灰色时变参数模型及其对气候预报的应用

曹 杰* 张万诚 杨 明 陶 云

(云南省红河哈尼族彝族自治州气象台，蒙自 661100)

提 要

本文提出关于灰色系统预报的一种新模型，并应用该模型对蒙自 5 月雨量进行了预报。结果表明：灰色时变参数模型的预报准确性与其他几类模型相比有显著提高。

关键词：灰色模型；时变性；气候预报。

一、引 言

灰色系统是指介于白色(完全确知)和黑色(完全未知)系统间的一类系统。任一灰色系统，随着新信息的不断加入，该系统的灰度将随之发生改变，这就要求随时更新预报模型。然而，目前运用的灰色系统模型和多元回归模型，在预报时对系统的时变性和灰色性未予充分考虑，故造成较大的预报误差。

为克服经典灰色系统模型和多元回归模型存在的不足，本文根据灰色系统理论的信息处理原则，提出了关于灰色系统预报的灰色时变参数模型。这一模型的实质是充分考虑预报系统的灰色性和时变性，从而降低对预报系统状态的预报误差。最后用该模型对蒙自 5 月雨量序列进行了模拟和预报。

二、灰色时变参数模型

1. 灰色时变参数模型的概念

对 $n+1$ 个已知灰序列

$$y^{(0)}(t)、x_1^{(0)}(t)、x_2^{(0)}(t), \cdots x_n^{(0)}(t),$$

有其相应的一阶 AGO 序列

$$y^{(1)}(t), x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \cdots x_n^{(1)}(t),$$

则 GM(1，n+1)模型的微分方程为

1993 年 11 月 6 日收到，1994 年 4 月 27 日收到再改稿。

* 现在云南大学地球科学系工作。

$$\frac{\mathrm{d}y^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ay^{(1)}(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i x_i^{(1)}(t). \tag{1}$$

由(1)式推得

$$y^{(1)}(t)=\left[y_0^{(0)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a}x_i^{(1)}(t)\right]e^{-at}+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a}x_i^{(1)}(t)=c_0\mathrm{e}^{-at}+\sum_{i=1}^{n}c_i x_i^{(1)}(t). \tag{2}$$

根据 Taylor 定理，将(2)式中的指数部分展开为 Taylor 级数

$$y^{(1)}(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_pt^p+\sum_{i=1}^{n}c_i x_i^{(1)}(t)=\sum_{j=0}^{p}a_jt^j+\sum_{i=1}^{n}c_i x_i^{(1)}(t). \tag{3}$$

考虑(3)式中看系数a_j，c_i随时间参数t的变化，即

$$a_j\sim a_j(t);\ c_i\sim c_i(t);\qquad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p;\quad t=1,2,\cdots,m,m+1,\cdots$$

则灰色时变参数模型为

$$y^{(1)}(t)=\sum_{j=0}^{p}a_j(t)t^j+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)x_i^{(1)}(t)+\varepsilon(t), \tag{4}$$

$\varepsilon(t)$为一维随机噪声。置

$$\beta_{(p+n)\times m}(t)=\begin{bmatrix}a_j(t)\\ \cdot\\ c_i(t)\end{bmatrix},\qquad X_{(p+n)\times m}^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}t^j\\ \\ x_i^{(1)}(t)\end{bmatrix},$$

则(4)式可写为

$$Y^{(1)}(t)=\beta(t)X^{(1)T}(t)+\varepsilon(t), \tag{5}$$

式中$X^{(1)T}(t)$为$X^{(1)}(t)$的转置矩阵。

在满足约束条件

$$Y^{(1)}(t)=\beta(t)X^{(1)T}(t),$$

并使指标函数

$$J^{*}=[\beta(t)-\beta(t-1)]^2+\lambda[Y^{(1)}(t)-X^{(1)T}(t)\beta(t)]$$

达到最小的情况下，应用拉氏条件极值法获得$\beta(t)$的递推跟踪公式

$$\beta(t)=\beta(t-1)+\frac{\delta}{X^{(1)}(t)X^{(1)T}(t)}X^{(1)T}(t)[Y^{(1)}(t)-\beta(t-1)X^{(1)T}(t)], \tag{6}$$

