

正压涡旋不稳定问题的研究

张 铭

(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100080)

提 要

本文对正压涡旋上的不稳定问题作了讨论, 给出了刚性旋转涡块失稳的研究结果。研究表明, 这种情况下依边界条件的不同, 可有两类不稳定波动发生, 在热带气旋的特定部位, 有与该理论分析相一致的波动存在。

关键词: 涡旋; 不稳定; 波动。

一、引 言

涡旋是大气和海洋中常见的运动形态, 大气中小至龙卷, 大到台风和气旋, 海洋中的中尺度涡等都是涡旋形态的系统。这类系统有些会带来严重的灾害, 给国民经济造成重大损失, 如龙卷和强台风等。

涡旋基流中的失稳问题很早就引起人们的注意^[1]。该不稳定是离心不稳定的一种。两个同心旋转圆柱间流体的库埃特流的不稳定性是一个研究得比较多的涡旋气流的不稳定问题, 至今这方面已有不少成果发表^[2-4]。然而大气涡旋中的失稳问题要比该问题复杂, 这是由于要考虑地球自转的影响和大气的可压缩性, 此外基流也不受内环刚壁的限制。

在卫星云图和雷达照片上可见, 台风和气旋内部有螺旋结构的云带, 龙卷内也观测到螺旋结构。该螺旋结构可以看作是螺旋波, 它们的发生是由于涡旋基流失稳的缘故。从台风云墙向外一直到台风外缘是台风螺旋雨带和螺旋云带存在的地区^[5]。该区域切向风速随着距台风中心的距离 r 增加而减小。对于台风中螺旋雨带和螺旋云带的天气学和动力学研究目前已有不少成果^[6-8]。在台风云墙之内, 观测表明切向风速随 r 成正比。在该区域的稳定性问题是一个令人感兴趣的问题, 有关这方面的研究工作还不多。本文试图对此做些研究。

观测表明, 台风眼一般呈圆形, 但也有卵形、椭圆形和不规则形的, 有些强台风具有双眼结构^[5]。这些观测事实均可用本文的工作来解释, 故而本文的研究不仅有理论意义也有一定的应用价值。

本文仅研究正压流体涡旋失稳的线性问题, 这是由于线性问题较简单, 易于数学处理, 而正压大气在很多情况下可作为实际大气的一种近似, 斜压大气通常可用多层正压大气来逼近, 因此研究正压涡旋的失稳问题仍有重要的意义。

1992年11月14日收到, 1993年7月15日收到修改稿。

* 国家基础性研究攀登计划和国家自然科学基金资助课题。

二、数学模型

考虑柱坐标用的正压原始方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} - f v - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + f u + \frac{u v}{r} = -\frac{\partial \phi}{r \partial \theta}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial r} + v \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} + \phi \left(\frac{\partial r u}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

这里的符号均为气象中常用, 考虑基态为一对称涡旋, 则可设

$$u = u', \quad v = \bar{V}(r) + v', \quad \phi = \bar{\phi}(r) + \phi', \quad (2)$$

此时基态满足梯度风平衡

$$f\bar{V} + \frac{\bar{V}^2}{r} = \frac{d\bar{\phi}}{dr}, \quad (3)$$

为简单起见这里设 f 为常数。将方程 (1) 线性化, 再作变换 $\xi = \ln(r/r_0)$, 由该变换可知当 $r \rightarrow 0$ 时 $\xi \rightarrow -\infty$, $r \rightarrow r_0$ 时 $\xi \rightarrow 0$, 故该变换把空间 $(0, r_0)$ 映射到空间 $(-\infty, 0)$ 上; 此时有 $d\xi = dr/r$ 。设 $U = ru'$, $V = rv'$, $\bar{\Omega} = \bar{V}/r$, $\alpha = \frac{1}{r} \frac{d\bar{\phi}}{d\xi}$, $\bar{\phi} = \bar{\phi}/r^2$, 则方程 (1) 可线性化为

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \bar{f} V = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\Omega} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \bar{f} U = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \alpha U + \bar{\phi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

这里 $\bar{f} = f + 2\bar{V}/r$, $\bar{f} = f + \bar{V}/r + \partial \bar{V}/\partial r$, 且 $\bar{\Omega}$ 、 $\bar{f}$ 、 $\bar{f}$ 、 α 、 $\bar{\phi}$ 均仅为 r 的函数, 亦即仅与 ξ 有关。设

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\hat{U}(\xi) \\ \hat{V}(\xi) \\ \hat{\phi}(\xi) \end{bmatrix} e^{i(m\theta - \sigma t)}, \quad (5)$$

