原始方程组的解析解，从而决定连续谱和离散谱的出现条件。同时，数学推演的严格性保证了解的完备性。我们得到的结果与数值计算的结果相符。我们的结论是：当基本气流为常数时只有离散谱；$\bar{u}$严格单调则必然会出现连续谱（这属于第 II 部分的工作）。

二、基本模式及其变换

取直角坐标下的二维正压大气模式，基流$\bar{u}$沿x方向，则线性化的小扰动方程组如

1992 年 5 月 6 日收到；1992 年 8 月 15 日收到修改稿。

下[6]:

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}-\left(f-\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\hat{v}=-C_0^2\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\hat{v}+f\hat{u} \qquad =-C_0^2\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\varphi+\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x}+\dfrac{\partial \hat{v}}{\partial y} \quad =0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中$f\bar{u}=-\partial C_0^2/\partial y=-\mathrm{d}\bar{\varphi}/\mathrm{d}y$，$C_0^2\equiv\bar{\varphi}$为基流自由表面的重力位势，$f$为科里奥利参数，且$C_0^2$、$\bar{u}$和$f$仅依赖于$y$；$\hat{u}=C_0^2\cdot u$，$\hat{v}=C_0^2\cdot v$，$u$、$v$为扰动的速度场分量，$\varphi$为自由表面扰动重力位势。注意，我们可以将（1）式理解为已经无量纲化了。

初条件为 $\begin{bmatrix}\hat{u}\\ \hat{v}\\ \varphi\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\\ \varphi_0\end{bmatrix}$,

边条件为 $\hat{v}(y_1)=\hat{v}(y_2)=0.$

对(1)式在x方向做 Fourier 展开，自然周期为 2π、即取$(\hat{u},\hat{v},\varphi)\sim(\hat{u}_k,\hat{v}_k,\varphi_k)\mathrm{e}^{ikx}$。

根据 Laplace 变换理论，对任一函数$\psi(y,t)$，只要$|\psi(y,t)|<M\mathrm{e}^{\alpha_0 t}$，其中$M$、$\alpha_0$均为大于零的常数，则存在像函数

$$
\psi_p(y,p)=\int_0^\infty \psi(y,t)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.
$$

而反变换为

$$
\psi(y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_0-i\infty}^{\alpha_0+i\infty}\psi_p(y,p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p.
\tag{2}
$$

我们对（1）式进行上面两种变换得到

$$
\begin{cases}
(p+ik\bar{u})\hat{u}_{pk}-(f-\bar{u}')\hat{v}_{pk}+ikC_0^2\cdot\varphi_{pk}=u_{0k} \\
(p+ik\bar{u})\hat{v}_{pk}+f\hat{u}_{pk}+ikC_0^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{pk}}{\mathrm{d}y} \qquad =v_{0k}\,, \\
(p+ik\bar{u})\varphi_{pk}+ik\hat{u}_{pk}+\dfrac{\mathrm{d}\hat{v}_{pk}}{\mathrm{d}y} \qquad =\varphi_{0k}
\end{cases}
\tag{3}
$$

$$
\hat{v}_{pk}(y_1)=\hat{v}_{pk}(y_2)=0
$$

其中$\hat{u}_{pk}$、$\hat{v}_{pk}$和φ_{pk}是$\hat{u}$、$\hat{v}$和φ变换后得到的，现在只是y的函数，但依赖p。

为了方便，再令

$$
p=-ikc,
\tag{4}
$$

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ \varphi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{pk} \\ \hat{v}_{pk} \\ \varphi_{pk} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \varphi^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{0k} \\ v_{0k} \\ \varphi_{0k} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

然后把 (4) 式、(5) 式代入 (3) 式整理得出下面的方程组:

$$(\bar{u}-c)u_p + C_0^2 \cdot \varphi_p = \frac{1}{ik}[u^0 + (f-\bar{u}')v_p]', \tag{6}$$

$$fu_p + ik(\bar{u}-c)v_p + C_0^2 \frac{\mathrm{d}\varphi_p}{\mathrm{d}y} = v^0, \tag{7}$$

$$u_p + (\bar{u}-c)\varphi_p = \frac{1}{ik}\left(\varphi^0 - \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}y}\right). \tag{8}$$

