非静力平衡条件下的垂直坐标变换及湿空气动力学方程组

王兴荣　　石春娥

（安徽省气象科学研究所，合肥　230061）

汪钟兴

（中国科学技术大学地球和空间科学系，第三世界科学院中国科学技术大学地球科学和天文学高级研究中心，合肥　230026）

摘　要　为了解决目前湿空气动力学中一些悬而未决的问题，拓宽物理量垂直坐标系的应用范围，本文讨论了非静力平衡条件下的垂直坐标转换，给出了不同坐标系的转换公式和动力学方程组，最后运用它们建立了湿空气动力学方程组。

关键词　非静力平衡　垂直坐标变换　湿空气动力学

1　引言

在动力气象学中，为了讨论问题方便，常常采用一些物理量坐标来代替垂直坐标，例如，针对高空天气图都是等压面图，日常气象资料也都是取等压面上的数据，因此，为了方便，常采用 P 作为垂直坐标；又如在处理与地形有关的大气动力学问题时，为了得到比较简单的下边界条件，常采用 σ 坐标。然而，到目前为止，除了作者的部分工作[1]外，从几何 z 坐标系到各种物理量垂直坐标系之间的转换公式都是建筑在静力平衡假定之上的。近年来，随着对诸如冰雹和暴雨等灾害性天气预报研究的深入，人们越来越重视水汽对天气系统发生和发展的作用，不断有学者尝试进行湿空气动力学的研究[2~6]。为了方便，这些研究往往也采用物理量坐标系来讨论问题。采用的方法大致有两种，一种是注意到水汽凝结潜热释放对静力平衡的破坏，用广义静力平衡来代替静力平衡，然后仿照干空气动力学方程组写出湿空气动力学方程组[3~5]，另一种是直接采用静力平衡假定下的物理量垂直坐标系之间的转换公式[6]和相应的动力学方程组。采用这两种方法的这些研究虽然都为湿空气动力学的建立作了开创性的工作，并得到了许多有价值的结论，但是从理论上讲，这两种方法都是有缺陷的，前者仿照干空气动力学方程组写出的湿空气动力学方程组，未经科学论证其合理性，后者不考虑凝结潜热释放对静力平衡的破坏在有些情况下将带来失真。美国国家大气研究中心的 MM5 中尺度模式也开始考虑非静力平衡问题。为了消除这些缺陷，唯一的办法是建立非静力平衡条件下的垂直坐标变换和相应的动力学方程组，本文准备就此问题作一讨论。

1996-03-12 收到，1996-12-14 收到再改稿

2 非静力平衡条件下垂直坐标转换的一般关系

从一般教科书可以发现，以静力平衡为前提的垂直坐标转换公式，推导过程中用到静力平衡公式

$$\alpha\frac{\partial P}{\partial z} = -g \tag{1}$$

的地方，主要是涉及气压 P 和密度 ρ 的公式，为了求得非静力平衡条件下垂直坐标转换公式，定义非静力平衡参数 ε

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

则由几何 z 坐标的垂直运动方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\alpha\frac{\partial P}{\partial z} - g, \tag{3}$$

可得与静力平衡公式类似的非静力平衡公式

$$\alpha\frac{\partial P}{\partial z} = -g\varepsilon, \tag{4}$$

这样，以公式（4）为前提，就可仿照传统的以静力平衡为前提的转换关系推导，考虑一个一般的物理量垂直坐标 ζ，假定它是关于高度 z 的严格单调函数。那么，任何一个物理量 F 作为因变量在几何 z 坐标系和物理量 ζ 坐标系中可分别表示为 $F(x, y, z, t)$ 和 $F(x, y, \zeta, t)$，当作为自变量的 z 和 ζ 相互代换时，F 值不变，即

$$F(x, y, \zeta, t) \equiv F[x, y, z(x, y, \zeta, t), t]. \tag{5}$$

对 s(s 代表 x, y 或 t）和 ζ 求微商，可得两者转换关系式为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_z + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_\zeta, \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \tag{7}$$