这里不失一般性设 $m \geq 0$, 将 (5) 式代入 (4) 式后可得

$$\begin{cases} (\sigma - m\bar{\Omega})\hat{U} - \bar{f}\hat{V} = -\frac{d\hat{\phi}}{d\xi}, \\ (\sigma - m\bar{\Omega})\hat{V} - \bar{f}\hat{U} = m\hat{\phi}, \\ (\sigma - m\bar{\Omega})\hat{\phi} - \alpha\hat{U} - \bar{\phi} \left(\frac{d\hat{U}}{d\xi} + m\hat{V} \right) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

(6) 式为一线性变系数常微分方程组, 若加上相应的边界条件就构成一个常微分方程组

的特征值问题。 σ 即为特征值, 相应的特征函数即为特征波动。当 σ 为复数且虚部大于零时扰动 (特征波动) 是不稳定的, 亦即基流发生失稳。

三、刚性旋转涡块上的稳定性问题

由于方程(6)是变系数线性常微分方程组, 解析求解该问题是十分困难的, 为此本文仅考虑一个气旋式旋转的刚性涡块基流的失稳问题。此时有 $\bar{\Omega} = \text{常数}$, $\bar{V}(r) = r\bar{\Omega}$, 即基流速度与 r 成正比。在台风中位于最大风速圈内的切向风速分布基本上具有这种形式。由于假定了 $f = \text{常数}$, 故 $\tilde{f} = f + 2\bar{V}/r = f + 2\bar{\Omega} = \text{常数}$, $\tilde{f} = f + \bar{V}/r + \partial\bar{V}/\partial r = \bar{f} + 2\bar{\Omega} = \tilde{f} = \text{常数}$ 。积分梯度风平衡方程(3), 且不妨设 $r=0$ 处 $\bar{\varphi}=0$, 则可得 $\bar{\varphi} = \int (f\bar{V} + \bar{V}^2/r)dr = \bar{\Omega}(f + \bar{\Omega})r^2/2$, 故此时有 $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi}/r^2 = \bar{\Omega}(f + \bar{\Omega})/2 = \alpha/2 = \text{常数}$ 。这样, 在以上假定下方程(6)退化为一个常系数线性齐次微分方程组。现考虑以下两种情况的特征值问题及基流失稳的情况。

1. 第一种情况

讨论一个环区内的运动, 即有 $R_1 \leq r \leq R_2$, 并设 U, V, φ 在该环区内外边界上有界。这时可设

$$\begin{bmatrix} \hat{U}(\xi) \\ \hat{V}(\xi) \\ \hat{\varphi}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} e^{in\xi}, \quad (7)$$

这里 U_0, V_0, φ_0 为常数。现讨论 $n > 0$ 的情形。将(7)式代入(6)式有

$$\begin{cases} (\sigma - m\bar{\Omega})U_0 - \tilde{f}V_0 + in\varphi_0 = 0, \\ -\tilde{f}U_0 + (\sigma - m\bar{\Omega})V_0 - m\varphi_0 = 0, \\ -\tilde{\varphi}(in + 2)U_0 - m\tilde{\varphi}V_0 + (\sigma - m\bar{\Omega})\varphi_0 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

这是一个复系数的齐次线性代数方程组, 若欲有非零解, 则其系数行列式应为零。展开其系数行列式后可得以下关于 χ 的三次方程

$$\chi^3 + \{[n(2i - n) - m^2]\tilde{\varphi} - \tilde{f}^2\}\chi - 2m\tilde{f}\tilde{\varphi} = 0, \quad (9)$$

这里 $\chi = \sigma - m\bar{\Omega}$ 。方程(9)是一个复系数的三次方程, 解此方程可求出根 χ , 若根 χ 有正的虚部则扰动是不稳定的, 也即基流失稳。

由(5), (7)两式可知, 此时扰动的位相为 $\psi = n\xi + m\theta - \sigma$, $t = n \ln(r/r_0) + m\theta - \sigma$, 这里 σ 为 σ 的实部, 其等位相线的方程是

$$n \ln r + m\theta - \sigma, t = \text{常数}. \quad (10)$$

上式也可写成

$$r = \tilde{r} e^{-\frac{m}{n}\theta}, \quad (11)$$

这里 $\tilde{r} = \tilde{r}(t)$, 由上式可见, 当 t 固定时 $\theta \rightarrow \infty$, 有 $r \rightarrow 0$, 等位相线是一条对数螺线, 而 m 和 n 分别是 θ 和 r 方向的波数。