注意，从 (4) 式到 (8) 式都要求$k \neq 0$。但$k=0$时的情形极为简单且不影响结论，故这里不予考虑，因此我们可以从 (6) — (8) 式解出:

$$u_p = \frac{1}{ik\tau}[(\bar{u}-c)(f-\bar{u}')v_p + C_0^2 v_p' + (\bar{u}-c)u^0 - C_0^2\varphi^0], \tag{9}$$

$$\varphi_p = \frac{1}{ik\tau}[-(f-\bar{u}')v_p - (\bar{u}-c)v_p' + (\bar{u}-c)\varphi^0 - u^0], \tag{10}$$

其中，$\tau = (\bar{u}-c)^2 - C_0^2$，$v_p'$、$\varphi_p'$均表示对$y$求导，将 (9) — (10) 式代入到 (7) 式中得

$$v_p'' - \frac{\tau'}{\tau}v_p' - \left[\frac{f(f-\bar{u}')}{C_0^2} - \frac{k^2}{C_0^2}\tau - \frac{f'-\bar{u}''}{\bar{u}-c} + \frac{\tau'}{\tau}\frac{f-\bar{u}'}{\bar{u}-c}\right]v_p = \frac{h(y,c)}{\bar{u}-c}, \tag{11}$$

$$v_p(y_1) = v_p(y_2) = 0, \tag{12}$$

$$h(y,c) = \frac{1}{C_0^2}[-ki\tau v^0 + f(\bar{u}-c)u^0] - f\varphi^0 + [(\bar{u}-c)\varphi^0 - u^0]' - \frac{\tau'}{\tau}[(\bar{u}-c)\varphi^0 - u^0], \tag{13}$$

容易看出，(11) 式中出现奇点的条件为$c=\bar{u}$和$c=\bar{u}\pm C_0$，同时$|\tau'/\tau|$不为有限。

我们在 (2) 式已有 Laplace 反变换式

$$\psi(y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \psi_p(y,p)e^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

再用 (4) 式$p=ikc$把p换成c，得到

$$\psi(y,t) = \frac{k}{2\pi}\int_{c_\Gamma} \psi_p(y,c)e^{-ikct}\,\mathrm{d}c, \tag{14}$$

c_Γ 为从$-\infty + s_0 i$到$+\infty + s_0 i$的直线，$s_0 = \alpha_0 / k$。

我们要证明 (14) 式可以转化为如下形式:

$$v_k(y,t)=\lim_{R\to\infty}\frac{k}{2\pi}\int_{c_\Gamma+c_R}v_p(y,c)\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c, \tag{14'}$$

其中c_R我们将在下面说明。c_R与c_Γ相交构成一个围道，因此我们可以用围道积分的方法来求$v_k(y,t)$。

从（11）和（12）式我们可以证明，当$c\to\infty$时，

$$v_p(y,c)\leqslant 0(c^{-1}),$$

因此由推广的约当引理[9]，立即可以从（14）式导出（14′）式来。c_R是以原点为心、R为半径的大圆，与c_Γ相交构成一个闭合围线（图1）。需要特别指出的是，c_R不经过$v_p(y,c)$在c平面内的奇点。由于在R充分大的范围之外$v_p(y,c)$的奇点总是离散的，我们可以选取一个c_{R_n}系列，当$R_n\to\infty$，($n\to\infty$)时，$\lim\limits_{R\to\infty}$也即是$\lim\limits_{R_n\to\infty}$。如果$v_p(y,c)$只有有限的奇点，$\lim\limits_{R\to\infty}$中的$R$可以连续取值。我们以$\lim\limits_{R\to\infty}$表记上述两种不同的情形。其次，当$v_p(y,c)$是多值函数时，必须选定单值分支，后面将看到，对$c$平面取定有限的割线后是能够做到这点的。此时可将每段割线都当做点来看待（至多有三段割线），与我们刚才对$\lim\limits_{R\to\infty}$所做的说明就一致了。