其中下标表示不同的垂直坐标系。由(4)、(6)、(7)式，令 $F=P$，则可把 z 坐标系中水平气压梯度力转换到 ζ 坐标系

$$-\alpha\nabla_z P = -\alpha\nabla_\zeta P + \alpha\frac{\partial P}{\partial z}\nabla_\zeta z = -\alpha\nabla_\zeta P - \varepsilon\nabla_\zeta\Phi. \tag{8}$$

上述推导中与传统的以静力平衡为前提的推导不同的是：$\alpha\partial P/\partial z$ 不再等于 $-g$，而是等于 $-\varepsilon g$。这样，非静力平衡条件下 ζ 坐标系中无摩擦水平运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\alpha\nabla_\zeta P - \varepsilon\nabla_\zeta\Phi - f\vec{k}\times\vec{V}. \tag{9}$$

同样，由(4)、(7)式可得相应的非静力平衡公式和连续方程

$$\alpha\frac{\partial P}{\partial \zeta}+\varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial P}{\partial \zeta}\right)\right]+\nabla_{\zeta}\cdot\vec{V}+\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial \zeta}=0. \tag{11}$$

在非静力平衡条件下，热力学方程在 ζ 坐标系中的形式仍为

$$c_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}-\alpha\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\delta Q}{\delta t}. \tag{12}$$

此外，上述非静力平衡坐标转换公式中推导出一个新参数 ε，因此还必须增加一个方程。注意到 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t=(1/g)\mathrm{d}^2\Phi/\mathrm{d}t^2$，则由 ε 定义(2)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2}=(\varepsilon-1)g^2, \tag{13}$$

我们称之为位势变化方程。不难看出，这个方程实际上就是垂直运动方程在定义非静力平衡参数 ε 后的一种变换写法。

3　各种物理量坐标系中的大气动力学方程

3.1　P 坐标系的大气动力学方程组

如果设 $\zeta=P$，利用 $\nabla_{\zeta}P=\nabla_P P=0$ 和 $\partial P/\partial\zeta=\partial P/\partial P=1$，由(9)~(13)式可得非静力平衡条件下 P 坐标系的基本动力学方程组

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon\nabla_P\Phi-f\vec{k}\times\vec{V}, \tag{14}$$

$$\frac{RT}{P}+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial P}=0, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln\varepsilon^{-1})}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\vec{V}+\frac{\partial\omega}{\partial P}=0, \tag{16}$$

$$c_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}-\omega\frac{RT}{P}=\frac{\delta Q}{\delta t}, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2}=(\varepsilon-1)g^2. \tag{18}$$

如假定无水平加速，则由上述方程组可得地转平衡风和热成风方程表达式

$$\vec{V}_{gh}=\left(\frac{\varepsilon}{f}\right)\vec{k}\times\nabla\Phi, \tag{19}$$

$$-\frac{\partial\vec{V}_{gh}}{\partial P}=\left(\frac{1}{f}\right)\alpha\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{-1}\vec{k}\times\nabla\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)-\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\frac{1}{f}\vec{k}\times\nabla\Phi. \tag{20}$$

同样，由上述方程组(14)~(18)，可得垂直涡度方程和垂直位涡方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f+\zeta)=-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial P}-\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial P}\right)-\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right), \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varepsilon(f+\zeta)\frac{\partial}{\partial P}\left(TP^{-R/c_p}\right)\right]=\varepsilon(f+\zeta)\frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{1}{c_p}P^{-R/c_p}\frac{\delta Q}{\delta t}\right]$$
$$-\varepsilon(f+\zeta)\left[\frac{\partial u}{\partial P}\frac{\partial}{\partial x}\left(TP^{-R/c_p}\right)+\frac{\partial v}{\partial P}\frac{\partial}{\partial y}\left(TP^{-R/c_p}\right)\right]$$
$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial P}\left(TP^{-R/c_p}\right)\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial P}-\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial P}\right)+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]. \tag{22}$$