由于(9)是复系数方程, 虽可求出解析解的表达式, 但因其很繁不便于讨论, 为此先考虑以下简单情况。设 $\bar{\Omega} \gg f$, 在发展强烈的涡旋如台风、龙卷中可认为此条件满足, 此时有 $\tilde{f} = \bar{f} = f + 2\bar{\Omega} \approx 2\bar{\Omega}$, $\tilde{\varphi} = \bar{\Omega}(f + \bar{\Omega})/2 \approx \bar{\Omega}^2/2$, 令 $\chi = n\bar{\Omega}\tilde{\chi}$, 则(9)式可简化为

$$\tilde{\chi}^3 + \left[\frac{i}{n} - \left(\frac{m^2 + 8}{2n^2} + \frac{1}{2} \right) \right] \tilde{\chi} - \frac{2m}{n^3} = 0, \quad (12)$$

当 n 很大而 m 又并不很大的情况下, 即对 r 方向波长较短, m 方向波长较长的波, 方程(12)的第三项可忽略, 此时易求出方程(12)的根为 $\tilde{\chi}_1 = 0$, $\tilde{\chi}_{2,3} =$

$\pm \sqrt{\frac{m^2 + 8}{2n^2} + \frac{1}{2} - \frac{i}{n}}$ 。令 $a = \frac{(m^2 + n^2)}{2} + 4 > 0$, $b = -n < 0$, 则由 $\chi = n\bar{\Omega}\tilde{\chi}$ 知

$$\chi_{2,3} = \pm \sqrt{a + bi} \bar{\Omega} = \begin{cases} \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} i \right] \bar{\Omega}, \\ \left[-\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} i \right] \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (13)$$

(13)式中的第2式其虚部大于零, 故扰动不稳定, 其增长率为

$$\sigma_i = \text{Im}(\sigma) = \text{Im}(\chi) = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \bar{\Omega}, \quad (14)$$

由此可知 $\bar{\Omega}$ 越大则增长率亦越大。由(13)式中的第2式还可知该增长的不稳定扰动是逆基流传播的。

当 n 充分大时, 易知(13)式可进一步简化为

$$\chi_{2,3} \approx \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} n - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \bar{\Omega}, \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} n + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (15)$$

上式表明当 n 充分大时不稳定波的增长率趋于一个常数: $\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\Omega} \approx 0.7071 \bar{\Omega}$ 。

对于一般的情况, 我们可求方程(12)的数值解并通过关系 $\chi = n\bar{\Omega}\tilde{\chi}$ 求出相应的 χ 。图1、图2分别给出了用数值方法求得的 χ_r 和 χ_i (以 $\bar{\Omega}$ 为单位, $\chi_r = \text{Re}(\chi)$, $\chi_i = \text{Im}(\chi)$), 图的横坐标为波数 n , 图中曲线旁标注的数字是波数 m 。由于关于 χ 的方程是三次方程, 其有三个根, 这相应于图上的波动分为三支 χ_1 、 χ_2 和 χ_3 。由图可见 χ_2 和 χ_3 两支 $|\chi_r|$ 较大, 可称为快波, 它们的符号相反, 这是一对重力惯性波。注意, 在本文的假定下实际上已忽略了惯性的影响 (因 $\bar{\Omega} \gg f$), 而 $\bar{\varphi}$ 的影响则通过 $\bar{\Omega}$ 体现出来 (因 $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}/r^2 \approx \bar{\Omega}^2/2$)。另一支 χ_1 则 $|\chi_r|$ 较小, 是慢波, 且 $\chi_i < 0$, 该支波动是涡旋波。从图上可见这三支波动明显可分。

随着波数 m , n 的增加, χ_2 , χ_3 两支重力惯性波的 $|\chi_r|$ 均增加, 当 n 充分大时随 n 的变化呈线性趋势, 与上面(15)式的分析一致, 而涡旋波 χ_1 却与以上不同, 当固定波数 m 后, 随着 n 的增加 $|\chi_r|$ 减小。而固定波数 n 后, 对 $n \leq 5$ 的情况则 $|\chi_r|$ 先随 m 的增加而增大, 以后又随 m 的增加而减小; 而对较大的 n 则 $|\chi_r|$ 随 m 的增加而增大。

由图 2 可见, 对应于 $\chi_r < 0$ 的一支重力惯性波 χ_3 有 $\chi_i > 0$, 其是不稳定的。 χ_i 即为其增长率。在 $\bar{\Omega}$ 固定的情况下, 当波数 $m \geq 1$ 时, 对于固定的波数 n , 增长率随着 m 的增加而减小, 而当固定 m 后则随着 n 的增加而增加; 当 n 充分大时则增长率增大的速度变缓, χ_3 的曲线趋于水平, 这表明增长率将趋于一个极限, 这也与前面 (15) 式的分