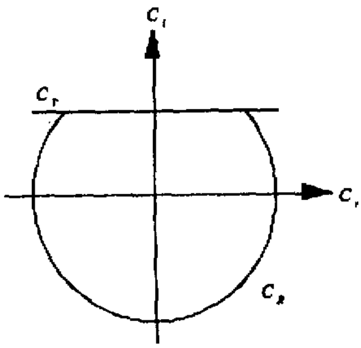

图1 c_R与c_Γ相交构成的闭合围线

有了（14′）式，我们还要用格林函数法把$v_p(y,c)$定出来。设（12）式对应的齐次方程的两个线性无关解$v_1(y,c)$和$v_2(y,c)$已经解出，则v_1和v_2对c的奇点只会在$c=\bar{u}$和$c=\bar{u}\pm C_0$处。当c充分大时，v_1和v_2对c是解析的，因此相应的格林函数$G(y,y',c)$在$|c|>\max|C_0\pm\bar{u}|$之外的奇点就是离散的了。这是由于$G(y,y',c)$的奇点只可能出现于分母为零的c值上，即$D(c)=v_1(y_1,c)v_2(y_2,c)-v_1(y_2,c)v_2(y_1,c)=0$的$c$值。而满足$D(c)=0$的$c$不可能连续，否则解析函数$D(c)$就恒为零了。

$$v_p(y,c)=\int_{y_1}^{y_2}G(y,y',c)\frac{h(y',c)}{\bar{u}(y')-c}\mathrm{d}y',$$

故

$$\begin{aligned}v_k&=\lim_{R\to\infty}\frac{k}{2\pi}\int_{c_\Gamma+c_R}\int_{y_1}^{y_2}G(y,y',c)\frac{h(y',c)}{\bar{u}(y')-c}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}y'\mathrm{d}c\\&=\lim_{R\to\infty}\frac{k}{2\pi}\int_{y_1}^{y_2}\int_{c_\Gamma+c_R}G(y,y',c)\frac{h(y',c)}{\bar{u}(y')-c}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'\\&=\int_{y_1}^{y_2}\frac{k}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{c_\Gamma+c_R}G(y,y',c)\frac{h(y',c)}{\bar{u}(y')-c}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'.\end{aligned} \tag{15}$$

在得到（15）式的过程中，我们先用到了对c的积分与对y'的积分的互相交换性。

这点由被积分函数在$c_R + c_\Gamma$上的解析性保证。其次，我们还把$\lim\limits_{R\to\infty}$放到了$\int_{y_1}^{y_2}\cdots \mathrm{d}y'$之内。这一步骤在这里没有什么实质性的意义，因为在$c_R + c_\Gamma$内，被积函数的奇点只不过是其在全$c$平面上的奇点的一部分，只有取极限$\lim\limits_{R\to\infty}$才能全部包括进去。在计算时我们先算$\int_{y_1}^{y_2}\cdots \mathrm{d}y'$再取$\lim\limits_{R\to\infty}$，还是把$\lim\limits_{R\to\infty}$先放入$\int_{y_1}^{y_2}\cdots \mathrm{d}y'$再积分至多也不过涉及到$\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y'$与$\oint_{C_l}\mathrm{d}c$孰先孰后（$c_l$为奇点），而二者的交换性不成问题。

为求得完整的解，还要求出u_k和φ_k以及证明它们也有类似于（15）式的公式。我们以u_k为例给出结果而不具体证明。

$$
\begin{aligned}
u_k &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{c_\Gamma + c_R}\frac{1}{\tau(y)}[(\bar{u}-c)(f-\bar{u}')v_p + C_0^2\cdot v_p' + (\bar{u}-c)u^0 - C_0^2\varphi^0]\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma + c_R}[(\bar{u}-c)u^0 - C_0^2\varphi^0]\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c \\
&\quad + \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{y_1}^{y_2}\int_{c_\Gamma + c_R}[(\bar{u}-c)(f-\bar{u}')G(y,y',c) \\
&\quad + C_0^2\cdot G_y'(y,y',c)]\cdot\frac{h(y',c)}{\bar{u}(y')-c}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y' \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma + c_R}\frac{1}{\tau(y)}[(\bar{u}-c)u^0 - C_0^2\varphi^0]\mathrm{e}^{-ikct} \\
&\quad + \int_{y_1}^{y_2}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma + c_R}[(\bar{u}-c)(f-\bar{u}')G(y,y',c) \\
&\quad + C_0^2 G(y,y',c)]\cdot\frac{h(y',c)}{\bar{u}(y')-c}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'.
\end{aligned}
$$

三、$\bar{u}$为常数的情形

上面两节作为我们讨论的准备适用于$\bar{u}$的不同情形．这一节我们讨论$\bar{u}$= 常数≠0 的情形。$\bar{u}=0$时的结论更容易得出且与我们的结论一致、另外也设f= 常数≠0。$f=0$时我们可求出所有的谱点来，它们是离散的；f不为常数时也并不影响连续谱的出现与否，只是推演更加繁琐．我们将可以在第 II 部分（$\bar{u}$严格单调）中的相应部分看到证明。