对于方程组(14)~(18)，如能给予适当的条件，求出ε与$\delta Q/\delta t$的关系，那么，上述方程就是一个闭合的方程组。对于一个方程组，应该重新讨论其边界条件。事实上，将$\omega=\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$在$z$坐标展开，并用(4)、(6)、(7)式变换到$P$坐标，则有

$$\omega=\frac{P\varepsilon}{RT}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_P+(\vec{V}_h\cdot\nabla_P)\Phi-gw\right]. \tag{23}$$

根据此式，同样可讨论非静力平衡条件下P坐标系中的边界条件：

(1) 下边界条件　在地面上，$P=P_s(x,y,t)$，若地面平坦，应有$w_s=0$，则由(23)式可得

$$\omega_s=\frac{P_s\varepsilon}{RT}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}_s\cdot\nabla\right)\Phi_s, \tag{24}$$

或

$$\omega_s=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}_s\cdot\nabla\right)P_s. \tag{25}$$

如果考虑地形作用，当$P=P_s$时，w_s为

$$\omega_s=\vec{V}_s\cdot\nabla z_s. \tag{26}$$

其中z_s表示地形高度，则由(23)式可得

$$\omega_s=\frac{P_s\varepsilon}{RT}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}_s\cdot\nabla\right)\Phi_s-g\vec{V}_s\cdot\nabla z_s\right], \tag{27}$$

或

$$\omega_s=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}_s\cdot\nabla\right)P_s+\vec{V}_s\cdot\nabla z_s\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{28}$$

(2) 上边界条件　在$P\to 0$，则$\omega\to 0$或为有限值。从上述方程组有关公式及边界条件的讨论中可以看出：只要满足P是z的严格单调函数（不难证明这在实际大气中总是成立的），它们适合于各种非静力平衡状态下的大气运动，在垂直加速度可以忽略不计的情况下，即当$\mathrm{d}w/\mathrm{d}t=0$时，$\varepsilon=1$，这时上述方程组有关公式及边界条件均退化为传统的以静力平衡为前提的P坐标形式。

3.2　σ坐标系的大气动力学方程组

如设$\zeta=\sigma=P/P_s$，其中P_s为平坦地面气压，则由(9)~(13)式可得非静力平衡条件下σ坐标系的基本动力学方程组为

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=-\frac{RT}{P_s}\nabla_\sigma P_s-\varepsilon\nabla_\sigma\Phi-f\vec{k}\times\vec{V}, \tag{29}$$

$$\frac{RT}{\sigma}+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}=0, \tag{30}$$

$$\frac{d}{dt}[\ln(\varepsilon^{-1}P_s)]+\frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma}+\nabla_\sigma\cdot\vec{V}=0, \tag{31}$$

$$c_p\frac{dT}{dt}-\frac{R\dot{\sigma}T}{\sigma}-\frac{RT}{P_s}\frac{dP_s}{dt}=\frac{\delta Q}{\delta t}, \tag{32}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}=(\varepsilon-1)g^2. \tag{33}$$

边界条件为

上边界：$\sigma=0$（大气顶）有：$\dot{\sigma}=0$, (34)

下边界：$\sigma=1$（地面）有：$\dot{\sigma}=0$. (35)

由上述方程组同样可得非静力平衡条件下 σ 坐标系中的地转平衡风、热成风、垂直涡度和垂直位涡等方程，在此不再赘述。

3.3 θ 坐标系的大气动力学方程组

如设 $\zeta=\theta$，则同样很容易从(9)～(13)式得到非静力平衡条件下 θ 坐标系的基本动力学方程组和边界条件。

4 湿空气动力学方程组

根据上述讨论，容易建立相应的湿空气动力学方程组。例如，文献[3]～[5]用广义静力平衡代替静力平衡，然后仿照干空气动力学方程组写出的相当干燥饱和湿空气动力学方程组为

$$\frac{du}{dt}=fv-\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{36}$$

$$\frac{dv}{dt}=-fu-\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P}=-\frac{RT^*}{P}, \tag{38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial P}=0, \tag{39}$$