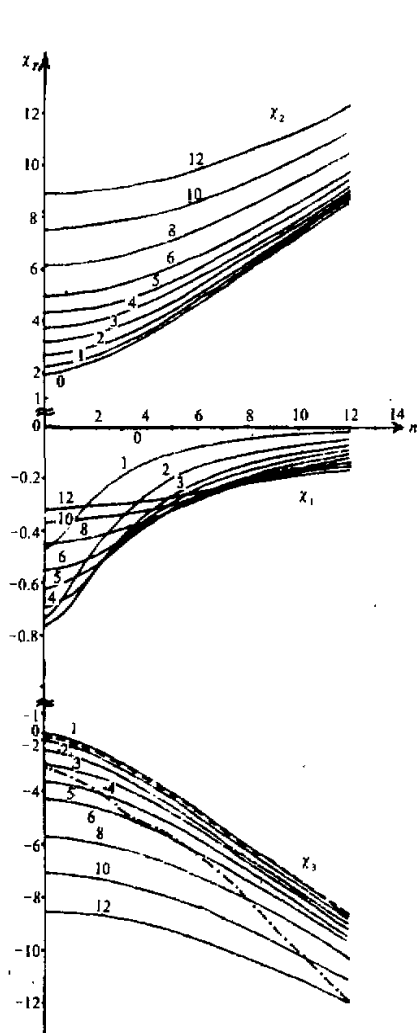


图 1 χ_r 分布图

χ_r 以 $\bar{\Omega}$ 为单位

在点划线上方 $m + \chi_r / \bar{\Omega} < 0$,
下方 $m + \chi_r / \bar{\Omega} > 0$

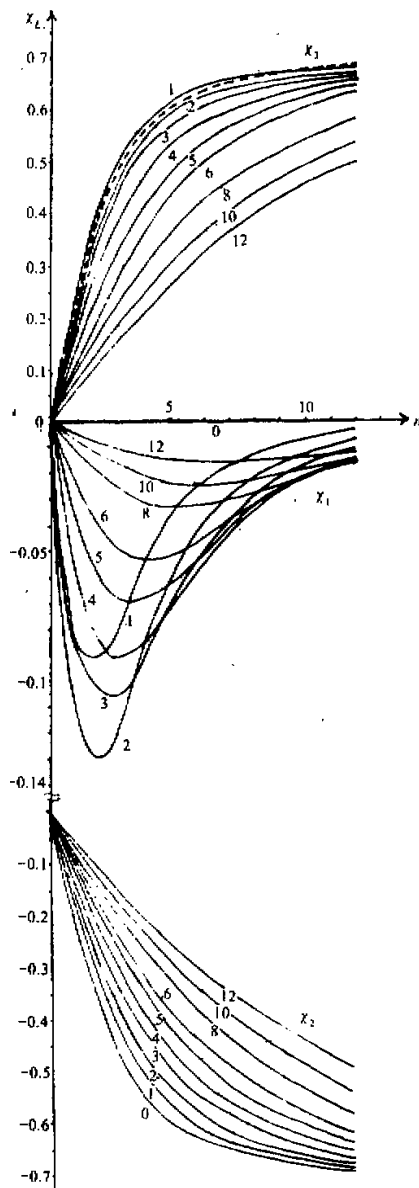


图 2 χ_i 分布图

χ_i 以 $\bar{\Omega}$ 为单位

析结果相一致; 当 $m=0$ 时 (此时波动与 θ 无关), 其增长率的变化趋势与 $m=1$ 的情况大致相同。

对于 $\chi_r > 0$ 的一支重力惯性波 χ_2 和涡旋波 χ_1 则 χ_r 均小于零, 故这些波动均是衰减的, 可仿上讨论衰减率随 m, n 的变化趋势, 这里不再赘述。

由于图 1 上的 χ_r 以 $\bar{\Omega}$ 为单位, 故图上纵轴的标度值其实是 $\chi_r / \bar{\Omega}$ 。从图 1 可见, 对于不稳定波系 χ_3 , 在图上点划线下方有 $m > |\chi_r / \bar{\Omega}|$, 即位于该区域的波动其频率 $\sigma_r = m\bar{\Omega} + \chi_r > 0$, 故该波动在 θ 方向是气旋式 (逆时针) 传播的, 而在 r 方向是向外传播的。在点划线上方区域 (其中包括波数 $m=0, 1, 2$ 的全体波动) 则有 $m < |\chi_r / \bar{\Omega}|$, 故 $\sigma_r < 0$, 此时的波动在 θ 方向是反气旋式 (顺时针) 传播的, 而在 r 方向则是向内传播的。