在我们的假设下，$C_0^{2\prime} = -f\bar{u}$，所以，

$$
\begin{cases}
C_0^2 = f\bar{u}(\tilde{c}-y), \qquad \tilde{c} > y_2, \\
\tau = (\bar{u}-c) - C_0^2 = f\bar{u}(y-a), \\
a = \tilde{c} - \dfrac{(c-\bar{u})^2}{f\bar{u}}, \\
\dfrac{\tau'}{\tau} = \dfrac{1}{y-a},
\end{cases}
\tag{16}
$$

将这几个等式代入（11）—（13）式有

$$v_p''-\frac{1}{y-a}v_p'-\left[\frac{f^2}{C_0^2}-\frac{k^2f\bar{u}}{C_0^2}(y-a)+\frac{f}{\bar{u}-c}\frac{1}{y-a}\right]v_p=\frac{h(y,c)}{\bar{u}-c}, \tag{17}$$

$$v_p(y_1)=v_p(y_2)=0, \tag{18}$$

$$h(y,c)=-\frac{kf\bar{u}}{C_0^2}i(y-a)+\frac{f}{C_0^2}(\bar{u}-c)u^0-f\varphi^0+[(\bar{u}-c)\varphi^0-u^0]' \\ -\frac{1}{y-a}[(\bar{u}-c)\varphi^0-u^0]. \tag{19}$$

为求解（17）—（18）式，首先求对应于（17）式的齐次方程（相当于令$h(y,c)\equiv 0$），的两个线性无关解，然后用格林函数法得出所要的解。显然，如果（17）式有奇点，则必要求

$$y_1\leqslant a\leqslant y_2.$$

这个条件实际上就是$c\in I_1\bigcup I_2$，而

$$I_1=[\bar{u}-C_0(y_1),\ \bar{u}-C_0(y_2)],\quad I_2=[\bar{u}+C_0(y_2),\ \bar{u}+C_0(y_1)], \tag{20}$$

由常微分方程理论，在$y=a$的附近，（17）式的齐次方程显然有如下形式的解：

$$v_p=(y-a)^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y-a)^n,\qquad a_0\neq 0, \tag{21}$$

将其代入（17）式的齐次方程得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_n(y-a)^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n(y-a)^{n-2} \\ +\sum_{n=-1}^{\infty}e_n(y-a)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y-a)^n=0, \tag{22}$$

其中

$$\sum_{n=-1}^{\infty}e_n(y-a)^n=-\left[\frac{f^2}{C_0^2}-\frac{k^2f\bar{u}}{C_0^2}(y-a)+\frac{f}{\bar{u}-c}\frac{1}{y-a}\right]. \tag{23}$$

最后有递推关系

$$\begin{cases}a_0\rho(\rho-2)=0, \qquad a_0\text{取为}1\\ (\rho+1)(\rho-1)a_1+\dfrac{f}{\bar{u}-c}a_0=0,\\ (n+\rho+2)(n+\rho+1)a_{n+2}+\dfrac{1}{\bar{u}-c}a_{n+1}+\sum\limits_{l=-1}^{n}a_l\cdot e_{n-l}=0,\end{cases} \tag{24}$$

故取$\rho=2$，从（24）式可决定一个解$v_1(y,c)$：

$$v_1(y,c)=(y-a)^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y-a)^n, \tag{25}$$

另一个线性无关解v_2可用 Frobienius 法[9]定出：

$$v_2 = g_0(c)v_1\ln(y-a) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y-a)^n, \qquad b_0 = 1$$

将其代入（17）式的齐次方程可以得出

$$g_0(c) = 0, \qquad b_1 = \frac{-f}{\bar{u}-c}, \qquad \cdots.$$

这样$v_2(y,c)$也是解析函数。我们把v_1、v_2延拓到除$c=\bar{u}$一点的全c平面上，而v_1、v_2在$c=\bar{u}$一点的值无关紧要。因为我们最终目的是求v_k，还要对c积分，只要弄清被积函数（主要由v_1和v_2决定）在$c=\bar{u}$附近的结构就够了。