式中δ为收敛因子。

给定初值$\beta(0)$，对(5)式应用$\beta(t)$的递推跟踪公式，得参数跟踪估值序列

$$\hat\beta(1)=\begin{bmatrix}\hat a_0(1)\\ \cdots\\ \hat c_1(1)\\ \cdots\end{bmatrix},\quad \hat\beta(2)=\begin{bmatrix}\hat a_0(2)\\ \cdots\\ \hat c_1(2)\\ \cdots\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \hat\beta(m)=\begin{bmatrix}\hat a_0(m)\\ \cdots\\ \hat c_1(m)\\ \cdots\end{bmatrix}, \tag{7}$$

式中 m 表示当前时刻。对参数估值序列(7)建立适当的预报模型，得当前时刻的参数模拟值$\hat{\beta}(m)$和向前一步的参数预报值$\hat{\beta}(m+1)$，进而得 m 时刻的模拟值$\hat{y}^{(1)}(m)$和 $m+1$ 时刻的预报值$\hat{y}^{(1)}(m+1)$，最终获得预报真值$\hat{y}^{(0)}(m+1)$。

2. 灰色时变参数模型的建模

(1) 对预报对象$y^{(0)}(t)$，预报因子$X_i^{(0)}(t)$

$$
\begin{aligned}
y^{(0)}(t) &= \{y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \cdots y^{(0)}(m)\},\\
x_1^{(0)}(t) &= \{x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \cdots x_1^{(0)}(m)\},\\
x_2^{(0)}(t) &= \{x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \cdots x_2^{(0)}(m)\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n^{(0)}(t) &= \{x_n^{(0)}(1), x_n^{(0)}(2), \cdots x_n^{(0)}(m)\},
\end{aligned}
$$

进行一阶累加生成，得$n\times m$一阶 AGO 预报因子阵

$$
A_{n\times m}^{(1)}(t)=\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(1) & x_1^{(1)}(2) & \cdots & x_1^{(1)}(m)\\ x_2^{(1)}(1) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_2^{(1)}(m)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n^{(1)}(1) & x_n^{(1)}(2) & \cdots & x_n^{(1)}(m)\end{bmatrix}
$$

和 $1\times m$ 一阶 AGO 预报对象阵

$$
Y_{1\times m}^{(1)}(t)=[y^{(1)}(1), y^{(1)}(2), \cdots, y^{(1)}(m)],
$$

其中

$$
\begin{aligned}
x_i^{(1)}(t) &= \sum_{k=1}^{t} x_i^{(0)}(k), \quad t\leqslant m \qquad i=1,2,\cdots,n\\
x_i^{(1)}(1) &= x_i^{(0)}(1),\\
y^{(1)}(t) &= \sum_{k=1}^{t} y^{(0)}(k), \quad t\leqslant m\\
y^{(1)}(1) &= y^{(0)}(1)
\end{aligned}
$$

由时间参数t^j生成另一预报因子阵

$$
B_{p\times m}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m\\ 1^2 & 2^2 & \cdots & m^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1^p & 2^p & \cdots & m^p\end{bmatrix},
$$

则$A_{n\times m}$　和$B_{p\times m}$　共同构成一扩展预报因子阵$X_{(p+n)\times m}^{(1)}(t)$。

由于$X_{(p+n)\times m}^{(1)}(t)$阵因子多，为剔除那些对$Y^{(1)}(t)$　贡献小的因子，我们引入逐步算法，以获得最优模型，同时确定各入选因子系数，记为 $\beta(0)$。

(2) 以 $\beta(0)$为初始参数，运用参数递推跟踪公式(6)，获取一系列参数估值：$\hat{\beta}(1)$、$\hat{\beta}(2)$、…、$\hat{\beta}(m)$；m是观测数据组数。