下面讨论需考虑 f 时的更一般的情形。此时可引入参数 $\delta = f / \bar{\Omega}$, 则有 $\tilde{f} = \tilde{f} = (2 + \delta)\bar{\Omega}$, $\tilde{\omega} = (1 + \delta)\bar{\Omega}^2 / 2$, 方程 (9) 可写成

$$\chi^3 + \left\{ (1 + \delta)ni - \left[(1 + \delta)\frac{n^2 + m^2}{2} + (2 + \delta)^2 \right] \right\} \bar{\Omega}^2 \chi - m(1 + \delta)(2 + \delta)\bar{\Omega}^3 = 0. \quad (16)$$

当 $\delta=0$ 时 (16) 式即退化为上面讨论的情形。用以上求方程数值解的方法同样可求方程 (16) 的数值解。

本文取参数 $\delta=0.3$ 作了数值计算, 计算结果表明, 此时波动仍分为二支重力惯性波和一支涡旋波, 与 $\delta=0$ 时一样, $\chi_r < 0$ 的一支重力惯性波是不稳定的, 算得的 χ_r 与 χ_i 也有类似图 1, 2 的分布 (图略)。为了看出 δ 的影响, 表 1 和表 2 分别给出了取 $\delta=0.3$ 时当波数 $m=1, 2$ 及不同波数 n 时算得的不稳定重力惯性波 χ_3 支的 χ_r 和 χ_i (以 $\bar{\Omega}$ 为单位), 同时在表上还给出了 $\delta=0$ 的计算结果以资对照。

由表 1 可见考虑 f 后, 即取 $\delta=0.3$ 时在该表所列波数 m, n 范围内, 不稳定波动的

表 1 不稳定重力惯性波的 χ_r 值 (以 $\bar{\Omega}$ 为单位)

n		1	2	3	4	5	6
$m=1$	$\delta=0.0$	-2.0273	-2.4285	-2.9364	-3.5051	-4.1115	-4.7427
	$\delta=0.3$	-2.3301	-2.7949	-3.3930	-4.8982	-5.7685	-6.7004
$m=2$	$\delta=0.0$	-2.1862	-2.5857	-3.0039	-3.6408	-4.2358	-4.8564
	$\delta=0.3$	-2.5091	-3.0606	-3.7329	-4.1607	-4.9060	-5.6885
$m=4$	$\delta=0.0$	-3.1643	-3.4344	-3.8224	-4.2895	-4.8112	-5.3718
	$\delta=0.3$	-3.6176	-4.3105	-5.1414	-4.8982	-5.7685	-6.7004

表 2 不稳定重力惯性波的 χ_i 值 (以 $\bar{\Omega}$ 为单位)

n		1	2	3	4	5	6
$m=1$	$\delta=0.0$	0.279556	0.441614	0.531138	0.583791	0.616725	0.638426
	$\delta=0.3$	0.315573	0.503534	0.604360	0.663913	0.701423	0.725093
$m=2$	$\delta=0.0$	0.281748	0.435773	0.520940	0.572478	0.605838	0.628531
	$\delta=0.3$	0.318354	0.481063	0.564322	0.651287	0.681943	0.700422
$m=4$	$\delta=0.0$	0.180761	0.322762	0.422307	0.490805	0.538726	0.573097
	$\delta=0.3$	0.205560	0.329737	0.402556	0.558885	0.584125	0.597647

$|\chi_r|$ 均比不考虑 f ($\delta=0$) 时增大了; 而由表 2 可见, 不稳定波的 χ_r 除 $m=4, n=3$ 时略有减小外, 也都比不考虑 f 时增大, 故而对于波数 $m=1, 2$ 的情况, 考虑了 f 后有利于波动的不稳定。

2. 第二种情况

考虑以涡旋中心为圆心的一个圆形区域中的运动, 即 $0 \leq r \leq R$, 并设 U, V, φ 在该圆周上有界。由于在圆心即在 $r=0$ 处也就是 $\xi \rightarrow -\infty$ 时有

$$U=0, \quad V=0, \quad \varphi=0, \quad (17)$$

而(7)式并不满足(17)式的约束, 故在此不能用, 为此在考虑了(17)式的约束条件后可设

$$\begin{bmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \\ \varphi(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} e^{\eta \xi}, \quad (18)$$