现在开始构造格林函数。记

$$G_1(y,c) = v_1(y,c)v_2(y_1,c) - v_1(y_1,c)v_2(y,c), \tag{26}$$

$$G_2(y,c) = v_1(y,c)v_2(y_2,c) - v_1(y_2,c)v_2(y,c), \tag{27}$$

$$D(c) = v_1(y_1,c)v_2(y_2,c) - v_1(y_2,c)v_2(y_1,c). \tag{28}$$

伏朗斯基行列式可算得为

$$w(v_1,v_2) = 2(y-a). \tag{29}$$

故有格林函数

$$G(y,y',c) = \begin{cases} \dfrac{G_1(y',c)G_2(y,c)}{D(c)\cdot 2(y'-a)} & y' \leqslant y, \\ \dfrac{G_1(y,c)G_2(y',c)}{D(c)2(y'-a)} & y' > y. \end{cases} \tag{30}$$

从而（17）、（18）两式解为

$$v_p(y,c) = \int_{y_1}^{y_2} G(y,y',c)\frac{h(y',c)}{\bar{u}-c}\mathrm{d}y'. \tag{31}$$

令

$$\tilde{h}(y,c) = (y-a)\frac{h(y,c)}{\bar{u}-c} \tag{32}$$

则可用分步积分法把v_p改写成

$$v_p(y,c) = \int_{y_1}^{y} \frac{G_2(y,c)[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'}{D(c)\cdot 2(y'-a)}\mathrm{d}y' + \int_{y}^{y_2} \frac{G_1(y,c)[G_2(y',c)\tilde{h}(y',c)]'}{D(c)\cdot 2(y'-a)}\mathrm{d}y', \tag{33}$$

从（15）式得到v_k：

$$\begin{aligned} v_k &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma + c_R} v_p \cdot \mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c, \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{y_1}^{y}\int_{c_\Gamma + c_R} \frac{G_2(y,c)[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'}{2\pi i D(c)\cdot 2(y'-a)}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y' \end{aligned}$$

$$+\lim_{R\to\infty}\int_{y}^{y_2}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma+c_R}\frac{G_1(y,c)[G_2(y',c)\tilde{h}(y',c)]'}{D(c)\cdot 2(y'-a)}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'. \tag{34}$$

从(34)式我们就可运用围道积分的柯西定理了。为此必须先弄清$c_\Gamma+c_R$内被积函数的奇点，它们只可能是满足下式的c值:

$$D(c)(y'-a)(\bar{u}-c)=0.$$

(1) $c=\bar{u}$

如果$c=\bar{u}$只是被积函数的孤立奇点，那我们可以在$c=\bar{u}$点附近把被积函数展成$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n(c-\bar{u})^n$，对于在$c=\bar{u}$点求围道积分是足够了。如果$c=\bar{u}$非孤立奇点，则必有一串$c_l$，使得$\lim_{l\to\infty}c_l=\bar{u}$，同时$c_l$又是奇点即满足$D(c_l)=0$。当利用柯西定理将$\int_{C_\Gamma+C_R}$化为关于这些奇点的围道积分时可以用$\lim_{c_l}\int_{c_l}$来逼近，这时$\sum_{cl}\int_{c_l}$已包含$\int_{\bar{u}}$。无论如何$c=\bar{u}$这点都能被妥善处理。我们不妨简单地认为$D(c)=0$的$c$值包括$c=\bar{u}$，具体算积分时不再对此点特别考虑。

(2) $D(c)=0$

满足$D(c)=0$的点只能是离散的，否则由于$D(c)$是解析函数就会导出$D(c)\equiv 0$，从(28)式来看显然不可能。我们把这些点记为c_l。

(3) $y'-a=0$

这相当于$c=\bar{u}\pm C_0(y')$，记为

$$c^{\pm}=\bar{u}\pm C_0(y'). \tag{35}$$

有了上述讨论，用柯西定理就可把(34)式化为

$$v_k=\int_{y_1}^{y}\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{cl}\oint_{c_l}+\oint_{c^+}+\oint_{c^-}\right)\frac{G_2(y,c)[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)\cdot 2(y'-a)}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'$$
$$+\int_{y}^{y_2}\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{cl}\oint_{c_l}+\oint_{c^+}+\oint_{c^-}\right)\frac{G_1(y,c)[G_2(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)\cdot 2(y'-a)}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'. \tag{36}$$