(3) 分析参数估值序列$\{\hat{\beta}(t)\}$，通过一定的数学手段，寻找其变化规律，建立参数估值序列的适当模拟预报模型。一般对平稳的$\{\hat{\beta}(t)\}$序列建立AR(p)模型或ARMA(p, q)模型；对准平稳的$\{\hat{\beta}(t)\}$序列建立ARIMA(p, q, d)模型；对非平稳序列则建立SETAR模型。以AIC准则为依据，确定相应各参数模拟预报模型的阶数、差分次数、门限值、时滞等值。

(4) 根据已建立的参数模拟预报模型得第m时刻的各参数模拟值$\hat{\beta}(m)$和第$m+1$时刻的各参数预报值$\hat{\beta}(m+1)$；进而得第m时刻的状态模拟值$\hat{y}^{(1)}(m)$和第$m+1$时刻的状态预报值$\hat{y}^{(1)}(m+1)$

$$\begin{cases} \hat{y}^{(1)}(m) = \hat{\beta}(m)X^{(1)T}(m), \\ \hat{y}^{(1)}(m+1) = \hat{\beta}(m+1)X^{(1)T}(m+1). \end{cases} \tag{8}$$

(5) 累减还原，获得第$m+1$时刻的实际预报值

$$\hat{y}^{(0)}(m+1) = \hat{y}^{(1)}(m+1) - \hat{y}^{(1)}(m). \tag{9}$$

(6) 重复(2)—(5)步，即可获得向前L步的实际预报值$\hat{y}^{(0)}(m+L)$。

三、灰色时变参数模型对蒙自5月雨量的预报

本文以时间参数$t^j(j=0, 1, \cdots, 10;\ t=1, 2, \cdots, 36)$和1950—1985年1—12月海温网格点资料为预报因子集，按前述步骤建立蒙自5月雨量的灰色时变参数模型：

$$\hat{y}^{(1)}(t) = a_0(t) + a_1(t)t + c(t)x^{(1)}(t) + \varepsilon(t), \tag{10}$$

并同时获得递推初始参数(本例中δ取1)：

$$a_0(0) = 50.6, \qquad a_1(0) = -1011.3, \qquad c(0) = 3.8.$$

我们应用公式(10)逐年对1987—1991年进行了五年向前一步预报。

在预报过程中，鉴于参数估值序列：$a_0(t)$和$a_1(t)$稳定少变，故视为常数；$c(t)$则变幅较大，故对其建立门限自激励回归参数模拟预报模型SETAR$(L_j; k_1, k_2, \cdots, k_L)$：

$$c(t) = g_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} g_i^{(j)} c(t-i) + \varepsilon^{(j)}(t), \quad g_{t-d} \in R_j \tag{11}$$

式中$j=1, 2, \cdots, L$；$R = R_1 U R_2 U \cdots U R_L$，$R_i = (r_{i-1}, r_i)$；$d$为时滞（非负整数）；$r_1, r_2, \cdots, r_{L-1}$为门限值。

具体如预报1987年蒙自5月雨量时，所建立的门限自激励回归参数模拟预报模型为

$$\hat{c}(t) = \begin{cases} 3.2809 + 0.7831c(t-1) - 1.0809c(t-2) + 0.4395c(t-3), & c(t-3) \leqslant 3.8228 \\ 0.8057 + 0.5044c(t-1) + 0.2847c(t-2), & c(t-3) > 3.8228 \end{cases} \tag{12}$$

则 1986 年的参数模拟值和 1987 年的参数预报值分别为：$\hat{c}(1986)=3.8246$ 和 $\hat{c}(1987)=3.8214$，于是得 1986 年的 $\hat{y}^{(1)}(1986)=50.6-1011.3\times36+3.8246\times10365\approx3286$ 和 1987 年的 $\hat{y}^{(1)}(1987)=50.6-1011.3\times37+3.8214\times10651=3334$，则 1987 年的 $\hat{y}^{(0)}(1987)=\hat{y}^{(1)}(1987)-\hat{y}^{(1)}(1986)=48(\mathrm{mm})$。