这里 U_0, V_0, φ_0 为常数; $\eta > 0$ 。显然, (18)式满足以上圆心的约束和在圆周上 U, V, φ 有界的边条件。在这种情况下, 波动的位相为 $\psi = m\theta - \sigma_r t$, 故当 t 固定后其等位相线是一条由涡旋中心向外辐射的半直线。波动仅在 θ 方向 (切向) 传播而在 r 方向 (径向) 没有传播, 而波动的振幅则由外向涡旋中心衰减。

将(18)式代入(4)式后可得类似(8)式的方程组, 只不过此时应将(8)式中的 in 换成 η 。类似也可得以下关于 χ 的三次方程

$$\chi^3 + \{\eta(\eta+2) - m^2\} \tilde{\varphi} - \tilde{f}^2 \chi - 2m \tilde{f} \tilde{\varphi} = 0, \quad (19)$$

这里也有 $\chi = \sigma - m\bar{\Omega}$ 。与方程(9)不同的是(19)式是一个实系数三次方程。该方程可写成 $\chi^3 + p\chi + q = 0$ 的形式。这里 $p = \{\eta(\eta+2) - m^2\} \tilde{\varphi} - \tilde{f}^2, q = -2m \tilde{f} \tilde{\varphi}$, 由三次方程理论可知其判别式为

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = m^2 \tilde{f}^2 \tilde{\varphi}^2 + \frac{1}{27} \{\eta(\eta+2) - m^2\} \tilde{\varphi} - \tilde{f}^2 \tilde{\varphi}^3, \quad (20)$$

当 $\Delta < 0$ 时方程有三个不等的实根, 扰动是稳定的(中性的); 而当 $\Delta > 0$ 时则有一个实根和一对共轭的复根, 此时基流必是不稳定的。由 $\Delta > 0$ 的条件易推得如下不等式:

$$\eta(\eta+2) > G + m^2 - 3\sqrt[3]{m^2 G}, \quad (21)$$

这里 $G = \tilde{f}^2 / \tilde{\varphi}$ 。仿上引入参数 $\delta = f / \bar{\Omega}$, 则有 $G = 2(\delta+2)^2 / (\delta+1)$ 。注意到 $\eta > 0$ 时不等式(21)的解为

$$\eta > \eta_0 = \sqrt{1 + G + m^2 - 3\sqrt[3]{m^2 G}} - 1. \quad (22)$$

表 3 给出了取 $\delta=0$ 和 $\delta=0.3$ 时 η_0 随 m 的变化。由表可见, 当 $m=2$ 时 η_0 均有最小值,

表 3 η_0 随 m 的变化

m		0	1	2	3	4	6	8	10	12
η_0	$\delta=0.0$	2.000	1.000	0.864	1.349	2.143	4.019	6.000	8.008	10.025
	$\delta=0.3$	2.023	1.026	0.887	1.364	2.152	4.021	6.000	8.007	10.023

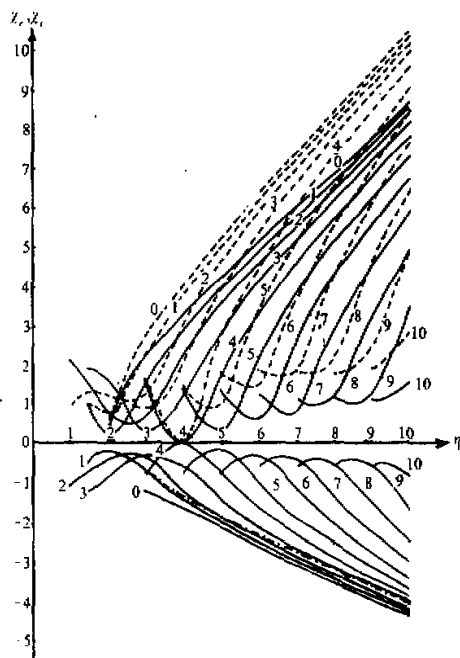


图3 第二种情形 χ_1, χ_2 分布图
 η 轴上方实线为 χ_1 , 虚线为 $\text{Im}(\chi_2)$,
 η 轴下方实线为 $\text{Re}(\chi_2)$, 均以 $\bar{\Omega}$ 为单位,
 图上点划线的意义见图1