可以证明，(36)式中所有$\oint_{c^+}$和$\oint_{c^-}$形式的积分都等于零而不论$y'\leqslant y$还是$y'>y$。我们只以$y'\leqslant y$的情形为例证之。

注意到

$$y'-a=y'-\left(c^2-\frac{(\bar{u}-c)^2}{f\bar{u}}\right)$$
$$=(f\bar{u})^{-1}[(\bar{u}-c)^2-C_0^2]=(f\bar{u})^{-1}(c-c^+)(c-c^-),$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^\pm}\frac{G_2(y,c)[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)\cdot 2(y'-a)}\mathrm{e}^{-ikct}\cdot \mathrm{d}c$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^\pm}\frac{G_2(y,c)[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)(f\bar{u})^{-1}(c-c^+)(c-c^-)}\mathrm{e}^{-ikct}\cdot \mathrm{d}c$$
$$=\frac{\mp f\bar{u}G_2(y,c)}{D(c)2(c^+-c^-)}\mathrm{e}^{-ikct}[G_1{}'(y',c)+G_1(y',c)\tilde{h}'(y',c)]_{c=c^\pm}, \tag{37}$$

而容易算得

$$G_1(y',c)\big|_{c=c^\pm}=-v_1(y_1,c^\pm), \tag{38}$$
$$G_1{}'(y',c)\big|_{c=c^\pm}=-v_1(y_1,c)b_1(c^\pm), \tag{39}$$
$$(\bar{u}-c)\tilde{h}(y',\ c)\big|_{c=c^\pm}=-(\bar{u}-c^\pm)\varphi^0-u^0, \tag{40}$$
$$(\bar{u}-c)\tilde{h}(y',\ c)\big|_{c=c^\pm}=\frac{f}{C_0^2}(\bar{u}-c^\pm)u^0-f_0\varphi^0, \tag{41}$$

因此，

$$[G_1{}'(y',c)\tilde{h}(y',c)+G_1(y',c)\tilde{h}'(y',c)]\big|_{c=c^\pm}=0, \tag{42}$$

从而 (37) 式的积分为零。最终就有：

$$v_k=\int_{y_1}^{y}\frac{1}{2\pi i}\sum_{c_l}\oint_{c_l}\frac{G_2(y,c)[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)\cdot 2(y'-a)}e^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'$$
$$+\int_{y}^{y_2}\frac{1}{2\pi i}\sum_{c_l}\oint_{c_l}\frac{G_1(y,c)[G_2(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)\cdot 2(y'-a)}e^{-ikct}\mathrm{d}c\mathrm{d}y'. \tag{43}$$

(43) 式清楚地表明，当$\bar{u}=$常数$\neq 0$时只有离散谱，解v_k是按对应于这些离散谱的特征波动展开。不过我们这里尚未指出离散谱的分类，而这个问题早已为曾庆存、李荣凤、张铭的工作解决了[4—5]。

u_k、φ_k也只有离散谱。我们仅证明u_k的情形。

$$u_k=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma+c_R}u_p\cdot \mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c,$$
$$=A+B \tag{44}$$

$$A=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma+c_R}\frac{1}{\tau(y)}[(\bar{u}-c)f\cdot v_p+C_0^2(y)'v_p]\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c, \tag{45}$$

$$B=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma+c_R}\frac{1}{\tau(y)}[(\bar{u}-c)u^0-C_0^2\cdot\varphi^0]\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c, \tag{46}$$

我们依次计算A和B

$$A=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma+c_R}\frac{1}{\tau(y)}[(\bar{u}-c)f\cdot v_p+C_0^2(y)'v_p]\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma + c_R}\frac{1}{\tau(y)}\int_{y_1}^{y}\frac{[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)\cdot 2(y'-a)}[(\bar{u}-c)fG_2(y,c)\\
&\quad + C_0^2(y)G_2'(y,c)]\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}y'\mathrm{d}c\\
&\quad + \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma + c_R}\frac{1}{\tau(y)}\int_{y}^{y_2}\frac{[G_2(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}}{D(c)\cdot 2(y'-a)}[(\bar{u}-c)fG_1(y,c)\\
&\quad + C_0^2(y)G_1'(y,c)]\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}y'\mathrm{d}c\\
&\quad + \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma + c_R}\frac{C_0^2(y)}{\tau(y)}\frac{G_1(y,c)G_2(y,c)-G_1(y,c)G_2'(y,c)}{D(c)\cdot 2(y-a)}h(y,c)\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\\
&= A_1 + A_2 + A_3,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