$$c_v\frac{dT^*}{dt}+P\frac{d}{dt}\left(\frac{RT^*}{P}\right)=0. \tag{40}$$

而根据(14)～(18)式，不难得到，如果像文献[3]～[5]一样定义广义温度为

$$T^*=T\exp\left(\frac{L}{c_p}\frac{q_s}{T}\right),$$

并假定广义静力平衡（38）式成立，则得到的相当于燥饱和湿空气动力学方程组为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=fv-\frac{T}{T^*}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{41}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-fu-\frac{T}{T^*}\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P}=-\frac{RT^*}{P}, \tag{43}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{T^*}{T}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial P}=0, \tag{44}$$

$$c_v\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{RT^*}{P}\right)=0, \tag{45}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2}=\left(\frac{T}{T^*}-1\right)g^2. \tag{46}$$

比较(36)～(40)式和(41)～(46)式，可以发现，除了广义静力平衡和热力学方程相同之外，其他方程均有较大程度的不同，例如水平运动方程中与(36)、(37)式不同，(41)、(42)式位势梯度项增加了系数T/T^*，而在连续方程中与（39）式不同，（44）式增加了一项$\mathrm{d}\ln(T^*/T)/\mathrm{d}t$。这说明，文献[3]～[5]的“仿照方法”是不合理的。

5 结语与讨论

本文给出了非静力平衡条件下的垂直坐标转换公式和各种物理量坐标系的动力学方程组。从这些公式和方程组可以看出，它们的基本形式同静力平衡条件下的传统公式和方程组很相似，但有区别，它具有更普遍的形式。事实上，只要$\mathrm{d}w/\mathrm{d}t=0$，静力平衡满足，此时非静力平衡参数$\varepsilon=1$，那么上述的所有公式和方程组都将退化为传统的以静力平衡为前提的公式和方程组。

需要指出的是：由于本文引进的非静力平衡参数本身就是一个时间变量，因此，由垂直运动方程和非静力平衡参数得出的位势变化方程显得有点复杂，似乎给进一步的理论研究和数值计算带来了一定的困难；但是这个方程揭示了以往理论研究中所没有涉及的位势变化与非静力平衡程度的控制关系，因而引发了许多值得研究的问题，而且针对实际问题，经过一定的合理假定加以简化，同样可以进行理论研究和数值计算，得到许多意想不到的有意义的结果。事实上，以往的以静力平衡为基础的理论工作就是建立在$\mathrm{d}^2\Phi/\mathrm{d}t^2=0$的假定基础上，只不过大家没有意识到而已。由于篇幅关系，进一步的工作将在其他文章中论述。

参 考 文 献

1 王兴荣、吴可军，1995，湿空气动力学中若干问题的探讨，气象科学，15(1)，9～17.
2 谢义炳，1978，湿斜压大气的天气动力学问题，暴雨文集，吉林人民出版社，1～15.
3 王两铭等，1978，暴雨天气动力学一些问题的探讨，中山大学学报，No.1，20～36.

4　王两铭等，1980，饱和湿空气动力学的基本方程和主要特征，气象学报，38(1)，44～50.
5　王两铭，1980，饱和湿空气热力学的基本特征，气象学报，38(2)，106～109.
6　吴国雄等，1995，湿位涡和倾斜涡度发展，气象学报，53(4)，387～405.

The Vertical Coordinate Transformation and the Dynamics Equations of Moist Air Based on the Nonstatic Equalibrium

Wang Xingrong　and　Shi Chune
(Anhui Institute of Meteorology, Hefei 230061)

Wang Zhongxing
(Department of the Earth and Space Science, University of Science and Technology of China, Advanced Study Center of Earth Science and Astronomy, University of Science and Technology of China of the Third World Academy of Sciences, Hefei 230026)

Abstract　In order to solve important issues in dynamics on moist air at present and extend the appilication of the physics parameter vertical coordinates system, the vertical coordinate transformation based on the nonstatic equilibrium is discussed. The transform formula and the dynamical equations in different coordinates system are provided and used to build dynamical equations of moist air at present at the same time.

Key words　nonstatic equalibrium　vertical coordinate transformation　dynamics of moist air