此时基流最易发生不稳定。此外, 当考虑 f 影响时的 η_0 值与不考虑 f 时的值很相近, 这表明此时 f 对稳定性的影响不大。

对三次方程(19)同样可求数值解。图3给出了当 $\delta=0$ 且满足(22)式即 $\Delta>0$ 时对给定的 η 和 m 值由方程(19)算得的解 χ_1, χ_2 (图上其值均以 $\bar{\Omega}$ 为单位, 图中实、虚线旁标注的数字为波数 m)。图中 η 轴上方的实线为 χ_1 , 其为实数, 该支波动是中性的。 η 轴上方的虚线则为 χ_2 的虚部, 即为不稳定波系 χ_2 的增长率 (以 $\bar{\Omega}$ 为单位)。 η 轴下方的实线为 χ_2 的实部。由于 $\text{Re}(\chi_3)=\text{Re}(\chi_2)$, $\text{Im}(\chi_3)=-\text{Im}(\chi_2)$, 故图3中未给出衰减的波系 χ_3 。

计算表明, 此时特征波动亦分为三支, 一支 $\sigma_r>0$, $\sigma_i=0$, 是沿基流传播的中性波动 (即 χ_1), 另两支 $\chi_r<0$, 是逆基流传播的, 对于 m 为0, 1等较小的波数, 由于 $m\bar{\Omega}+\chi_r<0$, 其是顺时针传播的, 而对较大的 m 则 $m\bar{\Omega}+\chi_r>0$, 是逆时针传播的。在这两支波系中一支是增长的, 即不稳定的(χ_2), 另一支则是衰减的(χ_3), 使人最感兴趣的是这支不稳定波

系, 其增长率随 m 和 η 的变化见图3。从图3上还可可见, 当 $\eta<3$ 时只有波数 $m=1-3$ 的波动是不稳定的, 对于其他的波数, 由于不满足(22)式, $\Delta<0$, 故都是中性的。

由于 f 对较强涡旋失稳的影响并不大 (见表3), 故不再对 $\delta=0.3$ 的情况进行讨论。

四、讨 论

以上本文从理论上探讨了正压刚性涡块基流失稳的两种情形, 那么在实际大气中这种情况是否存在呢? 下面对此进行分析和讨论。

强热带气旋 (台风) 基本气流可以看作是圆对称的, 作为最粗略的近似其低层可视为一个正压的涡旋。由热带气旋中心至最大风速圈之间的切向风速分布基本上呈线性。这样由台风中心至最大风速圈的环型区域内就基本符合本文讨论的第一种情况——基流失稳的条件, 故该区域内应有不稳定波发展, 且 m 为0到2的波增长率较大, 并是顺时针传播的。

当 $m=0$ 时该波的传播与 θ 无关, 等位相线是围绕中心的一个圆。有些强台风具有双眼结构, 那就很类似该不稳定波动。Hoose, Colon 曾描述过 Beulah 飓风的双眼结

构。雷达照片表明,有一环状回波包围该台风内眼,其外又有另一同心云壁包围,内眼平均直径约 13 km,外眼平均直径约 46 km,观测表明:第二个眼是在台风达到最强前不久出现的。从单眼变成双眼结构然后回到单眼约 13 min^[9]。在西太平洋的强台风中,这种双眼结构也常可见到,文献[5]中图 2.23 给出了 7514 号台风双眼结构的雷达照片,此时台风中心气压为 940 hPa,近中心最大风速为 45 m/s,内眼直径 10—15 km,外眼直径为 70—80 km。根据这些资料可估计出此时 $\bar{\Omega} = 45 / (0.5 \times 15 \times 1000) \approx 6.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $n = 2\pi / \ln(80/15) \approx 3.75$ 。由图 2 可查知其增长率 $\sigma_i = 0.56 \times 6.0 \times 10^{-3} \approx 3.4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 。故扰动增长 e 倍所需时间 (e -folding time) 为 $300 \text{ s} = 5 \text{ min}$,这与双眼结构存在的时间尺度是一致的。故可认为台风双眼结构的形成是由于该类型基流失稳造成 $m=0$ 的扰动发展的结果。

对于 $m \neq 0$ 的波动,其等位相线是一条对数螺线,故其表现为螺旋波。在热带气旋卫星云图上可发现,在台风眼外的云墙内侧存在与其类似的螺旋结构。在风云一号气象卫星图集^[10]的封面上印有一幅印刷精美的台风卫星云图,该图在台风眼左侧的云墙内侧该螺旋结构表现得特别清晰,并可见其在 r 方向的波长非常短。这种结构的形成可认为就是在第一种情况下基流失稳造成 $m \neq 0$ 的螺旋波不稳定发展的结果。这里要指出的是,螺旋结构与台风云墙外的螺旋雨带和螺旋云带不同,除因其所处的位置不同故基本气流不同外(前者基流随 r 增大线性增加,后者则随 r 增加而减小),前者 r 方向的波长非常短而后者则要长得多。