其中，A_1、A_2 和 A_3 依次代表它们前面的三个积分式。对这几个积分我们均有下面等式：

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{c_\Gamma + c_R} = \sum_{c_i}\oint_{c_i} + \oint_{c^+} + \oint_{c^-} + \oint_{c_0^+} + \oint_{c_0^-}, \tag{48}
$$

这里，

$$
c_0^{\pm} = \bar{u} \pm C_0(y), \qquad c^{\pm} = \bar{u} \pm C_0(y').
$$

我们不考虑 $\oint_{c_i}$ 式样的积分而只证明：对于 A_1 和 A_2 来说有

$$
\oint_{c^\pm} = \oint_{c_0^\pm} = 0;
$$

对于 A_3 则可以具体计算出其值来。

(a) 现在证明前一个结论，只以 A_1 为例。

$$
\begin{aligned}
&\oint_{c^\pm}\frac{(\bar{u}-c)fG_2(y,c)+C_0^2(y)G_2'(y,c)}{\tau(y)\cdot D(c)\cdot 2(y'-a)}[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\\
&= \frac{(\bar{u}-c)fG_2(y,c)+C_0^2(y)G_2'(y,c)}{\mp\tau(y)\cdot D(c)\cdot(c^+-c^-)}f\bar{u}\mathrm{e}^{-ikct}[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}\big|_{c=c^\pm}\cdot 2\pi i\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

最后一步从 (42) 式得出，又容易算得

$$
G_2(y,c)|_{c=c_0^\pm} = -v_1(y_2,c_0^\pm)b_0, \tag{50}
$$

$$
G_2'(y,c)|_{c=c_0^\pm} = v_1(y_2,c_0^\pm)\frac{1}{\bar{u}-c_0^\pm}, \tag{51}
$$

故

$$
[(\bar{u}-c)fG_2(y,c)+C_0^2(y)G_2'(y,c)]|_{c=c_0^\pm} = 0 \tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0^\pm}\frac{(\bar{u}-c)fG_2(y,c)+C_0^2(y)G_2'(y,c)}{\tau(y)\cdot D(c)\cdot 2(y'-a)}[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'_{y'}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c\\
&= \frac{(\bar{u}-c)fG_2(y,c)+C_0^2(y)G_2'(y,c)}{(c_0^+-c_0^-)\cdot D(c)\cdot(y'-a)}[G_1(y',c)\tilde{h}(y',c)]'\,\mathrm{e}^{-ikct}\big|_{c=c_0^\pm}
\end{aligned}
$$

$$=0 \tag{53}$$

(b) 现在计算A_3的值．对A_3这个积分来说，$c^{\pm}$不是被积函数的奇点，所以只需计算$\oint_{c_0^{\pm}}$．注意到

$$[G_1'(y,c)G_2(y,c)-G_1(y,c)G_2'(y,c)]_{c=c_0^{\pm}}=0, \tag{54}$$

及

$$[G_1'(y,c)G_2(y,c)-G_1(y,c)G_2'(y,c)]'|_{c=c_0^{\pm}}=\left.\frac{4D(c)(\bar{u}-c)}{f\bar{u}}\right|_{c=c_0^{\pm}}, \tag{55}$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0^{\pm}}\frac{C_0^2(y)}{\tau(y)}\frac{G_1'(y,c)G_2(y,c)-G_1(y,c)G_2'(y,c)}{D(c)\cdot(y-a)}\tilde{h}(y,c)e^{-ikct}dc$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0^{\pm}}\frac{G_1'G_2-G_1G_2'}{(c-c_0^+)^2(c-c_0^-)^2}\frac{f\bar{u}\cdot C_0^2(y)}{2D(c)}\tilde{h}\quad(y,c)e^{-ikct}dc$$

$$=-[(G_1'G_2-G_1G_2')\frac{f\bar{u}}{(c-c_0^{\pm})^2}\frac{\tilde{h}(y,c)}{2D(c)}C_0^2(y)\,e^{-ikct}]_c'|_{c=c_0^{\pm}}$$

$$=(G_1'G_2-G_1G_2')_c'\frac{f\bar{u}\cdot C_0^2(y)\cdot\tilde{h}(y,c)}{2D(c)\cdot(c_0^+-c_0^-)^2}\;e^{-ikct}|_{c=c_0^{\pm}}$$

$$=\frac{1}{2}[(\bar{u}-c_0^{\pm})\varphi^0-u^0]e^{-ikc_0^{\pm}t}. \tag{56}$$

综合以上 (a) 与 (b) 得到的结果，我们就计算出了A.