按前述方法即可获得 1988，1989，1990，1991 年蒙自 5 月雨量的预报值，现将计算结果及其与真实值的误差综合如下表(表 1)。

表 1　灰色时变参数预报模型预报结果及其误差

t	年	$\hat{y}^{(0)}(t)$	$y^{(0)}(t)$	δ	$V(\%)$	预报趋势	实际趋势	趋势评定
37	1987	48	36	-12	33.3	特少	特少	√
38	1988	79	64	-15	23.4	偏少	偏少	√
39	1989	161	199	38	23.6	特多	特多	√
40	1990	231	208	-23	11.1	特多	特多	√
41	1991	87	90	3	3.3	正常	正常	√

注：$\hat{y}^{(0)}(t)$为预报值，$y^{(0)}(t)$为真实值，$\delta=y^{(0)}(t)-\hat{y}^{(0)}(t)$，$V=|(\delta/y^{(0)}(t))\times100\%|$为相对误差。趋势评定中"√"为正确，"×"为错误。

为了进行比较，下面将其与一般多层递阶方法、多元回归分析方法及一般灰色系统预报方法的试报结果一并列入表 2 中。

表 2　四种预报方法试验预报结果比较表

t	年	Y	Y'				V(相对误差)(%)				预报趋势			
			A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
37	1987	36	48	24	82	81	33.3	33.3	128	125	√	√	×	×
38	1988	64	79	108	98	80	23.4	68.8	53.0	25.0	√	×	×	×
39	1988	199	161	114	103	80	23.6	42.7	48.2	59.8	√	×	×	×
40	1989	208	231	134	86	79	11.1	55.2	58.7	62.0	√	√	×	×
41	1991	90	87	69	61	79	3.3	23.3	32.2	12.2	√	×	×	√

注：A：GTVPM(2)灰色时变参数模型；(10)式；B：一般时变参数模型：$Y'^{(0)}(t)=a_0(t)+a(t)X^{(0)}(t)$；C：多元回归模型：$Y'=a_0+aX^{(0)}(t)$；D：GM(1，1)模型：$Y'^{(1)}_t=-16879.1e^{-0.0058t}+17022.1$。

比较表 2 中四种预报结果，可知：多元回归模型的预报趋势准确率为 0／5；GM(1，1)模型的预报趋势准确率为 1／5；一般多层递阶模型的预报趋势准确率为 2／5；灰色时变参数模型的预报准确率为 5／5。

四、结束语

从以上结果可看出：运用灰色时变参数模型对蒙自 5 月雨量进行预报，预报趋势准确率比其他三类模型的准确率有显著提高。可见灰色时变参数预报模型具有一定的优越性。

参 考 文 献

[1] 邓聚龙，1986，灰色预测与决策，华中工学院出版社。
[2] 邓聚龙，1986，本征性灰色系统的主要方法，系统工程理论与实践，6，1，60—65。
[3] 彭运福，1989，灰色预测——校正模型及应用，系统工程，7，5，37—41。
[4] Z. G. Han, 1982, A recursive estimates method of the nonlinear stochastic system and its convergence analysis, Identification and System Parameter Estimation, Sixth IFAC Symposium, Virginia, U.S.A.
[5] 韩志刚，1983，动态系统预报的一种新方法，自动化学报，9，3，161—169。

Grey Time Varying Parameter Model and Its Application to Climatic Prediction

Cao Jie, Zhang Wancheng, Yang Ming and Tao Yun
(Honghe Hani and Yi Autonomous Prefecture Meteorological Bureau of Yunnan Province, Mengzi 661100)

Abstract

This paper proposes a new model of the grey system the rainfall of Mengzi in may has been forecasted by this model. The results indicated that the grey time varying parameter model is more efficient than other kinds of models.

Key words: grey model; time varying character; climatic prediction.