台风眼及邻近的区域则符合以上讨论的第二种情况,在那里可出现该情况下的不稳定波动模态,下面对此进行讨论。

由以上分析可知,在该区域当 $\eta < 4$ 时仅有 $m=0-4$ 的模态是不稳定的。 $m=0$ 的模态显然与圆形的台风眼相应。由于该类型不稳定模态的振幅向涡旋中心作指数衰减,故 $m=1$ 的不稳定模态应有一个伸向涡旋中心的凸起,这相应于卵形的台风眼;而 $m=2$ 的不稳定模态则有两个这样的凸起,其相应于椭圆形的台风眼。统计表明,椭圆形的台风眼较卵形台风眼出现的机会多^[5]。由图 3 可见,当 $\eta < 2$ 时, $m=2$ 的不稳定模态的增长率确比 $m=1$ 时的要大。对于 $m > 2$ 的不稳定模态,由于其向涡旋中心有多个凸起,故与其相应的台风眼则为不规则形,不规则形的台风眼较少出现。

文献[8]的附图 2.3 上给出了台风 Cleo



图 4 台风 Cleo (1954) 雷达照片示意图



图 5 台风 HAL (1988) 可见光云图示意图

(1954)的雷达照片,图4给出了该照片的示意图,图上可见有3个伸向台风中心的凸起。文献[10]的图8则给出了1988年9月31日06:21 GMT西北太平洋上HAL台风的可见光卫星云图。图5给出该卫星云图的示意图,图上亦可见有4个伸向台风中心的凸起。

以上分析还表明,当 η 较小时,不稳定波动沿径向的衰减较慢,故此时易被观测到。对于 η 较大的不稳定波动,虽然其增长率大,对应的波数 m 也较大,但由于其沿径向衰减太快,因而凸起就不明显,故实际上很难被观测到。

由于本文的模式较简单,难以概括热带气旋中存在的各种波动模态,不过如上述,热带气旋特定部位的一些某些波动模态与本文的理论分析还是相当吻合的。

最后要指出的是,本文主要对正压涡旋刚性旋转涡块上的稳定性问题作了研究,对于更一般的问题(由方程(6)加相应的边条件构成),由于数学处理的困难,往往要用摄动法或数值计算来研究,这是我们今后要做的工作。

参 考 文 献

- [1] Rayleigh, Lord, 1880, On the stability, or instability, of certain fluid motions, *Proc. London Math. Soc.*, 11, 57—70. Also in: *Scientific Papers* (1899), Vol.1, 474—487, Cambridge University Press.
- [2] Drazin, P.G. and Howard, L.N., 1966, Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid, in: *Advances in Applied Mechanics*, Vol.7, ed. G. Kuerti, 1—89, Academic Press.
- [3] Howard, L.N. and Gupta, A.S., 1962, On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows, *J. Fluid Mech.*, 14, 463—476.
- [4] Di Prima, R.C. and Eagles, P.M., 1977, Amplification rates and torques for Taylor—vortex flows between rotating cylinders, *Phys. Fluids*, 20, 171—175.
- [5] 陈联寿、丁一汇, 1979, 西太平洋台风概论, 科学出版社, 45—57。
- [6] 刘武适、杨大升, 1980, 台风的螺旋结构, *气象学报*, 38, No.3, 193—204。
- [7] Willoughby, H.E., 1978, A possible mechanism for the formation of hurricane rain bands, *J. Atmos. Sci.*, 35, 838—848.
- [8] Anthes, R. A., 1982, *Tropical Cyclones — Their Evolution, Structure and Effects*, American Meteorological Society, 1982. 中译本: 李敏芳等译, 1987, 气象出版社, 46—56。
- [9] Hoose, H. M. and Colon, J. A., 1970, Some aspects of the radar structure of hurricane Beulah on September 9, 1967, *Mon. Wea. Rev.*, 98, No.7, 529—533.
- [10] 范天锡等, 1990, 风云一号气象卫星图集, 气象出版社。

A Study of the Unstability in the Barotropic Vortex

Zhang Ming

(Laboratory of Numerical Modelling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics,
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

In this paper the unstability in a barotropic vortex is discussed. The unstable condition of the vortex block of rigid rotation is given. It is shown that unstable waves of two kinds can be generated by different boundary conditions. There are the identical waves with theoretical analyses in a specified position of a tropical cyclone.

Key words: vortex; unstability; wave.