$$A=\sum_{c_l}\oint_{c_l}\frac{[\cdots\cdots]}{D(c)}e^{-ikct}dc+\frac{1}{2}[(\bar{u}-c_0^+)\varphi^0-u^0]e^{-ikc_0^+t}$$

$$+\frac{1}{2}[(\bar{u}-c_0^-)\varphi^0-u^0]e^{-ikc_0^-t}. \tag{57}$$

现在计算B.

$$B=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\Gamma+c_R}\frac{1}{\tau(y)}[(\bar{u}-c)u^0-C_0^2\varphi^0]e^{-ikct}dc$$

$$\frac{1}{2\pi i}(\oint_{c_0^+}+\oint_{c_0^-})\frac{(\bar{u}-c)\varphi^0-u^0}{(c-c_0^+)(c-c_0^-)}e^{-ikct}dc$$

$$=\frac{1}{c_0^+-c_0^-}[(\bar{u}-c_0^+)u^0-C_0^2\varphi^0]e^{-ikc_0^+t}$$

$$-\frac{1}{c_0^+-c_0^-}[(\bar{u}-c_0^-)u^0-C_0^2\varphi^0]e^{-ikc_0^-t}$$

$$=\frac{1}{2}[u^0+C_0\varphi^0]e^{-ikc_0^+t}+\frac{1}{2}(u^0-C_0\varphi^0)e^{-ikc_0^-t}, \tag{58}$$

由于$\bar{u}-c_0^{\pm}=\pm C_0$，所以从 (57) — (58) 式可以得到如下结果：

$$A+B=\sum_{c_l}\oint_{c_l}\frac{[\cdots\cdots]}{D(c)}e^{-ikct}dc, \tag{59}$$

利用 (44) 式也就是

$$u_k(y,t)=\sum_{c_l}\oint_{c_l}\frac{[\cdots\cdots]}{D(c)}\mathrm{e}^{-ikct}\mathrm{d}c, \tag{60}$$

至此我们证明了当基本气流为常数时决不会出现连续谱，而只会有离散谱出现。关于谱点的分类可以参看文献[4—5]。离散谱分为三支，其中两支为快波，一支为慢波。

参 考 文 献

[1] Case, K.M., 1960, Stability of inviscid plane couette flow, *The Physics of Fluids*, 3, 143—148.

[2] Burger, A.P., 1966, Instability associated with the continuous spectrum in a baroclinic flow, *J. Atmos. Sci.*, 23, 272—277.

[3] 卢佩生、卢 理、曾庆存，1986，正压准地转模式的谱和扰动的演变，中国科学，B辑，第11期，1225—1233.

[4] 曾庆存、李荣凤、张 铭，1990，旋转二维可压缩流动的谱和特征函数，I：谱点的分布，大气科学，14，No.2, 129—142.

[5] 曾庆存、李荣凤、张 铭，1991，旋转二维可压缩流动的谱和特征函数，II：谱和谱函结构的分析，大气科学，15，No.1, 1—14.

[6] 曾庆存，1979，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，十一章，科学出版社.

[7] 张明华，博士论文，大气动力学中的连续谱及其在大气环流中的重要地位.

[8] 郭敦仁，1978，数学物理方法，156—158，人民教育出版社.

[9] 王竹溪、郭敦仁，1965，特殊函数概论，68—71，科学出版社.

The Spectrum of the System of the Barotropic Primitive Equations and Its Solution with Initial Values
Part I: $\bar{u}=$ const.

Wang Xiyong and Zeng Qingcun

(LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

In this paper the methods of Laplace transform and residue integration are used analyse the spectrum of the system of linearized barotropic primitive equations. From explicit reduction of mathematics, the solution to the initial value problem is obtained, ($\bar{U}=$const.), thus the conditions of the appearance of continuous spectrum and discrete spectrum are determined in principal. Compared with earlier results, an apparent feature of this paper is the completeness of the solution, and hence the expansion theorem is naturally valid.

Key words: continous spectrum; discrete spectrum; Laplace transform; inverse Laplace transformation; residue integration.